Комплексна анализа А, М смер
Јануарски рок, 30.01.2021.

1. **а)** Користећи Коши-Риманове услове испитати диференцијабилност и аналитичност функције $f(z) = |z|\,\mathrm{Im}\,z$.

   б) Нека је h холоморфна функција на области Ω. Ако је $h^2(z) = \overline{h(z)}$ за све $z \in \Omega$, доказати да је h константна. Наћи све могуће вредности за h.

2. Израчунати интеграл $\int\limits_{|z|=r} \frac{z^2}{e^{2\pi i z^3}-1}dz$ у зависности од реалног броја r, ако важи $r^3 \notin \mathbb{Z}$.

3. У зависности од параметара $a \in (-1,1)$ и $m \in \mathbb{N}$, одредити вредност интеграла $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos mx}{1-a\cos x}dx$.

4. **а)** Одредити билинеарно пресликавање f које слика тачке ∞, $\frac{-i}{2}$ и i редом у 1, -1 и $\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$.

   б) Добијеним пресликавањем f пресликати област $E = \{z \in \mathbb{C} : |z+i| > 1, |z| < 1\}$.

   в) Одредити бар једно $1-1$ холоморфно пресликавање којим се $\{z \in \mathbb{C} : |z - \frac{i}{2}| > \frac{1}{2}, |z-i| < 1\}$ пресликава на $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

5. Нека је f холоморфна функција на пробушеном диску $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ и нека је $\mathrm{Re}\,f(z) > 0$ за све $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$. Доказати да f има отклоњив сингуларитет у 0.

Комплексна анализа А, М смер
Јануарски рок, 30.01.2021.

1. **а)** Користећи Коши-Риманове услове испитати диференцијабилност и аналитичност функције $f(z) = |z|\,\mathrm{Im}\,z$.

   б) Нека је h холоморфна функција на области Ω. Ако је $h^2(z) = \overline{h(z)}$ за све $z \in \Omega$, доказати да је h константна. Наћи све могуће вредности за h.

2. Израчунати интеграл $\int\limits_{|z|=r} \frac{z^2}{e^{2\pi i z^3}-1}dz$ у зависности од реалног броја r, ако важи $r^3 \notin \mathbb{Z}$.

3. У зависности од параметара $a \in (-1,1)$ и $m \in \mathbb{N}$, одредити вредност интеграла $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos mx}{1-a\cos x}dx$.

4. **а)** Одредити билинеарно пресликавање f које слика тачке ∞, $\frac{-i}{2}$ и i редом у 1, -1 и $\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$.

   б) Добијеним пресликавањем f пресликати област $E = \{z \in \mathbb{C} : |z+i| > 1, |z| < 1\}$.

   в) Одредити бар једно $1-1$ холоморфно пресликавање којим се $\{z \in \mathbb{C} : |z - \frac{i}{2}| > \frac{1}{2}, |z-i| < 1\}$ пресликава на $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

5. Нека је f холоморфна функција на пробушеном диску $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ и нека је $\mathrm{Re}\,f(z) > 0$ за све $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$. Доказати да f има отклоњив сингуларитет у 0.