**Комплексна анализа А, М смер**
**Фебруарски рок, 17.02.2021.**

1. **а)** Ако је функција $u(z) = \frac{\sin\theta + \cos\theta}{\rho}$ реални део аналитичке функције $f = f(z)$, где је $z = \rho e^{i\theta}$, одредити $f$.

   б) Нека је $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ и $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ таква да су функције $f^2$ и $f^3$ холоморфне на $\mathbb{D}$. Доказати да је $f$ холоморфна на $\mathbb{D}$.

2. Нека је $g(z) = (\operatorname{Im} z)^2 + \frac{1}{4}z^2$, где је $z \in \mathbb{C}$. Одредити функцију $f(w) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1} \frac{g(z)}{z-w}dz$, за $|w| \neq 1$.

3. Одредити вредност интеграла $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin kx}{x(x^2+a^2)^2}dx$ у зависности од параметара $k \in \mathbb{N}$ и $a \neq 0, a \in \mathbb{R}$.

4. **а)** Нека је $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\}$. Ако је $b \in (0, +\infty)$ и $f(z) = \frac{z-ib}{z+ib}$, наћи $f(\Omega)$.

   б) Ако је $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, одредити бар једно $1-1$ холоморфно пресликавање којим се област $\mathbb{D} \cap \Omega$ пресликава на $\Omega$.

5. Нека је $f$ цела функција таква да је за свако $z \in \mathbb{C}$ испуњен бар један од услова $|f(z)| \leq 1$ или $|f'(z)| \leq 1$.

   **а)** За све $z \in \mathbb{C}$ такве да постоји $t_0 = \sup\{t \in [0,1] : |f(tz)| \leq 1\}$, доказати да је $|f(z) - f(t_0 z)| \leq |z|$.

   б) Доказати да је $f(z) = az + b$, где су $a, b \in \mathbb{C}$.


**Комплексна анализа А, М смер**
**Фебруарски рок, 17.02.2021.**

1. **а)** Ако је функција $u(z) = \frac{\sin\theta + \cos\theta}{\rho}$ реални део аналитичке функције $f = f(z)$, где је $z = \rho e^{i\theta}$, одредити $f$.

   б) Нека је $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ и $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ таква да су функције $f^2$ и $f^3$ холоморфне на $\mathbb{D}$. Доказати да је $f$ холоморфна на $\mathbb{D}$.

2. Нека је $g(z) = (\operatorname{Im} z)^2 + \frac{1}{4}z^2$, где је $z \in \mathbb{C}$. Одредити функцију $f(w) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1} \frac{g(z)}{z-w}dz$, за $|w| \neq 1$.

3. Одредити вредност интеграла $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin kx}{x(x^2+a^2)^2}dx$ у зависности од параметара $k \in \mathbb{N}$ и $a \neq 0, a \in \mathbb{R}$.

4. **а)** Нека је $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\}$. Ако је $b \in (0, +\infty)$ и $f(z) = \frac{z-ib}{z+ib}$, наћи $f(\Omega)$.

   б) Ако је $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, одредити бар једно $1-1$ холоморфно пресликавање којим се област $\mathbb{D} \cap \Omega$ пресликава на $\Omega$.

5. Нека је $f$ цела функција таква да је за свако $z \in \mathbb{C}$ испуњен бар један од услова $|f(z)| \leq 1$ или $|f'(z)| \leq 1$.

   **а)** За све $z \in \mathbb{C}$ такве да постоји $t_0 = \sup\{t \in [0,1] : |f(tz)| \leq 1\}$, доказати да је $|f(z) - f(t_0 z)| \leq |z|$.

   б) Доказати да је $f(z) = az + b$, где су $a, b \in \mathbb{C}$.