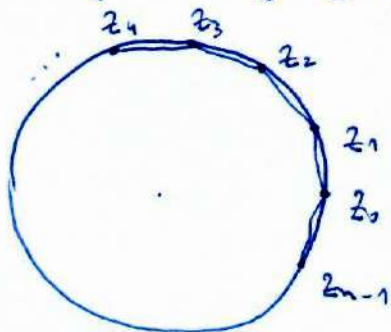


⑦ Определити производ дужина свих дијагонала и странице правилног n -а угла који је уписан у јединичну кружницу.



$$z_0 = 1$$

$$z_k = e^{i \frac{2k\pi}{n}} = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$$

$$z_1 = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$$

дужина странице је

$$a = |z_1 - z_0| = \left| \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} - 1 \right|$$

$$= \sqrt{\left(\cos \frac{2\pi}{n} - 1\right)^2 + \left(\sin \frac{2\pi}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\cos^2 \frac{2\pi}{n} - 2\cos \frac{2\pi}{n} + 1 + \sin^2 \frac{2\pi}{n}}$$

$$= \sqrt{2 - 2\cos \frac{2\pi}{n}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - \cos \frac{2\pi}{n}}$$

$$= \sqrt{2} \cdot \sqrt{2 \sin^2 \frac{\pi}{n}} = 2 \cdot \left| \sin \frac{\pi}{n} \right|$$

$$d_k = |z_k - z_0|$$

$$d_k = \sqrt{\left(\cos \frac{2k\pi}{n} - 1\right)^2 + \left(\sin \frac{2k\pi}{n}\right)^2}$$

$$d_k = \sqrt{2 - 2\cos \frac{2k\pi}{n}}$$

$$d_k = \sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - \cos \frac{2k\pi}{n}}$$

$$d_k = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2 \sin^2 \frac{k\pi}{n}}$$

$$d_k = 2 \cdot \left| \sin \frac{k\pi}{n} \right|$$

$\prod_0 = \prod_{k=1}^{n-1} d_k$ производ свих које излазе из z_0 !

$$\prod_0 = \prod_{k=1}^{n-1} 2 \cdot \left| \sin \frac{k\pi}{n} \right|$$

Производ свих који излазе из z_k , $k=1, \dots, n-1$ је исти као и производ $\prod_0$, јер је уписан n -а угло!

Ако саопштинемо свих n производа изаписаће се да смо сваку дужину рачунали два пута, па је

$$\prod = \sqrt{\prod_0 \cdot \prod_1 \cdot \prod_2 \cdot \dots \cdot \prod_{n-1}} = \sqrt{\prod_0^n} = \prod_0^{\frac{n}{2}}$$

Закључак,

$$\prod = \left(\prod_{k=1}^{n-1} 2 \left| \sin \frac{k\pi}{n} \right| \right)^{\frac{n}{2}}$$

$$\prod = 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \left(\prod_{k=1}^{n-1} \left| \sin \frac{k\pi}{n} \right| \right)^{\frac{n}{2}}$$

⑧ Нека су $z, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ и $z^n + c_1 z^{n-1} + \dots + c_n = 0$.

Доказати: $|z| \leq 2 \cdot \max_{1 \leq j \leq n} |c_j|^{\frac{1}{j}}$.

Означимо: $M = \max_{1 \leq j \leq n} |c_j|^{\frac{1}{j}}$

• За $z = 0$ тривијално важи

$$|c_k| \leq M^k \quad \forall k \in \{1, \dots, n\}$$

• За $z \neq 0$ $z^n + c_1 z^{n-1} + \dots + c_n = 0$

$$z^n \left(1 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \dots + \frac{c_n}{z^n} \right) = 0$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \dots + \frac{c_n}{z^n} = 0$$

$$\left| 1 + \sum_{k=1}^n \frac{c_k}{z^k} \right| = 0$$

$$0 = \left| 1 - \left(-\sum_{k=1}^n \frac{c_k}{z^k} \right) \right| \geq 1 - \left| \sum_{k=1}^n \frac{c_k}{z^k} \right|$$

$$\Rightarrow \left| \sum_{k=1}^n \frac{c_k}{z^k} \right| \geq 1$$

$$1 \leq \left| \sum_{k=1}^n \frac{c_k}{z^k} \right| \leq \sum_{k=1}^n \frac{|c_k|}{|z|^k} \stackrel{\text{HejA}}{\leq} \sum_{k=1}^n \frac{M^k}{|z|^k} \quad (*)$$

Ако ств. изразимо да је $|z| > 2M$ онда је $\sum_{k=1}^n \frac{M^k}{|z|^k} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}$

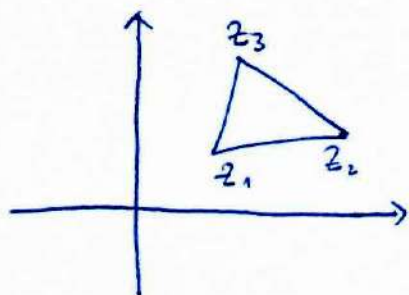
$$< \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$$

и то након је контрадикција са $(*)$

$$\Rightarrow \boxed{|z| \leq 2 \cdot M}$$

9) Ако су z_1, z_2, z_3 тачке $\triangle ABC$ у $\mathbb{C}$ доказати:

$\triangle ABC$ је једнакостраниан $\Leftrightarrow z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3$



$$\alpha = z_2 - z_1, \beta = z_3 - z_1, \gamma = z_1 - z_3, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$$

стране: $|\alpha|, |\beta|, |\gamma|$

$$\alpha + \beta + \gamma = 0$$

$$\bar{\alpha} + \bar{\beta} + \bar{\gamma} = 0$$

$$|\alpha|^2 = \alpha \bar{\alpha}$$

$\Rightarrow$: аи. $\triangle ABC$ је једнакостраниан $|\alpha| = |\beta| = |\gamma| = k$

$$\alpha + \beta + \gamma = 0$$

$$\bar{\alpha} + \bar{\beta} + \bar{\gamma} = 0$$

$$\frac{\alpha \bar{\alpha}}{\alpha} + \frac{\beta \bar{\beta}}{\beta} + \frac{\gamma \bar{\gamma}}{\gamma} = 0 \Rightarrow \frac{|\alpha|^2}{\alpha} + \frac{|\beta|^2}{\beta} + \frac{|\gamma|^2}{\gamma} = 0 \quad / : k^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = 0 \quad / \cdot \alpha \beta \gamma$$

$$\beta \gamma + \alpha \gamma + \alpha \beta = 0$$

$$(z_3 - z_2)(z_1 - z_3) + (z_2 - z_1)(z_1 - z_3) + (z_2 - z_1)(z_3 - z_2) = 0$$

$$z_3 z_1 - z_2 z_1 - z_3^2 + z_2 z_3 + z_1 z_1 - z_1^2 - z_2 z_3 + z_1 z_3 + z_2 z_3 - z_1 z_3 - z_2^2 + z_1 z_2 = 0$$

$$z_3 z_1 - z_3^2 - z_1^2 + z_2 z_3 - z_2^2 + z_1 z_2 = 0$$

$$\boxed{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1}$$

$\Leftarrow$:! Дозаказати од десне стране гласи $\alpha \beta + \beta \gamma + \alpha \gamma = 0$

$$\Rightarrow \alpha \beta + (\alpha + \beta) \gamma = 0$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 0 \text{ (знамо)}$$

$$\Rightarrow \alpha \beta = \gamma^2$$

$$\text{аналогно } \alpha \gamma = \beta^2$$

$$\beta \gamma = \alpha^2$$

Аналогно:

$$k^2 |\beta|^2 |\gamma|^2 = |\beta|^6$$

$$|\alpha|^2 |\beta|^2 |\gamma|^2 = |\alpha|^6$$

||

$$|\alpha| = |\beta| = |\gamma|$$

$$|\alpha|^2 |\beta|^2 |\gamma|^2 = \alpha \bar{\alpha} \beta \bar{\beta} \gamma \bar{\gamma} = \alpha \beta \gamma \overline{\alpha \beta \gamma} = \gamma^3 \cdot \overline{\gamma^3} = (\gamma \cdot \bar{\gamma})^3 = |\gamma|^6$$

10) Ако је $\omega \neq 1$ n -ти корен из 1, доказати да је :

$$(\omega - 1) \cdot (1 + 2\omega + 3\omega^2 + \dots + n\omega^{n-1}) = n$$

$$\omega = e^{i \frac{2k\pi}{n}} \text{ за неко } k \neq 0$$

$$\omega^n = 1$$

$$0 = \omega^n - 1 = (\omega - 1)(\omega^{n-1} + \omega^{n-2} + \dots + \omega + 1) \quad \left. \vphantom{\omega^n = 1} \right\} \text{ знамо}$$

Директним множењем у изразу са леве стране добијано :

$$\begin{aligned} & \omega + 2\omega^2 + 3\omega^3 + \dots + n\omega^n - 1 - 2\omega - 3\omega^2 - \dots - n\omega^{n-1} \\ &= \underbrace{-1 - \omega - \omega^2 - \omega^3 - \dots - \omega^{n-1}}_{=0} + n\omega^n = n \cdot \underbrace{\omega^n}_1 = n \end{aligned}$$

11) Ако је $\xi = e^{i \frac{2\pi}{n}}$ и $|z - \xi^k| \leq 1, k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, доказати да је $z = 0$.

$$|z - \xi^k|^2 \leq 1$$

$$(z - \xi^k)(\overline{z - \xi^k}) \leq 1$$

$$z\bar{z} - \bar{z}\xi^k - z\bar{\xi}^k + |\xi^k|^2 \leq 1$$

$$|z|^2 - \bar{z}\xi^k - z\bar{\xi}^k + 1 \leq 1$$

$$|z|^2 \leq \bar{z}\xi^k + z\bar{\xi}^k \quad / \sum_{k=0}^{n-1}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} |z|^2 &\leq \underbrace{\bar{z} \sum_{k=0}^{n-1} \xi^k}_0 + z \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \bar{\xi}^k}_0 = 0 \Rightarrow n|z|^2 = 0 \\ &\Rightarrow \boxed{z=0} \end{aligned}$$

$$\xi^0 + \xi^1 + \xi^2 + \dots + \xi^{n-1} = \frac{1 - \xi^n}{1 - \xi} = 0$$

$$\bar{\xi}^0 + \bar{\xi}^1 + \bar{\xi}^2 + \dots + \bar{\xi}^{n-1} = \frac{1 - \bar{\xi}^n}{1 - \bar{\xi}} = 0$$

$$\text{јер } \xi^n = 1$$

$$\bar{\xi}^n = 1$$

- ⑫ Нека је $n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$ и f, g су полиноми са реалним коефицијентима
 чије тачке $(f(1), g(1)), (f(2), g(2)), \dots, (f(n), g(n))$ представљају тачке
 правилног n -аугла у $\mathbb{R}^2$ поређани у позитивном смеру.
 Доказати: $\max \{ \deg f, \deg g \} \geq n-1$.

Пређимо у $\mathbb{C}$: $(f(j), g(j)) \mapsto f(j) + ig(j)$, $j=1, \dots, n$

$h(z) = f(z) + ig(z)$ полином са коеф. у $\mathbb{C}$

$$\deg h = \max \{ \deg f, \deg g \}$$

Треба доказати: $\deg h \geq n-1$.

$h(1), h(2), \dots, h(n)$ су тачке правилног n -аугла
 поређана у позитивном смеру

* n -аугло тако трансформисати ауг. му центар гође у 0
 и хомосетијом га трансформисати у тачку на
 јединичну кружницу, а затим заритрати ауг. тачка
 будући даи ниси корени из 1

транслација у $\mathbb{C} \rightarrow$ додавање комплексног броја

ротација + хомосетија у $\mathbb{C} \rightarrow$ множење комплексним бројем

$$\Rightarrow (\exists a, b \in \mathbb{C}) \quad \begin{aligned} a \cdot h(1) + b &= \zeta \\ a \cdot h(2) + b &= \zeta^2 \\ &\vdots \\ a \cdot h(n-1) + b &= \zeta^{n-1} \\ a \cdot h(n) + b &= \zeta^n = 1 \end{aligned}$$

Полином $p(z) = ah(z) + b$ има степе $\deg h$ и $p(k) = \zeta^k$
 $k \in \{1, \dots, n\}$

$$p(k+1) = \zeta^{k+1} = \zeta \cdot \zeta^k = \zeta \cdot p(k)$$

$$p(k+1) - \zeta \cdot p(k) = 0, \quad k \in \{1, \dots, n-1\}$$

Полином $z(z) = p(z+1) - \zeta \cdot p(z)$ има бар $n-1$ нула.

$$\Rightarrow \deg z \geq n-1$$

Знамо $\deg p = \deg h$. γ каквој γ бира $\deg p$ и $\deg z$?

$$p(z) = c_d z^d + \dots + c_1 z + c_0, \quad d = \deg p, \quad c_d \neq 0$$

$$z(z) = p(z+1) - \xi \cdot p(z) = c_d (z+1)^d + \dots + c_1 (z+1) + c_0 - \xi \cdot (c_d z^d + \dots + c_1 z + c_0)$$

$$z(z) = (1-\xi) \cdot c_d \cdot z^d + \dots$$

$$\Rightarrow \deg z = \deg p = d \text{ јер } (1-\xi) \cdot c_d \neq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\deg h \geq n-1}$$