

Комплексна анализа А, М смер
14.08.2025.

1. Ако је функција f холоморфна на области Ω и $|f|$ хармонијска на Ω , показати да је тада f константна функција на Ω .
2. Нека је $P = \{z \in \mathbb{C} : \frac{-\pi}{2} < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{2}, -1 < \operatorname{Re} z < 1\}$ и нека је крива C позитивно оријентисана граница области P .
 - а) Наћи слику C^* криве C при пресликавању $f(z) = e^{-z}$.
 - б) Израчунати интеграл $\int_C \frac{dz}{(1-e^{-z})^n}$, за све $n \in \mathbb{N}$. (Упутство: Користити део под а) и интеграл по кривој C^*).
 - в) Одредити резидум функције $\frac{1}{(1-e^{-z})^n}$ у тачки $z = 0$, за све $n \in \mathbb{N}$.
3. У зависности од реалних параметара a, b , израчунати вредност интеграла

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2 - b^2}{x^2 + b^2} \frac{\sin ax}{x} dx.$$

4. а) Нека је $a > 1$ и $D_a = \{z \in \mathbb{C} : |z| < a, z \neq 0\}$. Ако је $f(z) = z + \frac{a^2}{z}$, одредити $f(D_a)$.
б) Одредити бар једно $1-1$ холоморфно пресликавање којим се област $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$ пресликава на $\{w \in \mathbb{C} : |w - 2| < 1\}$.
5. Нека је f холоморфна функција на $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Ако је $|f(z^2)| \geq |f(z)|$, за све $z \in \mathbb{D}$, доказати да је f константна функција.

Комплексна анализа А, М смер
27.08.2025.

1. Доказати да је комплексна функција задата у поларним координатама (r, θ) са

$$f(z) = r \cos \theta \ln r - r \theta \sin \theta + i(r \sin \theta \ln r + r \theta \cos \theta), \quad z = re^{i\theta}$$

аналитичка на домену $\Omega = \{z = re^{i\theta} \in \mathbb{C} : r > 0, \theta \in (-\pi, \pi)\}$ и одредити њен извод у свакој тачки домена Ω .

2. Дате су функције $f(z) = \frac{1}{z^2(2-z)}$ и $g(z) = \frac{\sin \pi z}{z^2(2-z)}$.
 - а) Одредити све изоловане сингуларитете и њихове типове за функције f и g .
 - б) Функцију f развити у Лоранов ред на прстенима $P_1 = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 2\}$ и $P_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 2\}$.
 - в) Одредити чланове $\frac{b_1}{z} + a_0 + a_1 z$ Лорановог реда за функцију g на прстену P_1 .
3. У зависности од параметара $k \in \mathbb{N}$ и $a \in \mathbb{R}, |a| \neq 1$ одредити вредност интеграла

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(k-3)t}{(1-2a \cos t + a^2)^3} dt.$$

4. а) Одредити општи облик билинеарног пресликавања које кружнице $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ и $\{z \in \mathbb{C} : |z - \frac{1}{4}| = \frac{1}{4}\}$ пресликава на концентричне кружнице. Одредити однос полупречника тих концентричних кружница.
б) Одредити општи облик билинеарног пресликавања које кружницу $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ и праву $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = 2\}$ пресликава на концентричне кружнице. Одредити однос полупречника тих концентричних кружница.
5. Дате су целе функције f и g такве да је $f + \bar{g}$ ограничена функција у $\mathbb{C}$. Доказати да су f и g константне функције.

Комплексна анализа А, М смер
16.09.2025.

1. Нека је $f = u + iv$ цела функција, при чему важи $u(x, y) = y^3 - 3x^2y + 1$ и $f(0) = 1 + i$. Одредити $\max_{|z| \leq 1} |f(z)|$.
2. Одредити Лоранов развој функције $f(z) = \frac{sh(\frac{1}{z})}{z}$ на прстену са центром 0 и израчунати интеграл $\int_{\gamma} e^z f(z) dz$, где је γ позитивно оријентисана граница јединичног диска $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.
3. Одредити $\int_{|z|=1} \frac{|dz|}{|z-c|^4}$ за $c > 1$.
4. а) Пресликавањем $f(z) = \frac{(z^2+1)2i+4z}{z^2+1+2iz}$ пресликати област $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$.
б) Одредити бар једно 1-1 холоморфно пресликавање којим се $\{z \in \mathbb{C} : |z-2| > 2, |z+2| > 2, \operatorname{Im} z > 0\}$ пресликава на $\{w \in \mathbb{C} : |w| < 1, \operatorname{Im} w < 0\}$.
5. Нека је $n \in \mathbb{N}$. Доказати да функција $f(z) = \frac{z^{n-1}}{\prod_{j=1}^n (z-j)}$ нема примитивну функцију у области $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| > n+1\}$.

Комплексна анализа А, М смер
29.09.2025.

1. Нека је u реална хармонијска функција на области $\Omega \subseteq \mathbb{C}$.
а) Да ли је функција u^2 такође хармонијска?
б) Каква треба да буде функција f да би функција $f \circ u$ била хармонијска?
в) Каква треба да буде функција f да би функција $u \circ f$ била хармонијска?
2. Израчунати $J(r) = \int_{|z|=r} \frac{z^3}{z+1} e^{\frac{1}{z}} dz$, у зависности од реалног параметра $r \neq 1$.
3. Нека је $\phi(z)$ билинеарно пресликавање које праве $l = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 2\}$ и $p = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 3\}$ пресликава на $q = \{\omega \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} \omega = -2\}$ и $K = \{\omega \in \mathbb{C} : |\omega + \frac{7i}{2}| = \frac{3}{2}\}$, тим редом, при чему важи $\phi(i) = i$. Одредити $\phi(V)$, где је $V = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$.
4. Израчунати интеграл $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^4+a^4)^3} dx$, за $a > 0$.
5. Нека је $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ холоморфна функција, при чему важи $\int_0^{2\pi} |f'(re^{it})| dt \leq M$ за све $0 < r < 1$, где је $M > 0$. Доказати да тада важи $\int_0^1 |f(x)| dx \leq |f(0)| + \frac{M}{2\pi}$.

Комплексна анализа А, М смер
24.10.2025.

1. Нека је $f = u + iv$ холоморфна на $B(0, r)$, $r > 0$ и $\tilde{f}(z) = \overline{f(\bar{z})}$.
а) Доказати да је $u(x, y) = \frac{1}{2}(f(x+iy) + \tilde{f}(x-iy))$.
б) Ако је $\tilde{u} : B(0, r)^2 \rightarrow \mathbb{C}$ таква да је $\tilde{u}(z_1, z_2) = \frac{1}{2}(f(z_1 + iz_2) + \tilde{f}(z_1 - iz_2))$, доказати да је $f(z) = 2\tilde{u}(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}) - \tilde{f}(0)$.
в) Доказати да је $\tilde{u} = u$ на $(-r, r)^2$. Да ли је $\tilde{f}$ холоморфна? Да ли је $\tilde{u}$ холоморфна по свакој координати? Шта можемо закључити на основу теореме јединости?
г) Ако је $u(x, y) = (x^3 - 3x^2y)e^{-y} \cos x + (y^3 - 3x^2y)e^{-y} \sin x$, одредити f , користећи претходно доказано.
2. Нека је $r > 0$ и $a \in \mathbb{C}$, при чему важи $|a| \neq r$. Израчунати $I(a, r) = \int_{|z|=r} \frac{1}{a-\bar{z}} dz$.

3. Нека је $\omega = \phi(z)$ билинеарно пресликавање које праву $l = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = 2\}$ пресликава на кружницу $k = \{\omega \in \mathbb{C} : |\omega - \frac{3}{2}| = \frac{1}{2}\}$, а праву $p = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = 1\}$ пресликава на саму себе, при чему је $\phi(\frac{4}{3}) = 4$. Одредити $\phi(V)$, где је $V = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, 0 < \arg z < \frac{\pi}{3}\}$.
4. Доказати формулу $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a \cos x + b \sin x + c} = \frac{2\pi \operatorname{sgn} c}{\sqrt{c^2 - a^2 - b^2}}$, где су $a, b, c \in \mathbb{R}, c \neq 0$ и $a^2 + b^2 < c^2$.
5. Нека је f холоморфна на области $D_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ и нека је $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$. Доказати да је за све $z \in D_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 2\}$ испуњено

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=2} \frac{f(w)}{w-z} dw = -f(z).$$