**Комплексна анализа А, М смер**
**Септембар 2, 28.09.2021.**

1. **а)** Испитати диференцјабилност и аналитичност функције $f(z) = z\,\mathrm{Re}\,z$ и израчунати њен извод у тачкама у којима је диференцијабилна.

   б) Ако је $f$ аналитичка функција на неком домену $D$, испитати да ли су и под којим условима функције $|f|$, $\arg f$ и $\log|f|$ хармонијске на $D$.

2. Нека је $p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$ полином степена $n$ и $r > 0$. Одредити вредност интеграла $\int\limits_{|z|=r} z^{n-1}|p(z)|^2 dz$ у зависности од $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ и $r > 0$.

3. Одредити вредност интеграла $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^3 x \cos x}{x^3} dx$.

4. **а)** Пресликавањем $f(z) = \frac{(1+z^3)^2 - i(1-z^3)^2}{(1+z^3)^2 + i(1-z^3)^2}$ пресликати област $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, 0 < \arg z < \frac{\pi}{3}\}$.

   б) Одредити бар једно $1-1$ холоморфно пресликавање којим се $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 2, |z-1| > 1\}$ пресликава на $\{w \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\, w > 0\}$.

5. Нека је $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$ и $f$ холоморфна функција на околини диска $D_r = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < r\}$.

   **а)** Доказати да је $f'(a) = \frac{1}{r\pi} \int\limits_0^{2\pi} u(t) e^{-it} dt$, где је $u(t) = \mathrm{Re}\, f(a + re^{it})$, за $t \in [0, 2\pi]$.

   б) Ако важи $f(a) = 1$ и $u(t) \geq 0$ за све $t \in [0, 2\pi]$, доказати да је $|f'(a)| \leq \frac{2}{r}$.

**Комплексна анализа А, М смер**
**Септембар 2, 28.09.2021.**

1. **а)** Испитати диференцјабилност и аналитичност функције $f(z) = z\,\mathrm{Re}\,z$ и израчунати њен извод у тачкама у којима је диференцијабилна.

   б) Ако је $f$ аналитичка функција на неком домену $D$, испитати да ли су и под којим условима функције $|f|$, $\arg f$ и $\log|f|$ хармонијске на $D$.

2. Нека је $p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$ полином степена $n$ и $r > 0$. Одредити вредност интеграла $\int\limits_{|z|=r} z^{n-1}|p(z)|^2 dz$ у зависности од $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ и $r > 0$.

3. Одредити вредност интеграла $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^3 x \cos x}{x^3} dx$.

4. **а)** Пресликавањем $f(z) = \frac{(1+z^3)^2 - i(1-z^3)^2}{(1+z^3)^2 + i(1-z^3)^2}$ пресликати област $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, 0 < \arg z < \frac{\pi}{3}\}$.

   б) Одредити бар једно $1-1$ холоморфно пресликавање којим се $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 2, |z-1| > 1\}$ пресликава на $\{w \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\, w > 0\}$.

5. Нека је $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$ и $f$ холоморфна функција на околини диска $D_r = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < r\}$.

   **а)** Доказати да је $f'(a) = \frac{1}{r\pi} \int\limits_0^{2\pi} u(t) e^{-it} dt$, где је $u(t) = \mathrm{Re}\, f(a + re^{it})$, за $t \in [0, 2\pi]$.

   б) Ако важи $f(a) = 1$ и $u(t) \geq 0$ за све $t \in [0, 2\pi]$, доказати да је $|f'(a)| \leq \frac{2}{r}$.