Комплексна анализа А, М смер
Јун 2, 05.07.2021.

1. **а)** Користећи Коши-Риманове услове испитати диференцијабилност и аналитичност функције $f(z) = x^2 + iy^2$, где је $z = x + iy$.

   б) Нека је h хармонијска функција на области Ω таква да је и h^2 такође хармонијска на Ω. Доказати да је једна од функција h и $\bar{h}$ аналитичка.

2. Нека је C_n позитивно оријентисана граница квадрата $K = \{z \in \mathbb{C} : |x| < n\pi + \frac{\pi}{2}, |y| < n\pi + \frac{\pi}{2}\}$ и $f(z) = \frac{1}{z^2 \sin z}$. Показати да је $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{C_n} f(z)dz = 0$. Одредити $\int\limits_{C_n} f(z)dz$, а затим доказати да је $\frac{\pi^2}{12} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.

3. У зависности од параметара $m, n \in \mathbb{N}_0$, одредити вредност интеграла $\int\limits_0^{\pi} \cos^{2n} x \cos 2mx dx$.

4. **а)** Одредити билинеарно пресликавање f које слика тачке $4i$ и $2i$ редом у -4 и 0, а диск $\{z \in \mathbb{C} : |z - 4i| < 2\}$ слика на полураван $\{w = u + iv \in \mathbb{C} : v > u\}$.

   б) Добијеним пресликавањем f пресликати област $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z - 4 - 4i| < 2\}$.

   в) Одредити бар једно $1-1$ холоморфно пресликавање којим се $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z > 0\} \setminus \{z \in \mathbb{C} : |z - \frac{5}{4}| \leq 1\}$ пресликава на прстен $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$.

5. Нека су $a, b \in \mathbb{C}$ и нека је $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : \left|z - \frac{a+b}{2}\right| = s + r\}$, где је $|a - b| = 2s,\ s > 0, r > 0$. Ако је f аналитичка функција на области која садржи криву Γ и $M > 0$ тако да је $|f(z)| \leq M$ за $z \in \Gamma$, доказати неједнакости:

$$|f(a) - f(b)| \leq 2M\frac{s}{r^2}(s + r),\ \ |f'(a) - f'(b)| \leq 4M\frac{s(s+r)^2}{r^4}.$$

Комплексна анализа А, М смер
Јун 2, 05.07.2021.

1. **а)** Користећи Коши-Риманове услове испитати диференцијабилност и аналитичност функције $f(z) = x^2 + iy^2$, где је $z = x + iy$.

   б) Нека је h хармонијска функција на области Ω таква да је и h^2 такође хармонијска на Ω. Доказати да је једна од функција h и $\bar{h}$ аналитичка.

2. Нека је C_n позитивно оријентисана граница квадрата $K = \{z \in \mathbb{C} : |x| < n\pi + \frac{\pi}{2}, |y| < n\pi + \frac{\pi}{2}\}$ и $f(z) = \frac{1}{z^2 \sin z}$. Показати да је $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{C_n} f(z)dz = 0$. Одредити $\int\limits_{C_n} f(z)dz$, а затим доказати да је $\frac{\pi^2}{12} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.

3. У зависности од параметара $m, n \in \mathbb{N}_0$, одредити вредност интеграла $\int\limits_0^{\pi} \cos^{2n} x \cos 2mx dx$.

4. **а)** Одредити билинеарно пресликавање f које слика тачке $4i$ и $2i$ редом у -4 и 0, а диск $\{z \in \mathbb{C} : |z - 4i| < 2\}$ слика на полураван $\{w = u + iv \in \mathbb{C} : v > u\}$.

   б) Добијеним пресликавањем f пресликати област $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z - 4 - 4i| < 2\}$.

   в) Одредити бар једно $1-1$ холоморфно пресликавање којим се $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z > 0\} \setminus \{z \in \mathbb{C} : |z - \frac{5}{4}| \leq 1\}$ пресликава на прстен $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$.

5. Нека су $a, b \in \mathbb{C}$ и нека је $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : \left|z - \frac{a+b}{2}\right| = s + r\}$, где је $|a - b| = 2s,\ s > 0, r > 0$. Ако је f аналитичка функција на области која садржи криву Γ и $M > 0$ тако да је $|f(z)| \leq M$ за $z \in \Gamma$, доказати неједнакости:

$$|f(a) - f(b)| \leq 2M\frac{s}{r^2}(s + r),\ \ |f'(a) - f'(b)| \leq 4M\frac{s(s+r)^2}{r^4}.$$