Комплексна анализа А, М смер
Јунски рок, 17.06.2021.

1. **а)** Испитати диференцијабилност и аналитичност функције $f(z) = \sin \bar{z}$.

   б) Нека је f аналитичка функција на области Ω. Ако постоје константе $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ такве да нису обе једнаке 0 и важи $c_1 f(z) + c_2 \overline{f(z)} = 0$ за све $z \in \Omega$, доказати да је f константна функција на Ω.

2. Нека је $f(z) = \frac{z^{2020}}{z^{2021}+z+1}$.

   а) Израчунати $\lim\limits_{R\to+\infty} \int\limits_{|z|=R} (f(z) - \frac{1}{z})dz$.

   б) Користећи део под а) израчунати $\int\limits_{|z|=2} f(z)dz$.

   Криве у интегралима су позитивно оријентисане.

3. У зависности од параметара $a > b > 0$ одредити вредност интеграла $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x}{a+b\cos x}dx$.

4. **а)** Пресликавањем $f(z) = \frac{2z-i}{2+iz}$ пресликати област $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1, \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\}$.

   б) Одредити општи облик билинеарног пресликавања које слика круг $D_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < r_1\}$ на круг $D_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z-b| < r_2\}$, где су $a, b \in \mathbb{C}$ и $r_1, r_2 > 0$.

   в) Одредити бар једно $1-1$ холоморфно пресликавање којим се $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, |z-\frac{1}{4}| > \frac{1}{4}\}$ пресликава на $\{z \in \mathbb{C} : r < |z| < 1\}$, где је $r \in (0,1)$.

5. Нека су f и g аналитичке на ограниченом домену D. Показати да $|f(z)| + |g(z)|$ достиже максимум на граници домена D.

Комплексна анализа А, М смер
Јунски рок, 17.06.2021.

1. **а)** Испитати диференцијабилност и аналитичност функције $f(z) = \sin \bar{z}$.

   б) Нека је f аналитичка функција на области Ω. Ако постоје константе $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ такве да нису обе једнаке 0 и важи $c_1 f(z) + c_2 \overline{f(z)} = 0$ за све $z \in \Omega$, доказати да је f константна функција на Ω.

2. Нека је $f(z) = \frac{z^{2020}}{z^{2021}+z+1}$.

   а) Израчунати $\lim\limits_{R\to+\infty} \int\limits_{|z|=R} (f(z) - \frac{1}{z})dz$.

   б) Користећи део под а) израчунати $\int\limits_{|z|=2} f(z)dz$.

   Криве у интегралима су позитивно оријентисане.

3. У зависности од параметара $a > b > 0$ одредити вредност интеграла $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x}{a+b\cos x}dx$.

4. **а)** Пресликавањем $f(z) = \frac{2z-i}{2+iz}$ пресликати област $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1, \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\}$.

   б) Одредити општи облик билинеарног пресликавања које слика круг $D_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < r_1\}$ на круг $D_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z-b| < r_2\}$, где су $a, b \in \mathbb{C}$ и $r_1, r_2 > 0$.

   в) Одредити бар једно $1-1$ холоморфно пресликавање којим се $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, |z-\frac{1}{4}| > \frac{1}{4}\}$ пресликава на $\{z \in \mathbb{C} : r < |z| < 1\}$, где је $r \in (0,1)$.

5. Нека су f и g аналитичке на ограниченом домену D. Показати да $|f(z)| + |g(z)|$ достиже максимум на граници домена D.