

Квазиконформна пресликавања комплексне равни

ГЕОМЕТРИЈСКИ ПРИСТУП

деф1: Жорданова крива је слика кружнице хомеоморфним пресликавањем.

Теорема 1: Комплексне Жорданове криве γ^c у равни се састоје од 2 дисјунктних домена, од којих сваки има границу c .

деф2: Жорданов домен је ограничен домен чија је граница Жорданова крива.



деф3: Хомеоморфизам $w: \Omega \rightarrow \Omega'$ ($\Omega, \Omega' \subseteq \mathbb{C}$) чува оријентацију ако чува оријентацију границе сваког Жордановог домена D из $\Omega \subseteq \Omega$.

Теорема 2: Ако хомеоморфизам $w: \Omega \rightarrow \Omega'$ има регуларну тачку $z \in \Omega$ из $Jw(z) > 0$, тада w чува оријентацију. Обротно, ако w чува оријентацију онда је Јакобијан $Jw(z) > 0$ за сваку регуларну тачку $z \in \Omega$.

(z је регуларна тачка од w ако је $z \in \text{Int } \Omega$, w је дифер. у z и $Jw(z) \neq 0$)

Риманова теорема: Производна присто повезана област у $\mathbb{C}$ чија граница садржи више од једне тачке, конформно је еквивалентна јединичном диску D .

Каратеодоријева теорема: Ако су Ω и Ω' два Жорданова домена у $\mathbb{C}$ и $f: \Omega \rightarrow \Omega'$ конформно пресликавање. Тада се f може проширити до хомеоморфизма $\tilde{f}: \bar{\Omega} \rightarrow \bar{\Omega}'$.

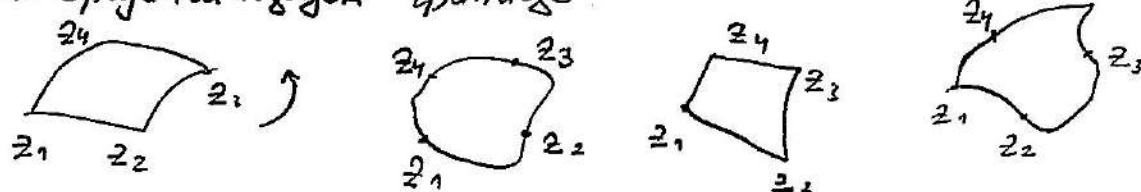
* Жорданов домен је присто повезан!

деф 4: Квадрилатерал се састоји од Жорданови домена Q и 4 различите тачке z_1, z_2, z_3 и z_4 на граници.

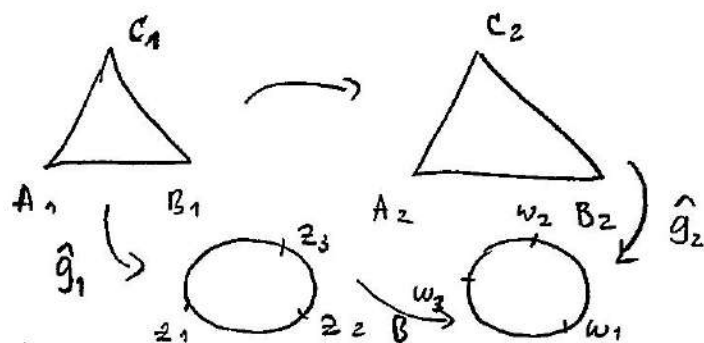
Ознака: $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$

* истражујемо само квадрилатерале чији се низ врхова слање са изабраним оријентацијом границе.

Примери:



① Ако су дата 2 тријугла $\Delta_1^{A_1 B_1 C_1}$ и $\Delta_2^{A_2 B_2 C_2}$, доказати да постоји хомеоморфизам $\hat{f}: \bar{\Delta}_1 \rightarrow \bar{\Delta}_2$ тј. $\hat{f}(A_1) = A_2, \hat{f}(B_1) = B_2, \hat{f}(C_1) = C_2$ и $\hat{f}|_{\Delta_1} = f$ је конформно.



Δ_1 и Δ_2 су Жорданови домени, тј. постоје повезане области, па за њих важе Риманова т. и теорема Каратеодорија.

На основу Риманове теореме постоје g_1 и g_2 конформна преслици.

$g_1: \Delta_1 \rightarrow \mathbb{D}$, $g_2: \Delta_2 \rightarrow \mathbb{D}$, затим постоје њихова проширења на границе $\hat{g}_1: \bar{\Delta}_1 \rightarrow \bar{\mathbb{D}}$ и $\hat{g}_2: \bar{\Delta}_2 \rightarrow \bar{\mathbb{D}}$ (Каратеодори) до хомеоморфизама

Нека је $z_1 = \hat{g}_1(A_1)$, $z_2 = \hat{g}_1(B_1)$ и $z_3 = \hat{g}_1(C_1)$, а затим и $w_1 = \hat{g}_2(A_2)$, $w_2 = \hat{g}_2(B_2)$ и $w_3 = \hat{g}_2(C_2)$

Означимо $\hat{g}_1(\Delta_1) = D_1$ и $\hat{g}_2(\Delta_2) = D_2$

Постоји бијектно пресликавање $B: D_1 \rightarrow D_2$ тј. $B(z_1) = w_1, B(z_2) = w_2$ и $B(z_3) = w_3$. (КАА)

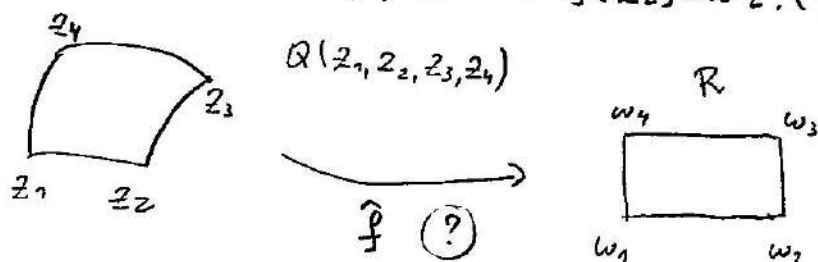
(Влика ∂D_1 у ∂D_2 , да ш и D_1 слика на D_2 ?)

Ако В нева оријентацију морамо та додатно комбиновати са пресликавањем $\frac{1}{z}$. Закле, можемо водити да $B(D_1) = D_2$)

$$\hat{f} = \hat{g}_2^{-1} \circ B \circ \hat{g}_1 \text{ слика } \bar{D}_1 \text{ на } \bar{D}_2 \text{ итд. важи истражено!}$$

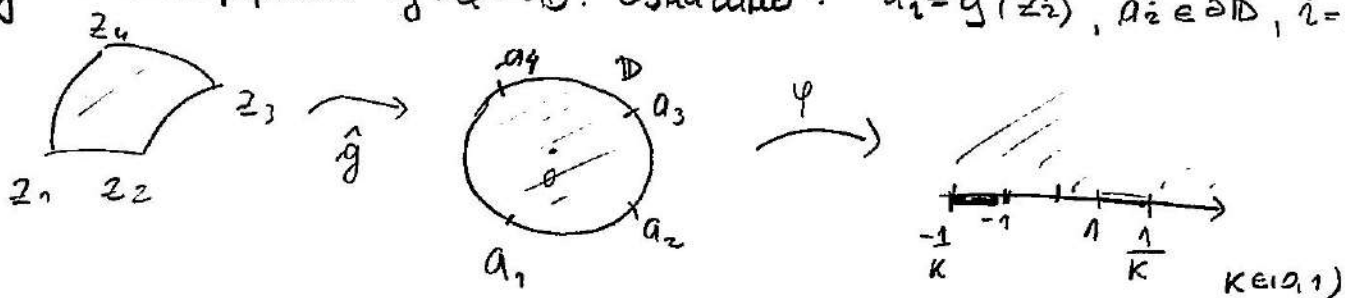
② Показати да за сваки квадрантисрал $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$ постоји пресликавање f на $\mathbb{R}$ ^{нечи} правоугаоник R , са шеменима w_1, w_2, w_3 и w_4 итд.

је $f: Q \rightarrow R$ конформно и $\hat{f}(z_i) = w_i$. ($\hat{f}: \bar{Q} \rightarrow \bar{R}$ хомеоморфизам у складу са теоремом Каратеодорија)
(w_i нису унутре задати тачке, зависе од Q)



Q је просто повезан, иа на основу Рунанове постоји $g: Q \rightarrow \mathbb{D}$ (Жорданов је домет, граница садржи ∞ тачака)

конформно и на основу Каратеодоријевог теореме се проширивати до хомеоморфизма $\hat{g}: \bar{Q} \rightarrow \bar{\mathbb{D}}$. Означимо: $a_i = \hat{g}(z_i)$, $a_i \in \partial \mathbb{D}$, $i=1,2,3,4$



$$w \rightarrow \begin{array}{c} \text{Diagram of a rectangle } R' \text{ in the } w\text{-plane with vertices } -K, K, K+iK'. \\ w(z) = \int_0^z \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}} \\ K = w(1) = \int_0^1 \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}} \\ K+iK' = w\left(\frac{1}{k}\right) = \int_0^{1/k} \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}} \end{array}$$

φ слика $\mathbb{D}$ на H итд.

$$\hat{\varphi}(a_1) = -\frac{1}{k}, \hat{\varphi}(a_2) = -1$$

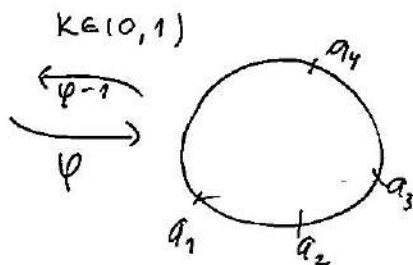
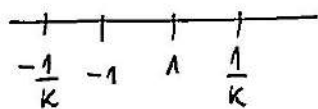
$$\hat{\varphi}(a_3) = 1, \hat{\varphi}(a_4) = \frac{1}{k}$$

(иако $\hat{\varphi}$ постоји, доказателом у наставку *)

$$-K = w(-1)$$

$$-K+iK' = w\left(-\frac{1}{k}\right)$$

⊗



(конформно пресликавање
чува оријентацију
јер је $Jf = |f_z|^2 > 0$
($\forall z \neq 0$)

← зато је овај распоред
такака!

$$\varphi(-\frac{1}{k}) = a_1$$

$$\varphi(-1) = a_2$$

$$\varphi(1) = a_3$$

$$\varphi(\frac{1}{k}) = a_4$$

φ треба да чува джоразмену (јер је билинеарно)

Закле, треба да важи:

$$[-\frac{1}{k}, -1; 1, \frac{1}{k}] = [a_1, a_2, a_3, a_4]$$

Изберимо k так да важи ова једнакост? $\varphi(z)$ ће онда бити дат

сл. једн: $[\varphi(z), a_1, a_2, a_3] = [z, -\frac{1}{k}; -1, 1]$.

Још одабира k треба изабрати так да торња поуграбан
слика на $\mathbb{D}$ (умесно доње)?

$$A = [a_1, a_2, a_3, a_4] = \frac{-\frac{1}{k} - 1}{-\frac{1}{k} - \frac{1}{k}} = \frac{-1 - 1}{-1 - \frac{1}{k}} = \frac{-1 - k}{-2} = \frac{-2k}{-k - 1}$$

$$= \frac{(k+1)^2}{4k}$$

$A \in \mathbb{R}$ јер a_1, a_2, a_3 и a_4 припадају кружници

$$(k+1)^2 = 4kA$$

$$k^2 + 2k - 4kA + 1 = 0$$

$$k^2 + 2k(1 - 2A) + 1 = 0$$

$$k_{1,2} = \frac{-2(1-2A) \pm \sqrt{4(1-2A)^2 - 4}}{2} = 2A - 1 \pm \sqrt{4A^2 - 4A}$$

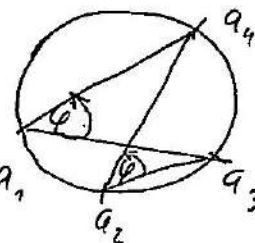
$$\left. \begin{aligned} k_1 &= 2A - 1 + 2\sqrt{A(A-1)} \\ k_2 &= 2A - 1 - 2\sqrt{A(A-1)} \end{aligned} \right\} \text{изберем се око } k > 0$$

које је $\varphi(\mathbb{H}) = \mathbb{D}$?

↓ то је $k_2, k_2 \in (0, 1)$!

Још оправдати зашто је $A > 1$? ($k \in (0, 1)$, $k \in \mathbb{R}$)

$$A = [a_1, a_2, a_3, a_4] = \frac{a_1 - a_3}{a_1 - a_4} : \frac{a_2 - a_3}{a_2 - a_4}$$



због редоследа ипак као на слици

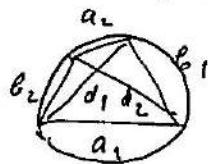
$$\text{је} \quad \frac{a_3 - a_1}{a_4 - a_1} = \left| \frac{a_3 - a_1}{a_4 - a_1} \right| e^{-i\varphi}$$

$$\frac{a_3 - a_2}{a_4 - a_2} = \left| \frac{a_3 - a_2}{a_4 - a_2} \right| e^{-i\varphi}$$

$$\Rightarrow A = \frac{|a_1 - a_3|}{|a_1 - a_4|} \cdot \frac{|a_2 - a_4|}{|a_2 - a_3|} > 1$$

$$\underbrace{|a_1 - a_3| \cdot |a_2 - a_4|}_{\text{производ жуа до краја}} > \underbrace{|a_1 - a_4| \cdot |a_2 - a_3|}_{\text{производ на страници крајнице}} \quad \checkmark$$

(важни: $d_1 \cdot d_2 = a_1 a_2 + b_1 b_2$ за шестовики келбругаос)



- ω је задато преко елиптичких интеграла
(погледајте Ahlfors - complex ANALYSIS)

227-232

ω је конформно на $\mathbb{H}$

(0 елиптичких интеграла: Conformal Invariants,
Inequalities and Quasiconformal
Maps

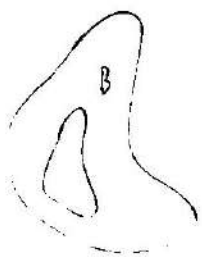
CHAPTER 6 (108 страна)

* Сваки квадрилатерал се може конформно пресликавати на неки правоугаони.
(задајак). Тај правоугаоник називамо канонски правоугаоник.

Модул квадрилатерала се може дефинисати као количник страница канонског правоугаоника. ($M(Q) = \frac{a}{b}$)

* Сваки двоструко повезан домен (ПРСТЕН ДОМЕН, ТОПОЛОШКИ ПРСТЕН) се може конформно пресликавати на неки прстен, називамо га канонски прстен.

Модул прстена домена можемо дефинисати као модул његовог канонског прстена.



Двоструко повезан домен $\Leftrightarrow$ $\mathbb{C}$ има 2 координатне повезаности

* γ ^{пречи} преходној γ је квазиконформно пресликавање једно у другом регуларно квазиконформно (C^1 дифеоморфизам).

* Геометријска дефиниција квазиконформног пресликавања: (не мора бити регуларно сада)

Хомеоморфизам $w: G \rightarrow G'$ који чува оријентацију на

домену G се назива квазиконформно пр. ако је његова

максимална дилатација $K(G) = \sup_{Q \in G} \frac{M(w(Q))}{M(Q)}$ коначна, где је

$\sup$ узет по свим квадрилатералима из G . (кв. ако је $K(G) \leq K$)

* Аналитичка дефиниција еквивалентна са геометријском (када не захтевамо регуларност)

Хомеоморфизам $w: G \rightarrow G'$ који чува оријентацију на

домену G се назива K -квазиконформно пр. ако

1) w је апсолутно непрекидно наменијана (АСБ)

2) за свако $z \in G$ важи $Df(z) \leq K$.