

Квазиконформна пресликавка,

* Нека је $f \in C^1$ дифеоморфизам на области $\Omega \subset \mathbb{C}$ тако да чува оријентацију, тј. $J_f > 0$ на Ω . ($J_f(z) = |f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2$ - провера рачуном)

Занима нас df

$$f = u + iv \quad df = du + i dv$$

$$df(z) = \begin{bmatrix} u_x(z) & u_y(z) \\ v_x(z) & v_y(z) \end{bmatrix}$$

$$du = u_x dx + u_y dy$$

$$dv = v_x dx + v_y dy$$

$$df = f_z dz + f_{\bar{z}} d\bar{z} = f_x dx + f_y dy, \text{ где } f_z = \frac{1}{2}(f_x - if_y), f_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(f_x + if_y)$$

(провера се ради линеарношћу:

$$f_z dz + f_{\bar{z}} d\bar{z} = \frac{1}{2}(f_x - if_y)(dx + idy) + \frac{1}{2}(f_x + if_y)(dx - idy) = \dots)$$

Напомена:

$$dx: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$dy: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$dz: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$dx(z) = \operatorname{Re} z$$

$$dy(z) = \operatorname{Im} z$$

$$dz(z) = z = dx(z) + i dy(z)$$

Препознато је да $z = x + iy$

$$\text{такође: } d\bar{z} = d(x - iy) = dx - idy = \overline{dz}$$

$$dz = dx + idy$$

$$\text{тј. } d\bar{z}(z) = \bar{z} \quad (\text{пошто монголи имамо } x, y \in \mathbb{C} \text{ уместо } z)$$

$$dx(h) = \operatorname{Re} h, dy(h) = \operatorname{Im} h, dz(h) = h, d\bar{z}(h) = \bar{h}$$

$$\text{важи: } df(z)h = (f_z dz + f_{\bar{z}} d\bar{z})h = f_z dz(h) + f_{\bar{z}} d\bar{z}(h) = f_z h + f_{\bar{z}} \bar{h}$$

* Занимају нас искази f је f -у ком правцу је највеће, а у ком најмање?

(Пошто је f конформно пресликавање мислимо уједнако у свим правцима - још увијек дојде конформно пресликавање)

Извођу у правцу вектора u коим број $e^{i\alpha}$ (правцу u да α)

$$\partial_\alpha f(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z + h e^{i\alpha}) - f(z)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{df(z) h e^{i\alpha} + o(h)}{h} = df(z) e^{i\alpha}$$

$$\partial_\alpha f(z) = (f_z e^{i\alpha} + f_{\bar{z}} e^{-i\alpha})/2 = f_z/2 e^{i\alpha} + f_{\bar{z}}/2 e^{-i\alpha}$$

$$|f_z(z)| - |f_{\bar{z}}(z)| \leq |\partial_\alpha f(z)| \leq |f_z(z)| + |f_{\bar{z}}(z)|, \text{ где } J_f > 0 \text{ је } |f_z| > |f_{\bar{z}}|$$

* Замисли нас за које α се доистини једнакости у претп. неј?

$$|f_z| - |f_{\bar{z}}| \leq |\alpha f| \leq |f_z| + |f_{\bar{z}}|$$

$$\text{" } f_z e^{i\alpha} + f_{\bar{z}} e^{-i\alpha}$$

$$|a+b| = |a|+|b| \text{ за } b=\lambda a, \lambda > 0 \quad (\text{провера рачуници}) \quad (\lambda = e^{i \cdot 2k\pi})$$

$$|a+b| = |a|-|b| \text{ за } b=\lambda a, \lambda < 0 \quad (\lambda = e^{i(2k\pi+\pi)})$$

$$\text{ког нас } a = f_z e^{i\alpha}, b = f_{\bar{z}} e^{-i\alpha}$$

$$\max: f_{\bar{z}} e^{-i\alpha} = e^{i2k\pi} \cdot f_z e^{i\alpha}$$

$$\frac{f_{\bar{z}}}{f_z} = e^{i(2\alpha+2k\pi)} \Rightarrow \arg \frac{f_{\bar{z}}}{f_z} = 2\alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\boxed{\alpha_1 = \frac{1}{2} \arg \frac{f_{\bar{z}}}{f_z} - k\pi, k \in \mathbb{Z}}$$

$$\min: f_{\bar{z}} e^{-i\alpha} = e^{i\pi} f_z e^{i\alpha} \cdot e^{i2k\pi}$$

$$\frac{f_{\bar{z}}}{f_z} = e^{i(2\alpha+\pi+2k\pi)} \Rightarrow \arg \frac{f_{\bar{z}}}{f_z} = 2\alpha + \pi + 2k\pi$$

$$\boxed{\alpha_2 = \frac{1}{2} \arg \frac{f_{\bar{z}}}{f_z} + \frac{\pi}{2} - k\pi, k \in \mathbb{Z}}$$

$$\boxed{\mu_f := \frac{f_{\bar{z}}}{f_z} \text{ комплексна дилатација}}$$

max излаже у правцу $\alpha_1 = \frac{1}{2} \arg \mu_f$, min у правцу $\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{\pi}{2}$

означимо $\lambda_f = |f_z| + |f_{\bar{z}}|$, $\lambda_f = |f_z| - |f_{\bar{z}}|$

$$D_f = \frac{\lambda_f}{\lambda_f} = \frac{|f_z| + |f_{\bar{z}}|}{|f_z| - |f_{\bar{z}}|} \text{ максимална дилатација}$$

$$J_f = (|f_z| + |f_{\bar{z}}|) \cdot (|f_z| - |f_{\bar{z}}|) \quad (\text{сегамо се})$$

* Још пита се сликају криве у тангентној равни?

$df(z): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ (показује у тангентној равни, иста рачуна)

$$df(z)(h) = h' \quad h = (h_1, h_2), h' = (h'_1, h'_2)$$

Нека је $df(z) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = J$

$$J^{-1} = \frac{1}{\det J} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}, \quad \det J = J_f$$

$$(h_1, h_2) = df^{-1}(z) \cdot (h'_1, h'_2)$$

$$(h_1, h_2) = \frac{1}{J_f} \cdot \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h'_1 \\ h'_2 \end{bmatrix} = \left(\frac{a_{22}h'_1 - a_{12}h'_2}{J_f}, \frac{-a_{21}h'_1 + a_{11}h'_2}{J_f} \right)$$

Како се слика круг?

$$h_1^2 + h_2^2 = 1 \Rightarrow \frac{1}{J_f^2} \left((a_{22}h'_1 - a_{12}h'_2)^2 + (-a_{21}h'_1 + a_{11}h'_2)^2 \right) = 1$$

одавде се добија једначина елипсе!

$$Ah_1'^2 + Bh_2'^2 = 1 \quad (\text{после ротације})$$

Закле, df слика кружнице у елипсе!

($J_f > 0$, или ипак $J_f \neq 0$)

(f с'гиф. који чува оријентацију)

* Који правац у до-равни одговара правцу угла $\alpha = \frac{1}{2} \arg \mu_f$?

$$df(z)(e^{i\alpha}) = f_z e^{i\alpha} + \bar{f}_z e^{-i\alpha} = f_z e^{i\alpha} (1 + \mu_f e^{-2i\alpha})$$

$$= f_z e^{i\alpha} (1 + |\mu_f| e^{i \arg \mu_f} e^{-2i \frac{1}{2} \arg \mu_f}) = f_z e^{i\alpha} (1 + |\mu_f|)$$

$$f_z e^{i\alpha} = |f_z| e^{i\beta} = |f_z| e^{i(\arg f_z + \alpha)}$$

$$\Rightarrow \beta = \arg f_z + \alpha + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (*)$$

$$\beta = \arg f_z + \frac{1}{2} \arg \frac{\bar{f}_z}{f_z} + 2k\pi$$

$$\beta = \frac{1}{2} \arg f_z + \frac{1}{2} \arg f_z + 2k\pi$$

$$\beta = \frac{1}{2} \arg (\underbrace{f_z \cdot \bar{f}_z}_{|f_z|^2}) + 2k\pi \quad (\text{једнакост до } k \in \mathbb{Z})$$

$$\beta = \frac{1}{2} \arg \left(\frac{\bar{f}_z}{f_z} |f_z|^2 \right) + 2k\pi$$

$$\beta = \frac{1}{2} \arg \left(\frac{\bar{f}_z}{f_z} \right) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Зв. $k=0$ (изабрало један)

$$\boxed{\beta = \frac{1}{2} \arg \frac{\bar{f}_z}{f_z}}$$

$$\boxed{\gamma = \frac{\bar{f}_z}{f_z}}$$

Зрета комплексна
длаштацја?

! Травау који одговара максималној истезању у
 $d\omega$ равни је онај који одговара углу $\beta = \frac{1}{2} \arg \gamma_f$,
 где је $\gamma_f = \frac{f_z}{f_{\bar{z}}}$ друга комплексна дилатација.

Травау минималној истезања је $\beta + \frac{\pi}{2}$.

Приметимо: $\beta - \alpha = \arg f_z$ (из *)

дефиниција: Нека је f C^1 дифеоморфизам који чува
 оријентацију ($J > 0$), $f: \Omega \rightarrow \Omega'$, $\Omega, \Omega' \subseteq \mathbb{C}$ области.

Ако је $Df(z) = \frac{|f_z(z)| + |f_{\bar{z}}(z)|}{|f_z(z)| - |f_{\bar{z}}(z)|}$ ограничено на Ω ,
 кажемо да је f регуларно квазиконформно на Ω .

Ако је $Df(z) \leq K$ на Ω , онда кажемо да је f
 K -квазиконформно.

↓ због одређене диференцијабилности
 (постоји и алгебра деформација)

Напомена:

$$1) \quad \mu_f = \frac{f_{\bar{z}}}{f_z}, \quad Df = \frac{1 + |\mu_f|}{1 - |\mu_f|}$$

$$Df \leq K \Leftrightarrow \frac{1 + |\mu_f|}{1 - |\mu_f|} \leq K \Leftrightarrow 1 + |\mu_f| \leq K - K|\mu_f|$$

$$\Leftrightarrow |\mu_f|(1+K) \leq K-1$$

$$\Leftrightarrow |\mu_f| \leq \frac{K-1}{K+1} = k < 1$$

$$K \geq 1$$

за $K=1$ је јресимкабане конформно

(тада је $|f_{\bar{z}}| = 0$ и) $f_{\bar{z}} = 0$

иа је f холоморфна хомеом.
 и) конформно

2) $d\omega(z)$ слика кружнице у елипсе иау велика
 и мала полуоса $\lambda(z) = |f_z(z)| + |f_{\bar{z}}(z)|$ и

$\lambda(z) = |f_z(z)| - |f_{\bar{z}}(z)|$ и травау велике полуосе

је $d\omega$ равни је одређен са $\alpha = \frac{1}{2} \arg \mu_f$, а у $d\omega$ равни

са $\beta = \frac{1}{2} \arg \gamma_f$, јоу травау мале полуосе нормални
 са $\beta + \frac{\pi}{2}$