

Примери квазиконформних пресликавања:

① Нека је $f(z) = z \cdot |z|^{2p}$. Одредити $Df(z)$. За које $p \in \mathbb{R}$ је f квазиконформно на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$?

$$Df(z) = \frac{|fz| + |f\bar{z}|}{|fz| - |f\bar{z}|}$$

(f дефинисана на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$) Шта је когационг шаг?

$$fz = \frac{1}{2}(fx - ify), f\bar{z} = \frac{1}{2}(fx + ify)$$

$$f(z) = z \cdot |z|^{2p} = (x+iy)(x^2+y^2)^p, z = x+iy$$

$$= x \cdot (x^2+y^2)^p + iy \cdot (x^2+y^2)^p$$

$$fx = (x^2+y^2)^p + iy \cdot p(x^2+y^2)^{p-1} \cdot 2x$$

$$fy = x \cdot p(x^2+y^2)^{p-1} \cdot 2y + i(x^2+y^2)^p + iy \cdot p(x^2+y^2)^{p-1} \cdot 2y$$

$$fx = (x^2+y^2)^{p-1} (x^2+y^2 + 2pizxy + 2px^2)$$

$$fy = (x^2+y^2)^{p-1} (2pxy + i(x^2+y^2) + 2ip y^2)$$

$$if_y = (x^2+y^2)^{p-1} (-x^2-y^2 + 2pizxy - 2py^2)$$

$$fz = \frac{1}{2}(fx - if_y) = \frac{1}{2} (2(x^2+y^2) + 2p(x^2+y^2)) (x^2+y^2)^{p-1} = (x^2+y^2)^p \cdot (p+1)$$

$$f\bar{z} = \frac{1}{2}(fx + if_y) = \frac{1}{2} (4pizxy + 2p(x^2-y^2)) (x^2+y^2)^{p-1} = p \cdot (x^2+y^2)^{p-1} (x+iy)^2$$

$$\Rightarrow \mu_f = \frac{f\bar{z}}{fz} = \frac{p(x+iy)^2}{(p+1)(x^2+y^2)} \Rightarrow |\mu_f| = \left| \frac{p}{p+1} \right| \quad p \neq -1$$

За $p=0$ је $f\bar{z}=0$ па је $f(z)=z$ конформно.

$$|fz| > |f\bar{z}| \Leftrightarrow |p+1| > |p|$$

За $p > 0$ је $p+1 > p$ ✓

За $p < 0$: $p \in (-1, 0)$: $p+1 > -p$
 $2p > -1$
 $p > -\frac{1}{2}$

$p \leq -1$: $-p-1 > -p$
 $0 > 1$ ✗

Закле за $p > -\frac{1}{2}$ је f мува оријентацију!

Напомена: држи рачун

$$f(z) = z \cdot (z\bar{z})^p = z^{p+1} \bar{z}^p$$

$$\left. \begin{aligned} fz &= (p+1)z^p \bar{z}^p \\ f\bar{z} &= p\bar{z}^{p-1} z^{p+1} \end{aligned} \right\} \Delta$$

$$D_f = \frac{1+|M_f|}{1-|M_f|} = \frac{|p+1|+|p|}{|p+1|-|p|}$$

$$\begin{cases} \text{за } p \in (-\frac{1}{2}, 0) \text{ је } D_f(z) = \frac{p+1-p}{p+1+p} = \frac{1}{2p+1} > 1 \\ \text{за } p = 0 \text{ је } D_f(z) = 1 \\ \text{за } p > 0 \text{ је } D_f(z) = \frac{p+1+p}{p+1-p} = 2p+1 > 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2p+1 \in (0, 1) \\ \frac{1}{2p+1} \in (1, +\infty) \end{cases}$$

K > 1:

$$K = 2p+1 : p = \frac{K-1}{2} \text{ пресликавање } f(z) = z \cdot |z|^{K-1} \text{ је } K\text{-квазиконф.}$$

$$K = \frac{1}{2p+1} : p = \left(\frac{1}{K}-1\right)\frac{1}{2} \text{ пресликавање } f(z) = z|z|^{\frac{1}{K}-1} \text{ је } K\text{-квазиконф.}$$

f је конформно за $p=0$ и $f(z)=z$

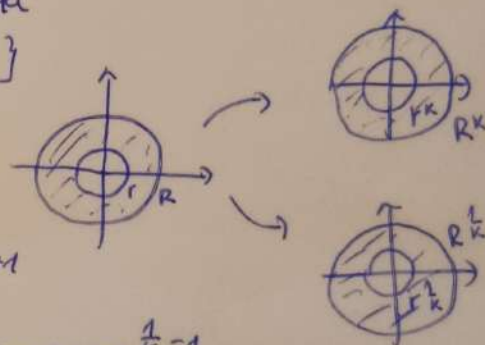
Напомена: f слика прстен $P_1 = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$ на

прстен $P_2 = \{w \in \mathbb{C} : r^{2p+1} < |w| < R^{2p+1}\}$

$$z = \rho e^{i\varphi}$$

$$f(z) = \rho e^{i\varphi} / \rho e^{i\varphi}^{2p} = \rho^{2p+1} e^{i\varphi}$$

свака $|z| = \rho$ се слика на $|w| = \rho^{2p+1}$



Закле, пресликавање $f(z) = z|z|^{K-1}$ и $f(z) = z|z|^{\frac{1}{K}-1}$

сликају P_1 K -квазиконформно на $P_2 = \{w \in \mathbb{C} : r^K < |w| < R^K\}$ односно на $P_2 = \{w \in \mathbb{C} : r^{\frac{1}{K}} < |w| < R^{\frac{1}{K}}\}$.

② Нека је $f(z) = z + p \cdot \operatorname{Re} z$, $p \in \mathbb{R}$. За које p је f квазиконформно?

Наћи D_f и слику правоугаоника $R(0, a, a+ib, ib)$, $a, b \in \mathbb{R}^+$ при пресликавању f .

$$f(z) = z + p \operatorname{Re} z = x + iy + p x = (1+p)x + iy, \quad z = x + iy$$

$$D_f = \frac{1+|M_f|}{1-|M_f|}$$

$$M_f = \frac{f_{\bar{z}}}{f_z}$$

квазиконформно: $|f_z| > |f_{\bar{z}}|$ (чува оријентацију)

Гривершиј: f хомеоморф.

$$f^{-1}(w) = \frac{w}{1+p} + i \frac{p}{1+p} \operatorname{Im} w$$

$$f_x = 1+p$$

$$f_z = \frac{1}{2}(f_x - i f_y) = \frac{1}{2}(2+p) = 1 + \frac{p}{2}$$

$$f_y = i$$

$$f_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(f_x + i f_y) = \frac{1}{2}(1+p-i) = \frac{p}{2}$$

$$i f_y = -1$$

II Начин (брже)

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}$$

$$f(z) = z + \frac{p}{2} z + \frac{p}{2} \bar{z}$$

$$f_z = 1 + \frac{p}{2}, \quad f_{\bar{z}} = \frac{p}{2}$$

$$M_f = \frac{p}{p+2}, p \neq -2$$

$$|fz| > |f\bar{z}| \Leftrightarrow |p+2| > |p|$$

$$\text{за } p > 0 \quad p+2 > p$$

$$\text{за } p \in (-2, 0) \quad p+2 > -p$$

$$2p > -2$$

$$p > -1$$

$$\text{за } p < -2 \quad -p-2 > -p$$

$$-2 > 0 \quad \text{?}$$

$$D_f = \frac{1+|M_f|}{1-|M_f|} = \frac{|p+2|+|p|}{|p+2|-|p|}$$

$$\text{за } p > 0 \text{ је } D_f = \frac{p+2+p}{p+2-p} = p+1$$

$$\text{за } p \in (-1, 0) \text{ је } D_f = \frac{p+2-p}{p+2+p} = \frac{1}{p+1}$$

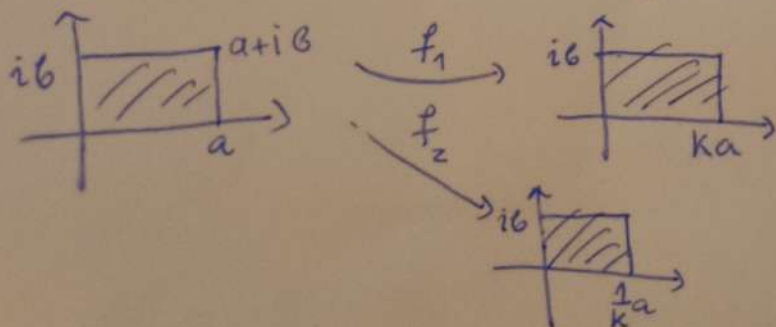
$$\text{за } p = 0 \text{ је } D_f = 1 \text{ (конформно)}$$

$$\text{за } k = p+1 > 1 : D_f = k \quad f \text{ је } k\text{-кватиконформно}$$

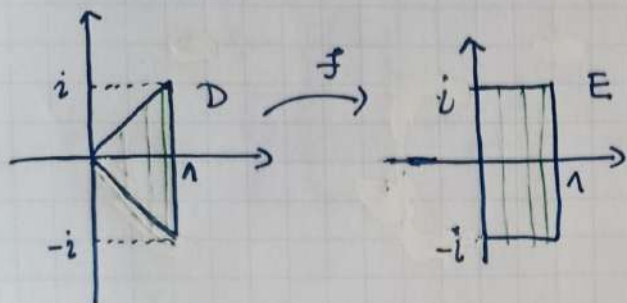
$$f(z) = kx + iy, \quad z = x + iy$$

$$\text{за } k = \frac{1}{p+1} > 1 : D_f = k \quad f \text{ је } k\text{-кватиконформно}$$

$$f(z) = \frac{1}{k}x + iy, \quad z = x + iy$$



Нека је $D = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < 1, -\operatorname{Re} z < \operatorname{Im} z < \operatorname{Re} z\}$ и нека је $E = \{\omega \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} \omega < 1, -1 < \operatorname{Im} \omega < 1\}$. Показати да је f ја $f: D \rightarrow E$ дата са $f(z) = \operatorname{Re} z + i \cdot \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}$ дифеоморфизам, али да није квазиконформно преликавање.



$$f(z) = x + i \cdot \frac{y}{x}, \quad z = x + iy$$

$$u(x, y) = x$$

$$v(x, y) = \frac{y}{x}$$

$$u_x = 1, \quad u_y = 0, \quad v_x = -\frac{y}{x^2}, \quad v_y = \frac{1}{x}$$

$\exists u_x, u_y$ непрекинути на D

$\Rightarrow u$ је диференцијабилна на D

$\exists v_x, v_y$ непрекинути на D

$\Rightarrow v$ је диф. на D

Закле, онда је и f диференцијабилна на D

u и v су класе C^1 , па је и f !

$$df(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{bmatrix}$$

Нађимо f^{-1} :

$$\omega = f(z) = x + i \frac{y}{x}$$

$$\omega = u + iv$$

$$u = x, \quad v = \frac{y}{x}$$

$$x = u, \quad y = uv$$

$$f^{-1}(\omega) = u + iuv, \quad \omega = u + iv$$

$$X(u, v) = u$$

$$Y(u, v) = uv$$

$$X_u = 1, \quad X_v = 0$$

$$Y_u = v, \quad Y_v = u$$

$\left. \begin{array}{l} \exists X_u, X_v \text{ непр. на } E \Rightarrow X \text{ је диф. на } E \\ \exists Y_u, Y_v \text{ непр. на } E \Rightarrow Y \text{ је диф. на } E \end{array} \right\} \Rightarrow f^{-1} \text{ је диференц. на } E$

X, Y класе C^1

$\Rightarrow f^{-1}$ класе C^1

$$df^{-1}(u, v) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ v & u \end{bmatrix}$$

Закле, f је дифеоморфизам.

$$Df(z) = \frac{|fz| + |f\bar{z}|}{|fz| - |f\bar{z}|}$$

$$\begin{aligned} fz &= \frac{1}{2}(f_x - if_y) = \frac{1}{2}\left(1 - i \frac{y}{x^2} - i\left(\frac{i}{x}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - i \frac{y}{x^2} + \frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

$$f\bar{z} = \frac{1}{2}(f_x + if_y) = \frac{1}{2}\left(1 - i \frac{y}{x^2} - \frac{1}{x}\right)$$

$$|f_z| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(\frac{y}{x^2}\right)^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{(x+1)^2}{x^2} + \frac{y^2}{x^4}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{x^2(x+1)^2 + y^2}{x^4}}$$

$$|f_{\bar{z}}| = \frac{1}{2} \sqrt{\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 + \left(\frac{y}{x^2}\right)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(x-1)^2}{x^2} + \frac{y^2}{x^4}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x^2(x-1)^2 + y^2}{x^4}}$$

$$D_f(z) = \frac{1 + \left|\frac{f_{\bar{z}}}{f_z}\right|}{1 - \left|\frac{f_{\bar{z}}}{f_z}\right|}$$

$$\left|\frac{f_{\bar{z}}}{f_z}\right| = \frac{|f_{\bar{z}}|}{|f_z|} = \frac{\sqrt{x^2(x-1)^2 + y^2}}{\sqrt{x^2(x+1)^2 + y^2}}$$

за $y=0$ је $\left|\frac{f_{\bar{z}}}{f_z}\right| = \left|\frac{x-1}{x+1}\right|$

$$D_f(x,0) = \frac{1 + \left|\frac{x-1}{x+1}\right|}{1 - \left|\frac{x-1}{x+1}\right|} = \frac{|x+1| + |x-1|}{|x+1| - |x-1|}$$

$$0 < x < 1 \quad x-1 < 0$$

$$D_f(x,0) = \frac{x+1+1-x}{x+1-1+x} = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x}$$

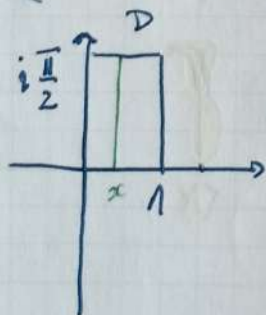
за x „мало“ је $D_f(x,0)$ „велико“!

$\lim_{x \rightarrow 0^+} D_f(x,0) = \infty$ па је D_f неограничено на D

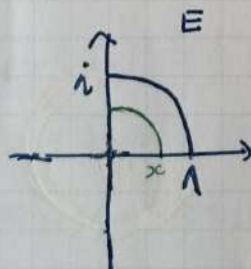
$\Rightarrow f$ није квазиконформно.

(2) Нека је $D = \{z = x+iy : 0 < x < 1, 0 < y < \frac{\pi}{2}\}$ и нека је $f: D \rightarrow E$ гана са $E = \{w = u+iv : 0 < u^2 + v^2 < 1\}$. Показати да је f ја $f(z) = x \cdot e^{iz}$

(где $z = x+iy$) дифеоморфизам, али да није квазиконформно.



f



$$E = D \setminus \{0\}$$

$$f(z) = x \cos y + x \cdot \sin y \cdot i$$

$$|f(z)| = x$$

$$f(z) = u+iv \quad u(x,y) = x \cos y, \quad v(x,y) = x \sin y$$

$$u_x = \cos y, \quad u_y = -x \sin y, \quad v_x = \sin y, \quad v_y = x \cos y$$

u_x, u_y, v_x, v_y неуп на $D \Rightarrow f$ је гиф на D

$$df(x,y) = \begin{bmatrix} \cos y & -x \sin y \\ \sin y & x \cos y \end{bmatrix}$$

$$f^{-1}(w) = z = x + iy$$

$$w = u + iv$$

$$u^2 + v^2 = x^2$$

$$x = \sqrt{u^2 + v^2}$$

$$\frac{v}{u} = \tan y$$

$$y = \arctan \frac{v}{u} \text{ jer } \frac{u}{v} > 0, y \in (0, \frac{\pi}{2})$$

$$\Rightarrow f^{-1}(u, v) = \sqrt{u^2 + v^2} + i \cdot \arctan \frac{v}{u}$$

$$X(u, v) = \sqrt{u^2 + v^2}$$

$$X_u = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}} \cdot 2u = \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}$$

$$Y(u, v) = \arctan \frac{v}{u}$$

$$Y_u = \frac{1}{1 + \frac{v^2}{u^2}} \cdot \frac{-v}{u^2} = \frac{-v}{u^2 + v^2}$$

$$X_v = \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}, Y_v = \frac{1}{1 + \frac{v^2}{u^2}} \cdot \frac{1}{u} = \frac{u}{u^2 + v^2}$$

X_u, X_v, Y_u, Y_v нпр на E

$\Rightarrow f^{-1}$ је глф. на E

$$df^{-1}(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} & \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} \\ \frac{-v}{u^2 + v^2} & \frac{u}{u^2 + v^2} \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow f$ је дифеоморфизам

$$Df(z) = \frac{|fz| + |f\bar{z}|}{|fz| - |f\bar{z}|} = \frac{1 + |M_f|}{1 - |M_f|}, M_f = \frac{f\bar{z}}{fz}$$

$$fz = \frac{1}{2}(f_x - if_y) = \frac{1}{2}(\cos y + i \sin y - i(-x \sin y + ix \cos y))$$

$$= \frac{1}{2}(\cos y + i \sin y + ix \sin y + x \cos y)$$

$$= \frac{1}{2}(\cos y(1+x) + i(1+x) \sin y) = \frac{1}{2}(1+x)e^{iy}$$

$$f\bar{z} = \frac{1}{2}(f_x + if_y) = \frac{1}{2}(\cos y + i \sin y - ix \sin y - x \cos y)$$

$$= \frac{1}{2}(1-x)e^{iy}$$

$$\Rightarrow M_f = \frac{1-x}{1+x} \quad |M_f| = \frac{1-x}{1+x} \text{ jer } x < 1$$

$$\Rightarrow Df = \frac{1 + \frac{1-x}{1+x}}{1 - \frac{1-x}{1+x}} = \frac{x+1+1-x}{x+1-1+x} = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x}$$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} Df(x) = \infty$

$\Rightarrow f$ није
коаконтинуу