

1. Дата је функција $f(x) = \ln \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$.

а) Испитати конвергенцију интеграла $\int_0^1 f(x)dx$ и $\int_1^{+\infty} f(x)dx$.

б) Испитати апсолутну и условну конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f(n)$.

2. У зависности од реалних параметара α и β испитати конвергенцију следећег интеграла

$$\int_0^1 \frac{|\log(x)|^\alpha}{(\sin \pi x)^\beta} dx.$$

3. Нека је $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nx}{\sin^2 x} dx$ и $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} dx, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

а) Доказати да је $I_n - I_{n-1} = J_{n-1}, n \geq 1$.

б) Доказати да је $J_n = c$, за неко $c \in \mathbb{R}$.

в) Наћи I_n .

г) У зависности од реалног параметра $\alpha > 0$, испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi\sqrt{n^2+1})}{I_n^\alpha}$.

4. а) Доказати да за свако $n \in \mathbb{N}, n > 1$ и $\alpha > 0$ важи

$$\frac{1}{n^{1+\alpha}} < \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{(n-1)^\alpha} - \frac{1}{n^\alpha} \right).$$

б) Доказати да за свако $p > 1$ важи:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \leq \frac{p}{p-1}.$$

1. Дата је функција $f(x) = \ln \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$.

а) Испитати конвергенцију интеграла $\int_0^1 f(x)dx$ и $\int_1^{+\infty} f(x)dx$.

б) Испитати апсолутну и условну конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f(n)$.

2. У зависности од реалних параметара α и β испитати конвергенцију следећег интеграла

$$\int_0^1 \frac{|\log(x)|^\alpha}{(\sin \pi x)^\beta} dx.$$

3. Нека је $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nx}{\sin^2 x} dx$ и $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} dx, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

а) Доказати да је $I_n - I_{n-1} = J_{n-1}, n \geq 1$.

б) Доказати да је $J_n = c$, за неко $c \in \mathbb{R}$.

в) Наћи I_n .

г) У зависности од реалног параметра $\alpha > 0$, испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi\sqrt{n^2+1})}{I_n^\alpha}$.

4. а) Доказати да за свако $n \in \mathbb{N}, n > 1$ и $\alpha > 0$ важи

$$\frac{1}{n^{1+\alpha}} < \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{(n-1)^\alpha} - \frac{1}{n^\alpha} \right).$$

б) Доказати да за свако $p > 1$ важи:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \leq \frac{p}{p-1}.$$