

1. Дата је функција $f(x) = |x + 2|e^{-\frac{1}{|x|}}$.
 - а) Одредити константе a, b и c тако да је $f(x) = ax + b + \frac{c}{x} + o(\frac{1}{x})$, кад $x \rightarrow +\infty$ и кад $x \rightarrow -\infty$.
 - б) Испитати ток и скицирати график функције f .
 - ц) Испитати диференцијабилност функције f .
 - д) Одредити једначину тангенте на график у тачки $(1, f(1))$.
2. У зависности од реалног параметра α испитати конвергенцију следећег интеграла

$$\int_4^{\infty} \frac{\log^{\alpha+1}(x-3)}{\sqrt{e^{x-4}-1}} dx.$$

Израчунати вредност тог интеграла за $\alpha = -1$.

3. Ако је

$$I_n = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin nx}{(1+2^x)\sin x} dx,$$

у зависности од параметра α испитати конвергенцију реда

$$\sum_{n=0}^{\infty} I_n n^{\alpha} (\sqrt[4]{n^4 - 5n^2} - \sqrt[3]{n^3 - 3n}).$$

4. а) Доказати да за свако $x \in [0, 1)$ важи

$$0 \leq \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x} - x \leq \frac{x^3}{3(1-x^2)},$$

а затим да за свако $n \in \mathbb{N}$ важи

$$0 \leq (n + \frac{1}{2}) \log \frac{n+1}{n} - 1 \leq \frac{1}{12} (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}).$$

б) Нека су дата два низа $a_n = \frac{n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}}{n!}$ и $b_n = a_n e^{\frac{1}{12n}}$. Користећи део под а), доказати да је низ са општим чланом a_n неоппадајући, а низ са општим чланом b_n нерастући. Шта можемо рећи о граничним вредностима ових низова?

ц) Извести Стирлингову формулу, тј. доказати да за свако $n \in \mathbb{N}$ постоји $\theta_n \in (0, 1)$ тако да је

$$n! = c^{-1} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} e^{\frac{\theta_n}{12n}},$$

где је c јединствен реалан број тако да је $a_n \leq c \leq b_n$ за свако $n \in \mathbb{N}$.