

1. Дата је функција  $f(x) = |x+2|e^{-\frac{1}{|x|}}$ .
  - а) Одредити константе  $a, b$  и  $c$  тако да је  $f(x) = ax + b + \frac{c}{x} + o(\frac{1}{x})$ , кад  $x \rightarrow +\infty$  и кад  $x \rightarrow -\infty$ .
  - б) Испитати ток и скицирати график функције  $f$ .
  - ц) Испитати диференцијабилност функције  $f$ .
  - д) Одредити једначину тангенте на график у тачки  $(1, f(1))$ .
2. Испитати за које  $\alpha \in \mathbb{R}$  је функција

$$f(x) = \begin{cases} |x|^\alpha \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

- а) непрекидна;
- б) диференцијабилна;
- ц) непрекидно диференцијабилна.

3. У зависности од параметра  $\alpha \in \mathbb{R}$ , одредити граничну вредност следећег низа

$$a_n = \frac{\sqrt[7]{\frac{n^3+n}{n^3+1}} + 1 - \cos \frac{1}{n} - n \sin \frac{1}{n}}{\log^\alpha \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}.$$

4. а) Доказати да за свако  $x \in [0, 1)$  важи

$$0 \leq \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x} - x \leq \frac{x^3}{3(1-x^2)},$$

а затим да за свако  $n \in \mathbb{N}$  важи

$$0 \leq \left(n + \frac{1}{2}\right) \log \frac{n+1}{n} - 1 \leq \frac{1}{12} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

б) Нека су дата два низа  $a_n = \frac{n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}}{n!}$  и  $b_n = a_n e^{\frac{1}{12n}}$ . Користећи део под а), доказати да је низ са општим чланом  $a_n$  неоппадајући, а низ са општим чланом  $b_n$  нерастући. Шта можемо рећи о граничним вредностима ових низова?

ц) Извести Стирлингову формулу, тј. доказати да за свако  $n \in \mathbb{N}$  постоји  $\theta_n \in (0, 1)$  тако да је

$$n! = c^{-1} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} e^{\frac{\theta_n}{12n}},$$

где је  $c$  јединствен реалан број тако да је  $a_n \leq c \leq b_n$  за свако  $n \in \mathbb{N}$ .