

Писмени испит из Анализе 1
11.6.2017.

1. Дата је функција:

$$f(x) = \log \sqrt{1 + e^{-x}} - \frac{e^x}{1 + e^x} + \frac{x}{2}.$$

- (а) Испитати ток и скицирати график функције f .
(б) Одредити слику домена функције f .

2. Дато је пресликавање:

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} \arctan x & , |x| \geq 1 \\ \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} x + \frac{(1-x)^\alpha}{2} & , |x| < 1 \end{cases}.$$

У зависности од реалног параметра α :

- (а) одредити највећи подскуп од $\mathbb{R}$ на коме је дата функција непрекидна;
(б) одредити највећи подскуп од $\mathbb{R}$ на коме је дата функција диференцијабилна;
(в) испитати равномерну непрекидност функције g на $\mathbb{R}$.

3. Дат је низ интеграла

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x \sin^{n-2} x}{1 + \sin x} dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

- (а) Одредити рекурентну везу између I_n и I_{n-1} .
(б) Доказати да постоји и одредити $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$.
(в) Испитати конвергенцију реда

$$\sum_{n=1}^{+\infty} I_n \frac{\log n \cos n\pi}{n}.$$

4. Дато је непрекидно диференцијабилно пресликавање $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ које је строго монотono. Нека је сегмент $[a, b]$ такав да h има нулу на $[a, b]$ и важи да је $b - a > 1$.

- (а) Доказати да постоји $x \in [a, b]$ такво да је $2|h(x)| > \inf_{a \leq t \leq b} |h'(t)|$.
(б) Доказати да постоје $c, d \in [a, b]$ такви да је

$$e \int_c^d |h(x)| dx > \inf_{a \leq t \leq b} |h'(t)| (d - c).$$

- (в) Да ли претходна тврђења важе ако h није строго монотono?