

1. Дата је функција $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{x}{|x-1|}, & x \neq 1 \\ \frac{\pi}{2}, & x = 1 \end{cases}$.
- а) Испитати диференцијабилност функције f .
 б) Испитати ток и скицирати график функције f .
 в) У зависности од параметра $a \in \mathbb{R}$, одредити број решења једначине $|f(x)| = a$.

2. Нека је $I_n = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(1 + n^2 \sin^2 x)^2}$, $n \in \mathbb{N}$.

- а) Израчунати I_n , $n \in \mathbb{N}$.
 б) Израчунати

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln^2 n} \sum_{k=1}^n I_k \ln k.$$

3. Нека је $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ диференцијабилна функција таква да је $|f'(x)| \leq \frac{1}{1+x^2}$ за свако $x \in \mathbb{R}$.

- а) Доказати да важи $|f(y) - f(x)| \leq \operatorname{arctg} y - \operatorname{arctg} x$ за све $x, y \in \mathbb{R}$ за које је $x \leq y$.
 б) Доказати да постоји $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
 в) Испитати конвергенцију интеграла

$$\int_1^{+\infty} \sqrt{x}(f(x+1) - f(x))dx.$$

4. У зависности од параметра $\alpha \in \mathbb{R}$, одредити скуп свих $x \in \mathbb{R}$ за које конвергира ред

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{\alpha n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2 \ln n} x^n.$$