

1. Нека је $I_n = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(1 + n^2 \sin^2 x)^2}$, $n \in \mathbb{N}$.

а) Израчунати I_n , $n \in \mathbb{N}$.

б) Испитати конвергенцију реда

$$\sum_{n=1}^{+\infty} I_n \sin\left(\frac{n^2\pi + 1}{4n}\right).$$

2. У зависности од реалног параметра α испитати конвергенцију интеграла

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{x}{x^2+1}\right)}{(x^2 - \sin(x^2))^\alpha} dx.$$

3. У зависности од параметра $\alpha \in \mathbb{R}$, одредити скуп свих $x \in \mathbb{R}$ за које конвергира ред

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{\alpha n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2 \ln n} x^n.$$

4. Нека је $f \in C^1[a, b]$ тако да је $f(a) = f(b) = 0$ и $\int_a^b (f(x))^2 dx = 2$.

а) Доказати да је $\int_a^b x f(x) f'(x) dx + 1 = 0$.

б) Претпоставимо додатно да је $a < 0 < b$ и да функција f опада на $(a, 0)$ и расте на $(0, b)$. Доказати да тада

$$(\exists c, d \in [a, b]) f(c)f(d) = \frac{1}{b-a}.$$