

Pitanja iz geometrije za pismeni i usmeni (I smer, druga godina)

Tijana Šukilović, Marijana Babić, Andrijana Dekić

7. oktobar 2019

1 Teorijska pitanja

1. **Vektori:** Definicija vektora, kolinearni i koplanarni vektori, definicija sabiranja vektora, definicija množenja vektora brojem, osobine vektorskog prostora, linearna zavisnost i nezavisnost vektora (primeri), dokaz da su svaka tri vektora ravni linearno zavisna, baza i dimenzija vektorskog prostora, koordinate vektora i tačke, definicija skalarnog proizvoda, skalarni proizvod u ON bazi, računanje uglova i dužina pomoću skalarnog proizvoda, orijentacija ravni i prostora, definicija i geometrijska interpretacija vektorskog proizvoda, tablica vektorskog proizvoda u ON bazi, računanje vektorskog proizvoda, primene vektorskog proizvoda (računanje površine i određivanje orijentacije trougla, uslov da tačka P pripada trouglu ABC , uslov kolinearnosti tri tačke, tačke sa iste strane prave...), definicija mešovitog proizvoda, dokaz da je apsolutna vrednost mešovitog proizvoda jednaka zapremini paralelepipeda, računanje mešovitog proizvoda, primene mešovitog proizvoda (uslov koplanarnosti tri vektora, uslov koplanarnosti četiri tačke, određivanje zapremina paralelopipeda/tetraedra...), definicija centra mase, težište i centar mase trougla, formula za težište n -tačaka $P_1, \dots, P_n$, baricentričke koordinate

2 Vektori

2.1 (*). Dokazati da je $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ako i samo ako se duži AC i BD polove.

2.2 (*). U odnosu na tačku O dati su vektori položaja $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ tačaka A i B ($A \neq B$). Izraziti vektor položaja tačke C takve da:

a) $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{CB}, \lambda \in \mathbb{R}$;

b) tačka C deli duž AB u odnosu $p : q, p, q \in \mathbb{N}$.

2.3. Dat je paralelogram $ABCD$. Neka je E središte stranice BC i S presek dijagonala AC i BD . Izraziti vektore $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{AD}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\overrightarrow{AE}$ i $\overrightarrow{AS}$.

2.4. Dati su vektori $\vec{v} = (\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ i $\vec{u} = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ iz $\mathbb{V}^3$ svojim koordinatama u ortonormiranoj bazi. Odrediti: a) $|\vec{v}|$; b) $\angle(\vec{v}, \vec{u})$.

2.5 (*). a) Ako je A_1 presek simetrale ugla $\angle BAC$ i ivice BC trougla ABC , odrediti vektor $\overrightarrow{AA_1}$ preko vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$.

- b) Dokazati da simetrala ugla u trouglu ABC deli naspramnu stranu u odnosu susednih strana.
 c) Dokazati da se simetrale uglova trougla ABC seku u jednoj tački (centar upisanog kruga).

2.6 (*). Dokazati da se visine trougla seku u jednoj tački (ortocentar).

2.7. Odrediti površinu trougla ABC , ako je $A(1, 2)$, $B(2, 3)$, $C(-3, 4)$. Da li je trougao ABC pozitivne orijentacije?

2.8. Ispitati da li tačka $M(2, 3)$ pripada trouglu ABC , ako je $A(1, 7)$, $B(-3, 3)$, $C(3, -3)$?

2.9. Koje se od tačaka $D(1, 2)$, $E(4, -5)$, $F(-7, 3)$ nalaze sa iste strane prave AB , $A(2, -4)$, $B(1, -1)$, kao i tačka $C(1, 1)$?

2.10. a) Odrediti mešoviti proizvod $[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}]$, ako su njihove koordinate u ortonormiranoj bazi $\vec{v} = (1, 2, -7)$, $\vec{u} = (-1, 3, 3)$, $\vec{w} = (-1, 8, -1)$.

b) Da li su ti vektori linearno nezavisni?

2.11. a) Da li su tačke $A(1, 2)$, $B(2, 3)$, $C(7, 6)$ kolinearne?

b) Da li su tačke $A(1, 2, 3)$, $B(2, 3, 4)$, $C(7, -6, 5)$, $D(5, -8, 3)$ koplanarne?

2.12. Data je kocka $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ivice 1.

a) Odrediti ugao između dijagonala strana kocke BC_1 i $D_1 B_1$.

b) Odrediti zapreminu tetraedra $BC_1 B_1 D$.

2.13 (*). Neka je ABC trougao i T tačka takva da važi $\vec{OT} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$.

a) Dokazati da tačka T ne zavisi od izbora tačke O .

b) Dokazati da je tačka T težište trougla, tj. presek težišnih duži i da ona težišne duži deli u odnosu $2 : 1$.

2.14 (*). Neka je $ABCD$ tetraedar i T tačka takva da važi $\vec{OT} = \frac{1}{4}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD})$. Težišnom duži tetraedra se naziva duž koja spaja teme tetraedra sa težištem napsramne pljosni. Dokazati da se težišne duži tetraedra seku u tački T i da ih ona deli u odnosu $3 : 1$. Tačka T se naziva **težište tetraedra**.

2.15. Jedan kraj poluge dugačke 5 m drži roditelj, a drugi je oslonjen na zemlju. Dete mase 15 kg sedi na 2 m od oslonca (tj. drugog kraja poluge). Koliku masu drži roditelj?

2.16. U ravni je dat trougao ABC . Neka tačka D pripada stranici AB , a tačka E stranici BC , tako da je $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{4}$ i $\frac{BE}{EC} = \frac{5}{7}$. Ako se duži AE i CD seku u tački F odrediti u kom odnosu tačka F deli duži AE i CD .

2.17. Odrediti baricentričke koordinate tačke F u odnosu na tačke A, B, C iz prethodnog zadatka.

2.18. Dat je paralelogram $ABCD$. Ako je tačka F središte stranice BC , tačka G središte stranice CD , a tačka E presek duži AF i BG odrediti odnose $\frac{AE}{EF}$ i $\frac{BE}{EG}$.

3 Analitička geometrija

3.1 Geometrija ravni

3.1. Data je prava $q : x = -t + 4, y = 2t - 7, t \in \mathbb{R}$.

- a) Odrediti implicitni oblik prave q .
 b) Odrediti implicitni oblik prave r koja sadrži tačku $R(3, 7)$ i paralelna je q .
- 3.2.** Odrediti jednačinu normale n iz tačke $A(1, 7)$ na pravu p ako je:
 a) $p : x = 2t + 4, y = 3t - 5, t \in \mathbb{R}$ b) $p : 4x - \frac{2}{3}y + 7 = 0$.
- 3.3.** Neka je $A(2, 3), B(-1, 4)$.
 a) Odrediti parametarsku jednačinu prave AB .
 b) Ispitati da li tačka $C(14, -1)$ pripada polupravoj $[AB]$.
 c) Ispitati da li tačka $D(1, \frac{10}{3})$ duži $[AB]$ i u kom odnosu je deli.
- 3.4.** Ispitati da li tačke $C(1, 1)$ i $D(-7, 11)$ pripadaju istoj poluravni određenoj pravom AB , $A(2, -2), B(1, 3)$.
- 3.5.** Ako je $A(1, 2), B(3, 7)$, odrediti koordinate tačaka koje dele duž AB na pet jednakih delova.
- 3.6.** Izračunati rastojanje tačke $M(1, -3)$ od prave a) $2x - 3y + 1 = 0$, b) prave p čiji je vektor pravca $\vec{p} = (1, -2)$, a tačka $P(1, 0)$.
- 3.7.** Odrediti centar i poluprečnik opisanog kruga oko trougla ABC , ako je $A(1, 2), B(4, 3), C(6, 0)$ kao i koordinate težišta trougla.
- 3.8.** Odrediti težište T , ortocentar H i centre opisanog O i upisanog kruga S u $\triangle ABC$, $A(-1, 4), B(2, 3), C(1, 2)$. Odrediti baricentričke koordinate ovih tačaka.
- 3.9.** Odrediti presek pravih p i q koje su zadate tačkom i vektorom pravca:
 a) $P(3, 1), \vec{p} = (1, 0), Q(2, 3), \vec{q} = (1, 1)$;
 b) $P(3, 1), \vec{p} = (1, 0), Q(2, 3), \vec{q} = (-2, 0)$;
 c) $P(3, 1), \vec{p} = (1, -2), Q(2, 3), \vec{q} = (-2, 4)$.

3.2 Prava i ravan u prostoru

- 3.10.** Ravni $x - y + 3z - 2 = 0$ odrediti parametarski jednačinu.
- 3.11.** Odrediti jednačinu ravni koja sadrži tačke $A(1, 2, 3), B(-1, 2, -1)$ i $C(0, 0, 1)$.
- 3.12.** Odrediti ortonormirani koordinatni sistem (x', y', z') u odnosu na ravan $\alpha : 2x - y + 2z + 1 = 0$ (tj. koordinatni sistem $O'x'y'z'$ u kom ravan α ima jednačinu $z' = 0$) i napisati vezu tih koordinata sa koordinatama (x, y, z) .
- 3.13.** Pravu $p : x = t + 4, y = -2t + 1, z = 3t - 2, t \in \mathbb{R}$ zapisati kao presek dve ravni.
- 3.14.** Odrediti jednačinu ravni α koja sadrži pravu $p : \frac{x-2}{1} = \frac{y-11}{5} = \frac{z-2}{1}$ i koja je normalna na ravan $\beta : y = 0$.
- 3.15.** Pravu $p : x - y - 1 = 0, z - 2x = 0$ zapisati parametarski.
- 3.16.** Odrediti rastojanje tačke $M(1, 0, 12)$ od: a) prave $p : x - y - 1 = 0, z - 2x = 0$, b) ravni $\alpha : x - y - 4z = 0$.
- 3.17.** Data je ravan $\alpha : x - 2y + 5z - 1 = 0$. Odrediti presek te ravni sa pravama:
 a) $p : \frac{x-2}{3} = \frac{y-4}{7} = \frac{z}{1}$;

- b) $q : \frac{x}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{-1}$;
 c) $r : \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{-1}$;
 d) $s : x - y = 1, x + y - z + 5 = 0$;
 e) $t : x - z + 2 = 0, -y + 3z + 2 = 0$.

3.18. Odrediti tačku prodora prave $p : \frac{x+1}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-5}{-4}$ kroz ravan $\alpha : 3x + y + 5z - 7 = 0$.

3.19. Odrediti jednačinu familije svih ravni koje sadrže tačku $P(5, -2, 1)$ i a) normalne b) paralelne su na pravu $q : \frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-4}{2}$.

3.20. Odrediti jednačinu ravni koja sadrži pravu $p : x + y + z = 0, 2x - 2z + 3 = 0$ i sa ravni $\alpha : x - 4y - 8z + 12 = 0$ gradi ugao od $\frac{\pi}{4}$.

3.21. Odrediti jednačinu ravni α koja sadrži pravu $p : \frac{x-2}{1} = \frac{y-11}{5} = \frac{z-2}{1}$ i čije je rastojanje od tačke $M(1, 1, 1)$ jednako $\frac{5}{\sqrt{14}}$.

3.22. Odrediti međusobni položaj pravih (i presečnu tačku ako postoji):

- a) $p : \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-2}{-1}$ $q : 2x = y, 3x = z$
 b) $p : \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-2}{-1}$ $q : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-3}{-1}$
 c) $p : \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-2}{-1}$ $q : \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+7}{2}$

3.23. Odrediti zajedničku normalu i rastojanje između mimoilaznih pravih $p : \frac{x-4}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-12}{-1}$ i $q : \frac{x-3}{-7} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$.

3.24. Izračunati (koristeći digitron za arccos) ugao između ravni $\alpha : x + 2y - 3z - 1 = 0$ i $\beta : 2x - 3y + 4z + 2 = 0$.

3.25. Izračunati (koristeći digitron za arccos) ugao između prave $p : x + 2y - 3z - 1 = 0, x - z + 2 = 0$ i ravni $\alpha : x - 4y + 2z + 2 = 0$.

3.26. Odrediti jednačinu normale iz tačke $A(2, 3, -1)$ na ravan $\alpha : 2x + y - 4z + 5 = 0$.

3.27. Odrediti λ tako da se prave $p : \frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{5} = \frac{z-1}{-2}$ i $q : \frac{x-\lambda}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{0}$ seku. Koje su koordinate presečne tačke?

3.28. Odrediti jednačinu prave koja sadrži tačku $L(2, -1, 7)$ i seče prave $p : \frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z-3}{1}$ i $q : \frac{x-2}{-1} = \frac{y-11}{-3} = \frac{z+2}{0}$.

3.29. Ispitati da li prava $p : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-6} = \frac{z+1}{-4}$ seče trougao ABC , ako je $A(2, 4, 6)$, $B(-4, 2, 0)$, $C(6, 4, -2)$. U slučaju da seče, odrediti koordinate presečne tačke.

3.30. Odrediti presek ravni $\alpha : x - y + 2z - 3 = 0$ i trougla ABC , ako je $A(1, -2, 0)$, $B(-1, 2, 3)$, $C(2, 1, 3)$.

4 Afina i projektivna preslikavanja

4.1 Transformacije koordinata

4.1. Dat je pravilan šestougao $ABCDEF$. Ako je data baza $e = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{AF}$, odrediti koordinate temena šestougla u reperu $A\vec{e}_1\vec{e}_2$.

4.2. Neka je $OABC$ paralelogram i $e = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$, $f = (\frac{1}{2}\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BC})$ dve baze. Odrediti formule transformacija koordinata iz repera Oe u reper Bf , kao i inverzne formule.

4.3. Da li formule

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

prestavljaju transformaciju koordinata između dva ortonormirana repera? Precizno nacrtati uzajamni položaj tih repera.

4.2 Afina preslikavanja

4.4. Date su tačke $A(-1, -1)$, $B(1, -1)$, $C(1, 1)$, $D(-1, 1)$; $A'(4, 5)$, $B'(8, 7)$, $C'(6, 9)$, $D'(2, 7)$.

- Odrediti jednačine afinog preslikavanja koje kvadrat $ABCD$ preslikava u paralelogram $A'B'C'D'$.
- Izračunati površinu paralelograma, koristeći determinantu matrice dobijenog preslikavanja i površinu kvadrata.

4.5. Dato je afino preslikavanje formulama

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Odrediti formule inverznog preslikavanja.

4.6. Odrediti formule afinog preslikavanja koje trougao OAB preslikava u trougao $O'A'B'$, ako je $O(0, 0)$, $A(1, 0)$, $B(0, 1)$ i $O'(5, -4)$, $A'(7, -8)$, $B'(4, 1)$.

- Da li preslikavanje čuva orijentaciju?
- Izračunati površinu trougla $O'A'B'$ (znajući da je $P(\triangle OAB) = 1/2$ i znajući determinantu preslikavanja).

4.7. Odrediti formule afinog preslikavanja koje trougao PQR preslikava u trougao $P'Q'R'$, ako je $P(1, 1)$, $Q(1, 2)$, $R(4, 4)$ i $P'(5, -4)$, $Q'(7, -8)$, $R'(4, 1)$. Da li preslikavanje čuva orijentaciju?

4.8. a) Da li su trouglovi PQR i $P'Q'R'$ podudarni ako je $P(0, 0)$, $Q(5, 5)$, $R(10, -15)$ i $P'(1, -7)$, $Q'(0, 0)$ i $R'(19, -8)$.

- Odrediti izometriju koja preslikava PQR u $P'Q'R'$. O kojoj se izometriji radi?

4.9. Odrediti formule homotetije sa centrom u tački $C(1, 2)$ i koeficijentom 3. U koju tačku se preslikava koordinatni početak pri ovoj homotetiji? (Napomena: rezultat, tj. formule zapisati u obliku: $x' = \dots$, $y' = \dots$)

4.10. Odrediti formule rotacije za ugao $\phi = \frac{7\pi}{6}$ oko tačke $A(-2, 3)$. U koju tačku se preslikava tačka $M(1, 3)$ pri ovoj rotaciji? (Napomena: rezultat, tj. formule zapisati u obliku: $x' = \dots$, $y' = \dots$)

4.11. Korisnik je obeležio pravougaonik (recimo sliku) sa naspravnim temenima $P(360, 420)$ i $Q(520, 520)$. Odrediti formule afine transformacije koja taj pravougaonik preslikava na ceo ekran dimenzija 800×600 bez distorzije, tj. homotetijom.

4.12. Odrediti formule refleksije u odnosu na pravu $3x - 4y - 6 = 0$ u ravni.

- 4.13.** Odrediti formule refleksije u odnosu na ravan $\alpha_0 : 2x - y + 2z = 0$ u prostoru.
- 4.14.** Odrediti formule rotacije za ugao $\phi = \frac{\pi}{2}$ oko prave $p : P(0, 1, 0), \vec{p}(-1, 2, 2)$.
- 4.15.** Odrediti normalnu projekciju prave $p : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+3}{2}$ na ravan $\alpha : 2x + y - 4z + 5 = 0$.
- 4.16.** Odrediti tačku Q koja je simetrična tački $P(3, -2, -4)$ u odnosu na ravan $\alpha : 6x + 2y - 3z - 75 = 0$ kao i projekciju P' tačke P na ravan α .
- 4.17.** Odrediti tačku Q koja je simetrična tački $P(-1, -2, 1)$ u odnosu na pravu $l : \frac{x}{-2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{1}$ kao i projekciju P' tačke P na pravu l .
- 4.18.** Odrediti centralnu projekciju tačke $P(1, 2, 3)$ na ravan $z = -1$, ako je centar projektovanja tačka $O(0, 0, 0)$.

4.3 Projektivna preslikavanja

- 4.19.** Odrediti projektivno preslikavanje ravni koje tačke $A_0(1 : 0 : 0)$, $B_0(0 : 1 : 0)$, $C_0(0 : 0 : 1)$, $D_0(1 : 1 : 1)$ slika u $A(1 : 2 : 3)$, $B(3 : 2 : 1)$, $C(0 : 1 : 1)$, $D(7 : 11 : 10)$.
- 4.20.** Odrediti projektivno preslikavanje koje trapez $ABCD$, $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$, $C(1, 2)$, $D(-1, 2)$ preslikava u pravougaonik $A'B'C'D'$, $A'(-1, 0)$, $B'(1, 0)$, $C'(1, 1)$, $D'(-1, 1)$. Skicirati!
- 4.21.** Odrediti projektivno preslikavanje koje preslikava zarubljenu piramidu na kanonski kvadar. Prednja ravan odsecanja zarubljene piramide je $F : z = -1$, a zadnja ravan odsecanja $B : z = a$, $-1 < a < 0$.

5 Krive u ravni

- 5.1.** Odrediti centar i poluprečnik kruga $k : x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0$.
- 5.2.** Odrediti presek kruga k iz prethodnog zadatka i prave:
a) $p : \vec{p} = (1, 1)$, $P(2, -2)$ b) $q : x - y - 4 = 0$.
- 5.3.** Odrediti presek krugova $\kappa : (x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 25$ i $\ell : x = -1 + 4 \cos t$, $y = -1 + 4 \sin t$, $t \in [0, 2\pi)$.
- 5.4.** Odrediti parametrizaciju kruga $(x + 2)^2 + y^2 = 4$ dužinom luka s .
- 5.5 (*)**. Pokazati da za hiperbolu važi: $|d(M, F_1) - d(M, F_2)| = 2a$.
- 5.6 (*)**. Dokazati optičko svojstvo parabole.
- 5.7.** Svesti na kanonski oblik translacijom:
a) $x^2 - 3y^2 - 4x - 18y - 23 = 0$; b) $3y^2 + 6y - x - 1 = 0$;
c) $x^2 + 5y^2 - 4x - 10y + 8 = 0$; d) $x^2 + 25y^2 - 6x + 50y + 9 = 0$;
e) $9x^2 + 4y^2 + 16y + 16 = 0$; f) $4x^2 - y^2 - 24x + 4y + 32 = 0$;
g) $25x^2 - 4y^2 + 150x + 40y + 25 = 0$; h) $y^2 - 36x - 2y - 35 = 0$.
- 5.8.** Rotacijom pokazati da je kriva $xy - 1 = 0$ hiperbola.

5.9. Teniser visine $1.8m$ servira sa osnovne linije. Ako je početna brzina udarca $180km/h$, pod kojim početnim uglom treba udariti loptu da bi ona završila u polju protivnika? Dužina terena je $23.77m$, a visina mreže $91.4cm$.

5.10. Kola su sletela sa litice visine $10m$ i nađena su na udaljenosti od $15m$ od nje. Kolikom su se brzinom (u km/h) kola kretala pre pada?

5.11. Odrediti Beziјerovu krivu čije su kontrolne tačke $P_0(1, 1)$, $P_1(2, 2)$, $P_2(4, -1)$.

5.12. Odrediti Beziјerovu krivu čije su kontrolne tačke $P_0(1, -1)$, $P_1(2, 0)$, $P_2(4, -1)$, $P_2(0, 0)$.

5.13. Date su tačke $P_0 = (2, 3)$, $P_1 = (-1, 4)$, $P_2 = (3, 0)$, $P_3 = (1, -2)$.

- Odrediti Beziјerovu krivu $\alpha_3(t)$, $t \in [0, 1]$ čije su to kontrolne tačke.
- Odrediti tangentne vektore u tačkama P_0 i P_3 .
- Da li je tangenta te krive u tački $\alpha(\frac{1}{2})$ paralelna pravoj P_0P_3 ?
- Odrediti krivu dobijenu pomeranjem kontrolne tačke P_2 za vektor $\vec{v} = (-7, -11)$. Da li je tangenta te nove krive u tački $\alpha'_3(\frac{1}{2})$ paralelna pravoj P_0P_3 ?

5.14. U ravni su date tačke $P_0 = (2, 1)$, $P_1 = (6, 13)$, $P_2 = (14, -7)$ i prave $p : y = 5$, $q : x = 7$ i $r : x = 2 + 3s$, $y = 12 - 2s$, $s \in \mathbb{R}$.

- Napisati Beziјerovu krivu $\alpha_2(t)$, $t \in [0, 1]$ čiji je kontrolni poligon $P_0P_1P_2$.
- Odrediti presek kontrolnog poligona sa pravama p, q, r .
- Odrediti presek krive $\alpha_2(t)$, $t \in [0, 1]$ sa pravama p, q, r . Uporediti broj presečnih tačaka sa slučajem kontrolnog poligona (svojstvo najmanje varijacije).
- Pokazati da je kriva $\alpha_2(t)$, $t \in [0, 1]$ deo parabole $y^2 = 4x$ (svojstvo affine invarijantnosti).

5.15. Upotrebom de Casteljau algoritma odrediti tačku Beziјerove krive $\alpha_4(t)$ za $t = \frac{2}{3}$, ako su kontrolne tačke krive $P_0(7, -8)$, $P_1(-11, 10)$, $P_2(7, 46)$, $P_3(34, 37)$, $P_4(16, 1)$.

5.16. Data je Beziјerova kriva kontrolnim tačkama $P_0 = (2, -3)$, $P_1 = (0, 3)$, $P_2 = (2, 9)$, $P_3 = (8, 7)$.

- Podeliti krivu na dva dela praveći rez u tački $\alpha_3(\frac{1}{2})$.
- Povećati stepen "leve" krive za 1.

5.17. Predstaviti deo kruga $x = \sqrt{2} \cos \theta$, $y = \sqrt{2} \sin \theta$, $\theta \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ kao racionalnu Beziјerovu krivu.

5.18. Da li se deo hiperbole $x^2 - y^2 = 1$ može predstaviti kao racionalna Beziјerova kriva?

6 Konveksni omotač i triangulacija poligona

6.1. Odrediti konveksni omotač tačaka $P_0 = (1, 3)$, $P_1 = (-2, 0)$, $P_2 = (-3, 5)$, $P_3 = (4, 2)$, $P_4 = (1, 1)$, $P_5 = (6, 4)$, $P_6 = (2, -3)$, $P_7 = (5, 5)$, $P_8 = (5, -1)$.

6.2. U ravni su date tačke $P_0 = (1, -3)$, $P_1 = (2, -2)$, $P_2 = (-1, 2)$, $P_3 = (4, -1)$, $P_4 = (0, 3)$. Ispitati da li je poligon $P_0P_1P_2P_3P_4$ prost. Ako nije, sortirati tačke $P_0, \dots, P_4$ tako da poligon bude prost.

6.3. Od datih tačaka u ravni formirati prost poligon, a zatim ga triangulisati.

- $P_0 = (0, 0)$, $P_1 = (5, -1)$, $P_2 = (3, 2)$, $P_3 = (6, 4)$, $P_4 = (-1, 3)$
- $P_0 = (-1, 3)$, $P_1 = (2, 1)$, $P_2 = (0, 0)$, $P_3 = (4, -1)$, $P_4 = (5, 3)$, $P_5 = (3, 4)$.

7 Poliedarske površi

7.1. a) Iz tabele povezanosti odrediti skup ivica. b) Nacrtati sliku. c) Proveriti da li ta tabela povezanosti zadaje apstraktnu poliedarsku površ. d) U slučaju potvrdnog odgovora pod c) proveriti da li je ta poliedarska površ povezana. e) Odrediti rub te površi i broj komponenata ruba.

za sledeće tabele povezanosti:

i) $\mathcal{T} = \{T_0, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5\}$, $\mathcal{P} = \{p_0, p_1, p_2, p_3\}$,

$p_0 = \langle 0, 1, 2 \rangle$, $p_1 = \langle 0, 2, 4, 5 \rangle$, $p_2 = \langle 3, 2, 0 \rangle$, $p_3 = \langle 1, 0, 3 \rangle$.

ii) $\mathcal{T} = \{T_0, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7, T_8, T_9, T_{10}\}$, $\mathcal{P} = \{p_0, p_1, p_2, p_3, p_4\}$,

$p_0 = \langle 0, 1, 7, 4 \rangle$, $p_1 = \langle 1, 2, 6, 7 \rangle$, $p_2 = \langle 2, 3, 5, 6 \rangle$, $p_3 = \langle 3, 0, 4, 5 \rangle$, $p_4 = \langle 8, 9, 10 \rangle$.

7.2. a) Nacrtati poliedarski model Mebijusove trake i napisati mu tabelu povezanosti. b) Dokazati da je Mebijusova traka neorjentabilna.

7.3. Izvršiti usklađivanje orijentacija pljosni kocke $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, ako je izabrana orijentacija pljosni $p_0 = \langle A, B, C, D \rangle$.

7.4. Data je poliedarska površ $p_0 = \langle 0, 1, 4, 3 \rangle$, $p_1 = \langle 1, 2, 5, 4 \rangle$, $p_2 = \langle 2, 0, 3, 5 \rangle$, $p_3 = \langle 6, 8, 5, 3 \rangle$, $p_4 = \langle 6, 3, 4, 7 \rangle$, $p_5 = \langle 4, 5, 8, 7 \rangle$, $p_6 = \langle 8, 7, 1, 2 \rangle$, $p_7 = \langle 0, 1, 7, 6 \rangle$, $p_8 = \langle 0, 6, 8, 2 \rangle$.

a) Dokazati da je ona poliedar, tj. da nema rub.

b) Izračunati njenu Ojlerovu karakterisku i rod.

7.5. Odrediti Ojlerovu karakteristiku Mebijusove trake.