

Геометрија 2

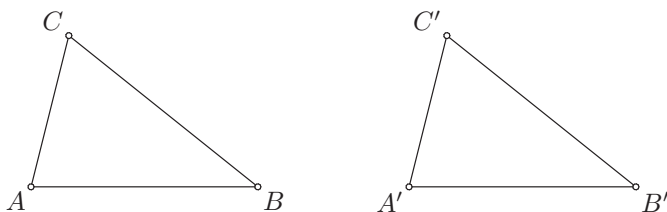
- вежбе -

1 Подударност

Подсетимо се ставова о подударности троуглова. Јасно нам је да два подударна троугла имају међусобно подударне одговарајуће странице и углове. Обратно, за два троугла $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C'$ довољно је доказати само за нека три пара страница или углова да су подударни. Ставови који се доказују у теорији и који дају ове довољне услове за подударност два троугла зову се Ставови о подударности троуглова. Има их пет и сада ћемо их навести.

Став 1. Нека су даџи троуглови $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C'$. Ако важи нешто од следеће:

- 1° (СУС) $AB = A'B'$, $\angle BAC = \angle B'A'C'$, $AC = A'C'$;
 - 2° (ССС) $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$;
 - 3° (УСУ) $\angle BAC = \angle B'A'C'$, $AB = A'B'$, $\angle ABC = \angle A'B'C'$;
 - 4° (ССУ) $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $\angle ACB = \angle A'C'B'$, а улови $\angle ABC$ и $\angle A'B'C'$ су оба оштра, оба права или оба тупа;
 - 5° (УУС) $AB = A'B'$, $\angle ACB = \angle A'C'B'$, $\angle BAC = \angle B'A'C'$;
- онда је $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.



Дакле, сваки од ставова 1°–5° еквивалентан је са подударношћу троуглова $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C'$.

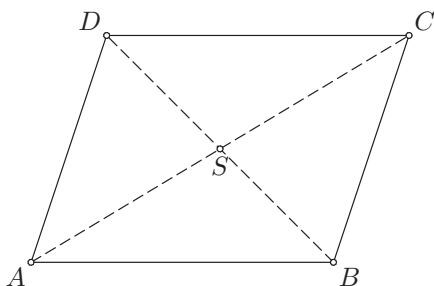
Приметимо да код троуглова не можемо тек тако писати знак „=” уместо знака „ $\cong$ ”. Код дужи и углова се то може толерисати, јер се ту уместо једнакости скупова тачака мисли на једнакост дужина дужи, односно мера углова. Међутим, одговарајућа мера за троуглове је површина, а два троугла која имају исту површину не морају бити подударна.

Вратимо се сада на Ставови о подударности троуглова. На први поглед нам се може учинити да су ставови УСУ и УУС исти, јер уколико су нама позната нека два угла троугла, познат нам је и трећи због тога што је збир углова у троуглу једнак 180° , односно π . Но, на овом предмету се изучавају две геометрије, еуклидска и хиперболичка. Еуклидска геометрија је стандардна, уобичајена геометрија с којом се сусрећемо још у основној школи, а о хиперболичкој геометрији ћемо учити касније. За сада ћемо рећи да се испоставља да ће у хиперболичкој геометрији збир

углова у троуглу увек бити мањи од π и да тај збир може бити било који број између 0 и π .

Осим ставова о подударности троуглова, користићемо једно веома важно тврђење везано за паралелограм. Најпре дајмо дефиницију паралелограма.

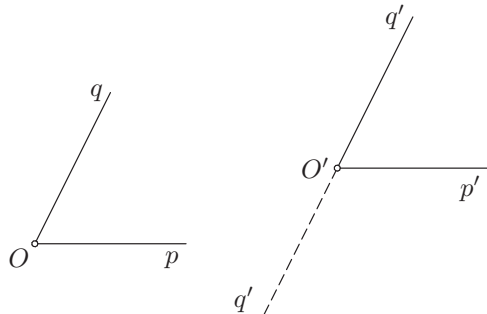
Дефиниција 1. Четвороугао $ABCD$ је *паралелограм* ако је $AB \parallel CD$ и $AD \parallel BC$.



Теорема 1. Нека је у равни даи конвексан четвороугао $ABCD$. Следећа тврђења су еквивалентна.

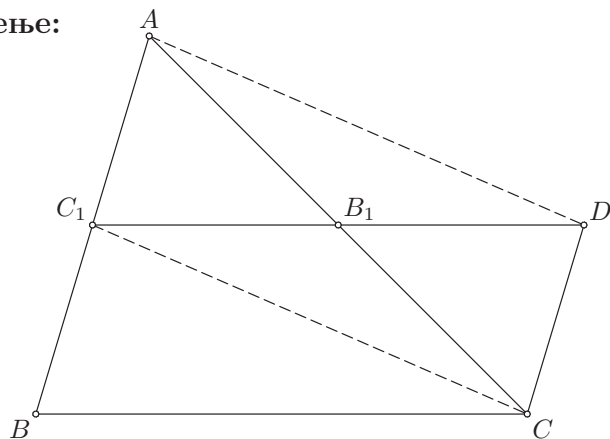
- 1° Четвороугао $ABCD$ је паралелограм.
- 2° Свака два суседна угла четвороугла $ABCD$ су суплементна.
- 3° Парови насупрамних угла четвороугла $ABCD$ су парови подударних угла.
- 4° $AB \parallel CD$ и $AB = CD$
- 5° $AB = CD$ и $AD = BC$
- 6° Дијагонале AC и BD имају заједничко средиште.

Теорема 2 (Углови са паралелним крацима). Нека су $\angle pOq$ и $\angle p'O'q'$ такви да је $Op \parallel O'p'$ и $Oq \parallel O'q'$. Тада је $\angle pOq = \angle p'O'q'$ или $\angle pOq + \angle p'O'q' = \pi$.



1. (Средња линија троугла) Ако су B_1 и C_1 средишта дужи CA и BA троугла ABC , онда су праве BC и B_1C_1 паралелне и важи $B_1C_1 = \frac{1}{2}BC$.

Решење:



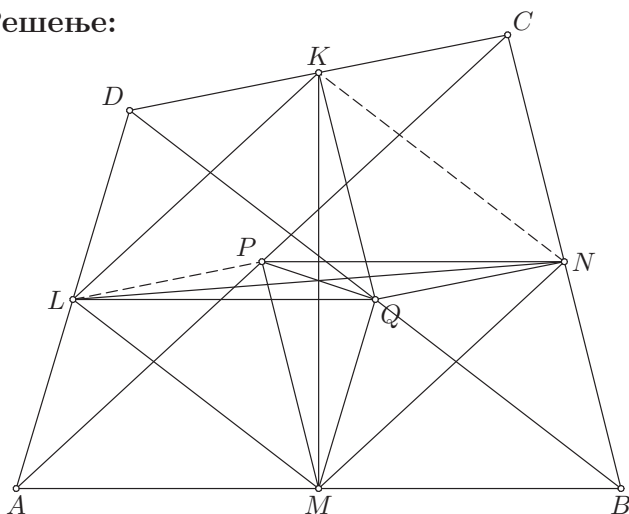
Нека је D тачка на полуправој C_1B_1 таква да је $C_1B_1 = B_1D$. Тада је тачка B_1 средиште дијагонала AC и C_1D четвороугла AC_1CD , те је он паралелограм. Следи да је $AC_1 \parallel CD$ и да је $AC_1 = CD$ као наспрамне стране паралелограма. Како је $AC_1 = C_1B$ јер је C_1 средиште AB , имамо да је $C_1B = CD$, а како су праве AC_1 и C_1B исте, следи да је и $C_1B \parallel CD$. Одавде закључујемо да је четвороугао $BCDC_1$ паралелограм, па имамо да је $BC \parallel C_1D$ и $BC = C_1D$. Како имамо да су праве C_1B_1 и C_1D исте, следи да је $C_1B_1 \parallel BC$, а како је B_1 средиште C_1D , следи да је $C_1B_1 = \frac{1}{2}C_1D = \frac{1}{2}BC$, што је и требало доказати.

Дефиниција 2. Дуж која повезује средишта две стране троугла ABC зове се *средња линија* троугла $\triangle ABC$.

2. Ако су A, B, C, D четири различите тачке и M, N, K, L, P, Q средишта дужи AB, BC, CD, DA, AC, DB редом, доказати:

- а) MN и KL , MP и QK , NP и QL су међусобно подударне дужи;
- б) дужи LN, MK, PQ имају заједничко средиште;
- в) сваки од углова $\angle PMQ$, $\angle PNQ$, $\angle LMN$ подударан је једном од углова којег одређују праве BC и AD , AB и CD , AC и BD .

Решење:

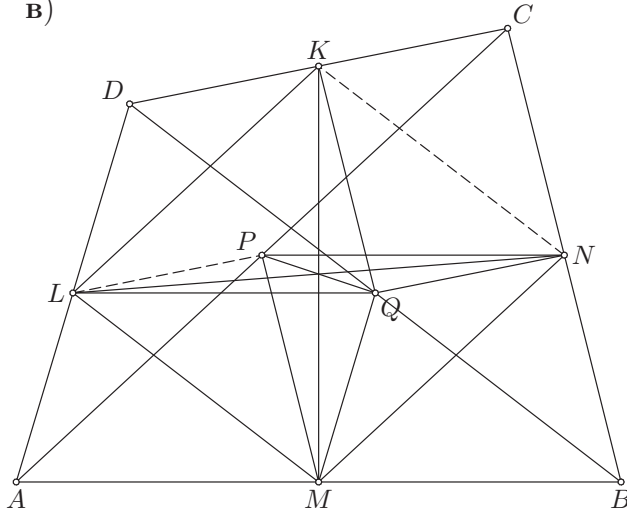


а) Како су тачке M и N средишта дужи AB и BC , редом, дуж MN је средња линија троугла $\triangle ABC$, па закључујемо да је $MN \parallel AC$ и $MN = \frac{1}{2}AC$. Такође, KL је средња линија троугла $\triangle ACD$, па следи да је $KL \parallel AC$ и $KL = \frac{1}{2}AC$. Закључујемо да је $MN \parallel KL$ и $MN = KL$.

Слично је и QK средња линија троугла $\triangle BCD$, па је $QK \parallel BC$ и $QK = \frac{1}{2}BC$. Такође је MP средња линија троугла $\triangle ABC$, па је $MP \parallel BC$ и $MP = \frac{1}{2}BC$, па закључујемо да је $QK \parallel MP$ и $QK = MP$.

б) Из дела а) имамо да је $MN \parallel KL$ и $MN = KL$, па је четвороугао $MNKL$ паралелограм. Следи да његове дијагонале MK и LN имају заједничко средиште. Такође, из дела а) закључујемо да је $QK \parallel MP$ и $QK = MP$, па је четвороугао $KPMQ$ паралелограм. Одавде закључујемо да његове дијагонале KM и PQ имају заједничко средиште. Како смо доказали да и MK и LN имају заједничко средиште, а свака дуж има јединствено средиште, следи да све три дужи (MK , LN и PQ) имају заједничко средиште.

В)

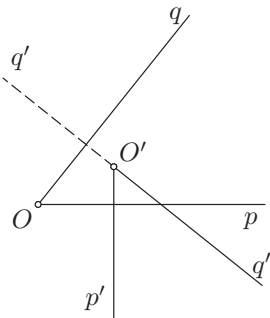


Дуж PM је средња линија троугла $\triangle ABC$, па је $PM \parallel BC$, а дуж MQ је средња линија троугла $\triangle ABD$, па је $MQ \parallel AD$. Ако са $\angle(AD, BC)$ означимо угао који граде праве AD и BC , онда тај угао и угао $\angle PMQ$ имају паралелне краке, па су подударни. Дакле, $\angle PMQ = \angle(AD, BC)$.

Дуж PN је средња линија троугла $\triangle ABC$, па је $PN \parallel AB$, а дуж NQ је средња линија троугла $\triangle BCD$, па је $NQ \parallel CD$. Угао који граде праве AB и CD и угао $\angle PNQ$ имају паралелне краке, па морају бити једнаки, односно важи $\angle PNQ = \angle(AB, CD)$.

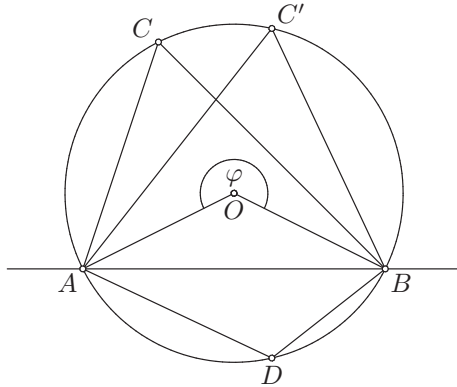
Коначно, LM је средња линија троугла $\triangle ABD$, па је $LM \parallel BD$, а MN је средња линија троугла $\triangle ABC$, па је $MN \parallel AC$. Сада видимо да углови $\angle LMN$ и $\angle(AC, BD)$ имају паралелне краке, па следи да је $\angle LMN = \angle(AC, BD)$.

Теорема 3 (Углови са нормалним крацима). Нека су $\angle pOq$ и $\angle p'O'q'$ такви да је $Op \perp O'p'$ и $Oq \perp O'q'$. Тада је $\angle pOq = \angle p'O'q'$ или $\angle pOq + \angle p'O'q' = \pi$.



Подсетимо се сада централних и периферијских углова.

Дефиниција 3. Нека је k круг, нека је O његов центар и нека су A, B, C тачке са тог круга. Угао $\angle ACB$ зове се *периферијски угао*, а угао $\angle AOB$ зове се *централни угао*.



Ако су тачке C и O са исте стране праве AB , онда знамо да је $\angle AOB = 2\angle ACB$. Зато се у том случају каже да централни угао $\angle AOB$ *одговара* периферијском углу $\angle ACB$. С тим у вези, ако је C' нека друга тачка на кругу k таква да су C, C', O с исте стране праве AB , онда из $\angle AOB = 2\angle ACB$ и $\angle AOB = 2\angle AC'B$ следи да је $\angle ACB = \angle AC'B$. За периферијске углове $\angle ACB$ и $\angle AC'B$ каже се да су *над истим луком* или *над истом тетивом* (у овом случају, луком $\widehat{AB}$, односно тетивом AB). Међутим, ако је D тачка на кругу k која је са супротне стране праве AB од тачака C, C', O , онда неће бити $\angle ADB = \angle ACB$. Разлог је тај што његов одговарајући централни угао није угао $\angle AOB$. У ствари, његов централни угао је на слици означен са φ и представља допуну угла $\angle AOB$ до пуног угла. И у овом случају важи да је одговарајући централни угао два пута већи од периферијског, дакле $\varphi = 2\angle ADB$. Израчунајмо колики је угао $\angle ADB$. Како је пун угао једнак 2π , следи да је $\angle AOB + \varphi = 2\pi$, па је $\varphi = 2\pi - \angle AOB = 2\pi - 2\angle ACB$. Одавде закључујемо да је $\angle ADB = \pi - \angle ACB$.

Приметимо да периферијски углови $\angle ACB$ и $\angle ADB$ нису над истим луком, јер је угао $\angle ACB$ над луком $\widehat{ADB}$, док је угао $\angle ADB$ над луком $\widehat{ACB}$. Формулишимо теорему.

Теорема 4. *Периферијски улови над истим луком су међусобно подударни. Периферијски улови над истом тетивом су или подударни или суплементни улови.*

Важи и обротно. Наиме, нека су у равни дате тачке A, B, C на кругу k и тачка C' за коју не знамо да ли је на кругу. Уколико су C, C' са исте стране праве AB и $\angle ACB = \angle AC'B$ или уколико су C, C' са супротних страна праве AB и $\angle ACB + \angle AC'B = \pi$, следи да $C' \in k$.

Ако су тачке A, B са круга k такве да је AB пречник и ако је O центар круга k , онда је централни угао $\angle AOB$ опружени угао, тј. $\angle AOB = \pi$.

Теорема 5. *Периферијски угао над пречником је прав.*

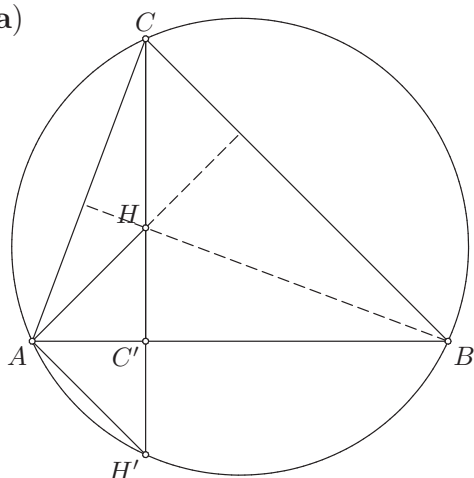
3. Доказати да тачке симетричне ортоцентру у односу на:

а) странице троугла; б) средишта страница троугла;

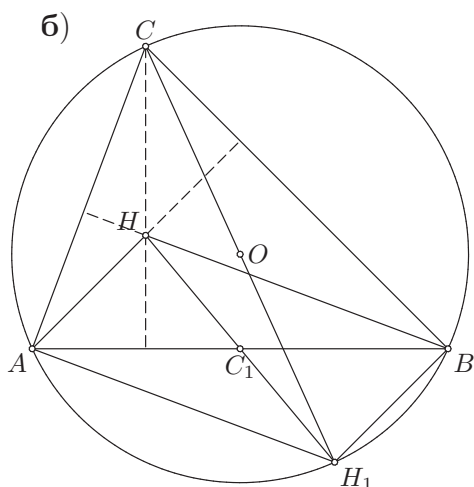
припадају кругу описаном око тог троугла.

Решење:

а)



Означимо са C' подножје висине из темена C на правој AB , а са H' тачку која је симетрична ортоцентру H у односу на страницу AB (у питању је осна симетрија). Тада је $HH' \perp AB$ и тачка C' је средиште дужи HH' , тј. $HC' = C'H'$. Како је и $\angle HC'A = \angle H'C'A$, јер су оба угла права (једнака 90° , односно $\frac{\pi}{2}$) и $AC' = AC'$, на основу става СУС закључујемо да је $\triangle HC'A \cong \triangle H'C'A$. Добијамо да је $\angle AH'C' = \angle AHC'$. Нама је циљ да докажемо да су углови $\angle AH'C$ и $\angle ABC$ подударни, јер ћемо онда имати да је угао $\angle AH'C$ периферијски над луком $\widehat{AC}$, па ће H' припадати описаном кругу троугла $\triangle ABC$. Углови $\angle AH'C'$ и $\angle AH'C$ су исти, па је довољно доказати да је $\angle AHC' = \angle ABC$. Међутим, како је $HC' \perp AB$ јер је HC' висина, и $AH \perp BC$ јер је AH висина, следи да углови $\angle AHC'$ и $\angle ABC$ имају нормалне краке, те су међусобно подударни.



Означимо са C_1 средиште странице AB троугла $\triangle ABC$ и са H_1 тачку симетричну ортоцентру H у односу на тачку C_1 (сада је у питању централна симетрија). Тада је тачка C_1 средиште дужи HH_1 . У четвороуглу AH_1BH дијагонале AB и HH_1 имају заједничко средиште, тачку C_1 , па је у питању паралелограм. Закључујемо да је $BH \parallel H_1A$ и да је $AH \parallel H_1B$. Како је BH висина, следи да је $BH \perp AC$, па следи и да је $H_1A \perp AC$, тј. $\angle H_1AC = \frac{\pi}{2}$. Према томе, троугао $\triangle ACH_1$ је правоугли, па је центар његовог описаног круга (дакле круга који садржи његова темена A, C, H_1) средиште хипотенузе CH_1 . Слично, AH је висина, па је $AH \perp BC$, а пошто је $H_1B \parallel AH$, следи да је $H_1B \perp BC$, тј. да је $\angle H_1BC = \frac{\pi}{2}$. Према томе, троугао $\triangle BCH_1$ је правоугли, па је центар његовог описаног круга (дакле круга који садржи његова темена B, C, H_1) средиште хипотенузе CH_1 .

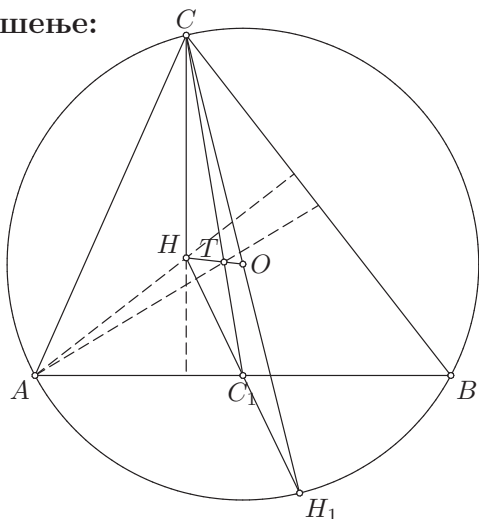
Описани кругови троуглова $\triangle ACH_1$ и $\triangle BCH_1$ имају исти центар (средиште дужи CH_1) и исти полупречник (половина дужи CH_1), те ти троуглови имају исти описани круг. Дакле, један исти круг садржи тачке A, B, C, H_1 . Како се око сваког троугла може описати само један круг, тј. за сваке три неколинеарне тачке постоји јединствени круг који их садржи, следи да описани круг троугла $\triangle ABC$ (тј. онај круг који садржи његова темена A, B, C) мора бити исти као и круг који садржи тачке A, B, C, H_1 (дакле, заједнички описани круг троуглова $\triangle ACH_1$ и $\triangle BCH_1$). Овим је доказано да се тачка H_1 налази на описаном кругу троугла $\triangle ABC$.

Напомена 1. Није потребно посебно доказивати да и тачке симетричне ортоцентру H у односу на странице AC и BC , као и тачке симетричне средиштима тих страница, припадају описаном кругу троугла $\triangle ABC$ јер

су све три стране троугла $\triangle ABC$ међусобно равноправне.

4. (Ојлерова права) Средиште описаног круга O , ортоцентар H и тежиште T произвољног троугла су колинеарне тачке и важи $\overrightarrow{HT} = 2\overrightarrow{TO}$. Доказати.

Решење:



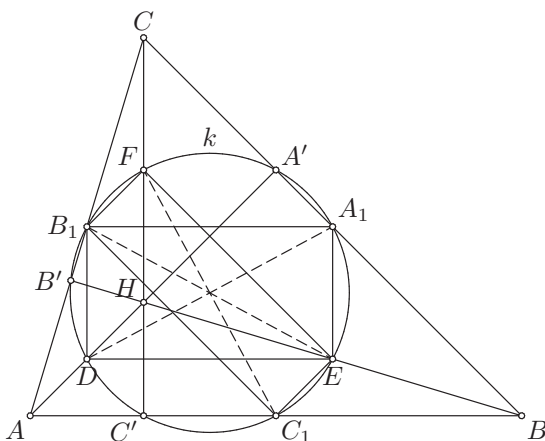
Нека је H_1 тачка из 3. задатка, тј. тачка симетрична ортоцентру H у односу на средиште C_1 стране AB . Посматрајмо троугао $\triangle CH_1H$. Како је C_1 средиште његове стране H_1H , следи да је дуж CC_1 тежишна дуж тог троугла. Такође, дуж CC_1 је и тежишна дуж троугла $\triangle ABC$, јер је C_1 средиште његове стране AB . Из 3. задатка следи да је CH_1 пречник описаног круга троугла $\triangle ABC$, па је његов центар O средиште дужи CH_1 . Дакле, дуж HO је тежишна дуж троугла $\triangle CH_1H$, па је њен пресек са тежишном дужи CC_1 тежиште троугла $\triangle CH_1H$. Означимо га са T_1 и докажимо да је то заправо тачка T (тежиште троугла $\triangle ABC$), тј. да је $T_1 = T$.

Како је тежиште сваког троугла тачка која дели његове тежишне дужи у односу 2:1, следи да тежиште T троугла $\triangle ABC$ дели његову тежишну дуж CC_1 у односу 2:1, тј. важи $CT : TC_1 = 2 : 1$. Такође, тежиште T_1 троугла $\triangle CH_1H$ дели његову тежишну дуж CC_1 у односу 2:1, тј. важи $CT_1 : T_1C_1 = 2 : 1$. Како је тачка која дели неку дуж у неком односу јединствена, следи да је $T_1 = T$. Дакле, T је тежиште и троугла $\triangle CH_1H$. Према томе, тачка T припада његовој тежишној дужи HO (па су H, T, O колинеарне) и дели је у односу 2:1, тј. важи $HT : TO = 2 : 1$. Како T припада баш дужи HO , следи да вектори $\overrightarrow{HT}$ и $\overrightarrow{TO}$ имају исти смер, а из $HT : TO = 2 : 1$ следи да је $HT = 2TO$, па је заиста $\overrightarrow{HT} = 2\overrightarrow{TO}$.

Дефиниција 4. Права која садржи колинеарне тачке H, T, O зове се *Ојлерова права*.

5. (Ојлеров круг) Средишта страница, подножја висина и средишта дужи одређених теменима и ортоцентром троугла припадају једном кругу. Доказати.

Решење:



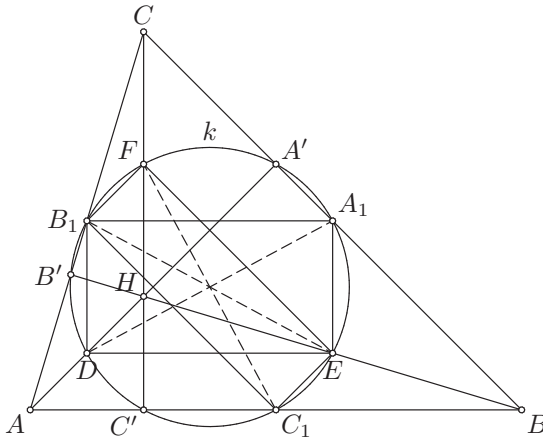
Нека су A', B', C' редом подножја висина из темена A, B, C на страницама BC, CA, AB троугла $\triangle ABC$ и нека су A_1, B_1, C_1 редом средишта страница BC, CA, AB . Дужи које спајају темена и ортоцентар H троугла $\triangle ABC$ су дужи AH, BH, CH , па означимо редом са D, E, F њихова средишта. Треба доказати да постоји круг који садржи ових девет тачака ($A', B', C', A_1, B_1, C_1, D, E, F$).

Посматрајмо четвороугао DEA_1B_1 . Дуж B_1A_1 је средња линија троугла $\triangle ABC$, па је $B_1A_1 \parallel AB$ и $B_1A_1 = \frac{1}{2}AB$, а дуж DE је средња линија троугла $\triangle ABH$, па је $DE \parallel AB$ и $DE = \frac{1}{2}AB$. Закључујемо да је DEA_1B_1 паралелограм. Поред тога, DB_1 је средња линија троугла $\triangle ACH$, па је $DB_1 \parallel CH$. Како је $CH \perp AB$ јер је CH висина, следи да је $DB_1 \perp AB$. Међутим, имамо да је $B_1A_1 \parallel AB$, па је $DB_1 \perp B_1A_1$. Према томе, угао $\angle DB_1A_1$ је прав, па како је паралелограм који има један прав угао заправо правоугаоник, следи да је четвороугао DEA_1B_1 правоугаоник. Како се око правоугаоника може описати круг, следи да постоји круг који садржи тачке A_1, B_1, D, E .

Слично, четвороугао B_1C_1EF је правоугаоник. Заиста, он је паралелограм, јер је B_1C_1 средња линија троугла $\triangle ABC$, па је $B_1C_1 \parallel BC$ и $B_1C_1 = \frac{1}{2}BC$ и EF је средња линија троугла $\triangle BCH$, па је $EF \parallel BC$ и $EF = \frac{1}{2}BC$, одакле закључујемо да је $B_1C_1 \parallel EF$ и $B_1C_1 = EF$.

Поред тога, C_1E је средња линија троугла $\triangle ABH$, па је $C_1E \parallel AH$, а пошто је $AH \perp BC$ јер је AH висина, важи и $C_1E \perp BC$. А како је $B_1C_1 \parallel BC$, следи да је $C_1E \perp B_1C_1$, тј. да је угао $\angle B_1C_1E$ прав, па је четвороугао B_1C_1EF паралелограм са једним правим углом, односно он је правоугаоник.

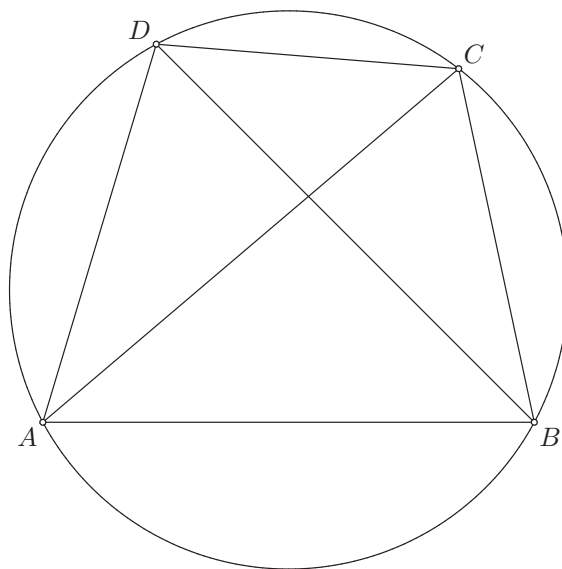
Како је дијагонала правоугаоника пречник његовог описаног круга, следи да је његов центар средиште дијагонале, а полупречник половина дијагонале. Дуж B_1E је заједничка дијагонала правоугаоника DEA_1B_1 и B_1C_1EF , па следи да описани кругови тих правоугаоника имају исти центар и исти полупречник, односно та два правоугаоника имају исти описани круг. Дакле, круг који садржи тачке A_1, B_1, D, E садржи и тачке B_1, C_1, E, F . Дакле, постоји круг, назовимо га k , који садржи тачке A_1, B_1, C_1, D, E, F .



Остаје нам још да докажемо да тачке A', B', C' припадају том кругу. Дуж B_1E је пречник круга k , а угао $\angle B_1B'E$ је прав, јер је $B'E$ висина, а права B_1B' је иста као и права AC . Како је $\angle B_1B'E$ прав као и периферијски угао над пречником B_1E круга k , то тачка B' припада кругу k . Слично доказујемо и да тачке A', C' припадају кругу k . Уочимо дијагоналу DA_1 правоугаоника DEA_1B_1 и приметимо да је угао $\angle DA'A_1$ прав, јер је DA' висина, а права $A'A_1$ је иста као и права BC . Како је $\angle DA'A_1$ прав, онда тачка A' припада кругу k са пречником DA_1 . За тачку C' уочимо дијагоналу FC_1 правоугаоника B_1C_1EF и приметимо да је $\angle FC'C_1 = \frac{\pi}{2}$ јер је FC' висина, а права $C'C_1$ иста као и права AB . Како је угао $\angle FC'C_1$ прав, онда тачка C' припада кругу k са пречником FC_1 .

Дефиниција 5. Круг који садржи тачке $A', B', C', A_1, B_1, C_1, D, E, F$ зове се *Ојлеров круг*.

Дефиниција 6. Четвороугао $ABCD$ је *тетиван* ако се око њега може описати круг, тј. ако постоји круг који садржи његова темена A, B, C, D .



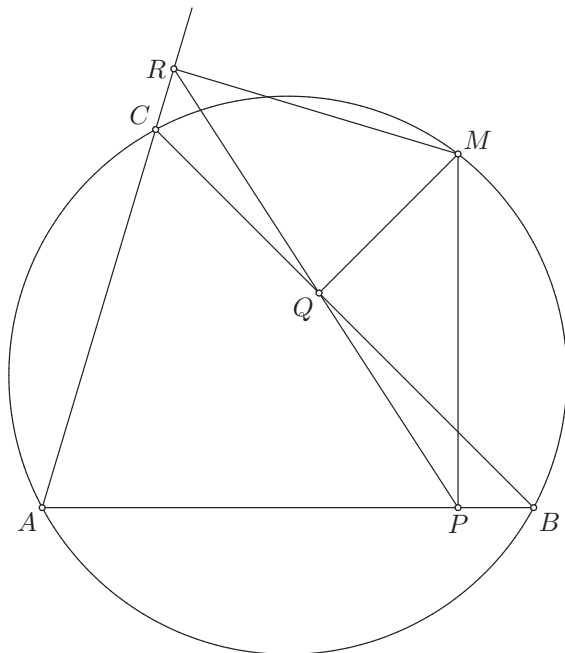
Посматрајмо конвексан четвороугао $ABCD$. Нека је он тетиван. На-спрамни углови $\angle BAD$ и $\angle BCD$ су периферијски углови над тетивом BD и при томе су тачке A, C са супротних страна праве BD . Следи да је $\angle BAD + \angle BCD = \pi$. Обратно, нека не знамо да ли је четвороугао $ABCD$ тетиван, а имамо да је $\angle BAD + \angle BCD = \pi$. Посматрајмо круг k описан око троугла $\triangle ABD$. Како се тачке A, C налазе са супротних страна праве BD , следи да је угао $\angle BCD$ периферијски над тетивом BD , па његово теме C припада кругу k . Дакле, круг k садржи темена четвороугла $ABCD$, па је четвороугао $ABCD$ тетиван.

Дакле, услов да су наспрамни углови конвексног четвороугла суплементни потребан је и довољан (дакле еквивалентан) да четвороугао $ABCD$ буде тетиван. Специјално, уколико су наспрамни углови четвороугла $ABCD$ прави, онда су они суплементни, па је четвороугао $ABCD$ тетиван.

Од еквивалентних услова за тетивност конвексног четвороугла даћемо још један. Ако је четвороугао $ABCD$ конвексан и $\angle ADB = \angle ACB$, онда је тај четвороугао тетиван. Овај услов је у ствари услов подударности периферијских углова $\angle ADB = \angle ACB$ над луком $\widehat{AB}$ (тачке C, D су са исте стране праве AB).

6. (Симсонова права) Подножја нормала из произвољне тачке круга описаног око неког троугла, на правама које садрже странице тог троугла, припадају једној правој.

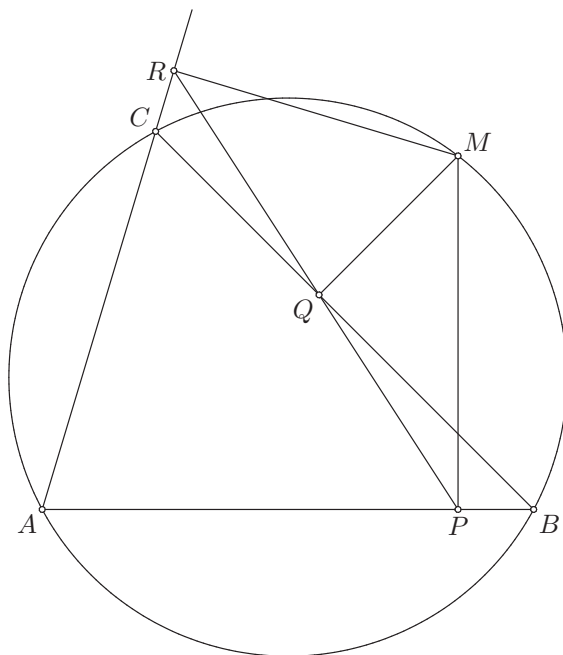
Решење:



Нека је M произвољна тачка на кругу описаном око троугла $\triangle ABC$ и нека су P, Q, R редом подножја нормала из M на праве AB, BC, CA . Уколико докажемо да је $\angle PQB = \angle CQR$, онда ће због колинеарности тачака B, Q, C (Q је подножје нормале из M на праву BC , па припада тој правој) углови $\angle PQB$ и $\angle CQR$ бити унакрсни, па ће онда и тачке P, Q, R припадати једној правој, тј. биће колинеарне.

Уочимо четвороугао $APMR$. Он је тетиван, јер су му наспрамни углови $\angle APM$ и $\angle ARM$ прави, па су суплементни. Следи да су и друга два наспрамна угла суплементна, тј. $\angle PAR + \angle PMR = \pi$. Даље, уочимо четвороугао $CQMR$. И он је тетиван, јер су му супротни углови $\angle CQM$ и $\angle CRM$ прави, па су суплементни. Одавде закључујемо да су периферијски углови $\angle CQR$ и $\angle CMR$ над луком $\widehat{CR}$ подударни. Дакле, $\angle CQR = \angle CMR$.

Посматрајмо сада четвороугао $PBMQ$. Њему су углови $\angle BQM$ и $\angle BPM$ над BM подударни, јер су то прави углови. Следи да је четвороугао $PBMQ$ тетиван, па је $\angle PQB = \angle PMB$, јер су то периферијски углови над луком $\widehat{PB}$. Коначно, четвороугао $ABMC$ је тетиван (по дефиницији, његова темена A, B, M, C припадају једном кругу и то баш описаном кругу троугла $\triangle ABC$), па су супротни углови $\angle BAC$ и $\angle BMC$ суплементни, тј. $\angle BAC + \angle BMC = \pi$.



Сада, како је $\angle BAC = \angle PAR$ јер је у питању исти угао и како важи да је $\angle BAC + \angle BMC = \pi$ и $\angle PAR + \angle PMR = \pi$, закључујемо да је $\angle BMC = \angle PMR$. А како имамо да је $\angle BMC = \angle PMB + \angle PMC$ и $\angle PMR = \angle PMC + \angle CMR$, следи да је $\angle PMB = \angle CMR$. Одавде следи, због $\angle PQB = \angle PMB$ и $\angle CQR = \angle CMR$, да је $\angle PQB = \angle CQR$, што смо и желели да докажемо.

Дефиниција 7. Права која садржи тачке P, Q, R зове се *Симсонова права*.

Дефиниција 8. Четвороугао $ABCD$ је *тангентан* уколико се у њега може уписати круг, тј. уколико постоји круг такав да су странице тог четвороугла тангенте на том кругу.

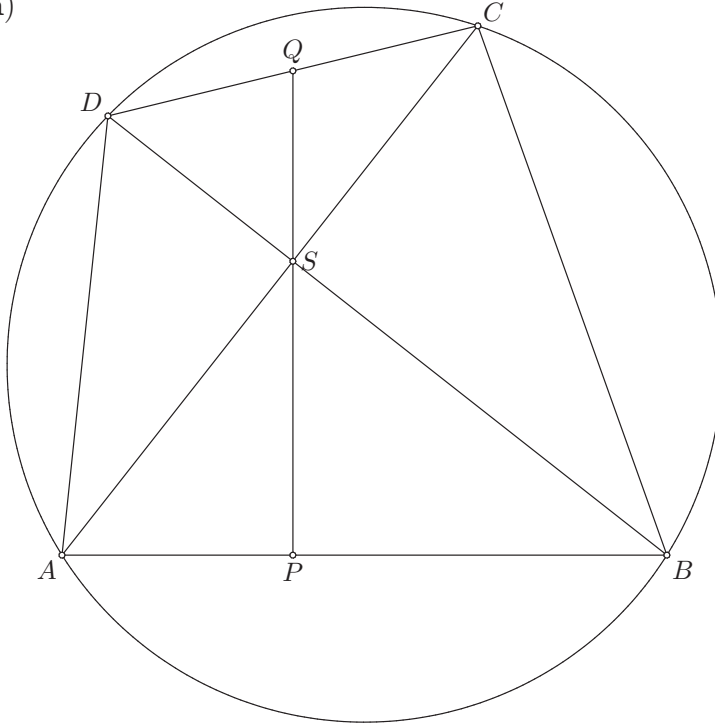
Ако се код четвороугла бисектрисе унутрашњих углова секу у једној тачки, онда је тај четвороугао тангентан.

7. Дат је тетиван четвороугао $ABCD$ чије су дијагонале међусобно нормалне и секу се у тачки S .

- а) Права која садржи тачку S и нормална је на правој AB садржи средиште дужи CD . Доказати.
- б) Ако су A', B', C', D' пројекције тачке S на правама AB, BC, CD, DA , редом, тада је четвороугао $A'B'C'D'$ тетиван и тангентан. Доказати.

Решење:

а)

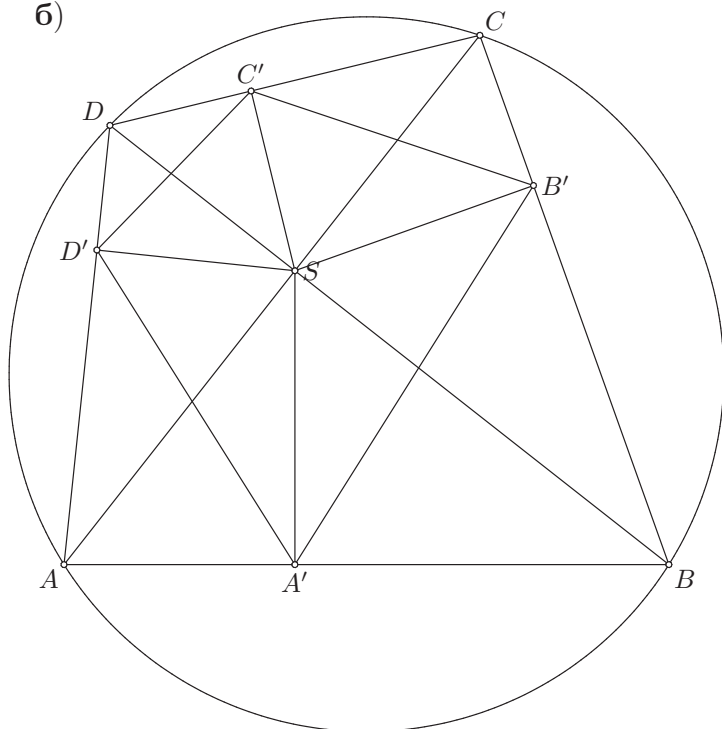


Нека је P подножје нормале из S на страници AB и нека је Q пресечна тачка праве PS и странице CD . Означимо угао $\angle BAC = \alpha$ и угао $\angle ABD = \beta$. Како је $\angle BAS = \angle BAC = \alpha$ и $\angle ABS = \angle ABD = \beta$, из $\angle BAS + \angle ABS + \angle ASB = \pi$ и $\angle ASB = \frac{\pi}{2}$ (дијагонале четвороугла $ABCD$ су нормалне) следи да је $\alpha + \beta + \frac{\pi}{2} = \pi$, тј. да је $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$.

Даље, $\angle BDC = \angle BAC = \alpha$ и $\angle ACD = \angle ABD = \beta$ (периферијски углови над истим луком). Како је $\angle APS = \frac{\pi}{2}$ и $\angle PAS = \angle BAS = \alpha$, следи да је $\angle PSA = \pi - \angle APS - \angle PAS = \pi - \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi}{2} - \alpha = \beta$. Поред тога, како је $\angle ASB = \frac{\pi}{2}$, следи да је $\angle PSB = \angle ASB - \angle PSA = \frac{\pi}{2} - \beta = \alpha$.

Сада приметимо да су углови $\angle DSQ$ и $\angle PSB$ унакрсни, па следи да је $\angle DSQ = \angle PSB = \alpha$. Такође, углови $\angle CSQ$ и $\angle PSA$ унакрсни, па је и $\angle CSQ = \angle PSA = \beta$. У троуглу $\triangle DSQ$ су углови $\angle DSQ = \alpha$ и $\angle SDQ$ подударни (јер је $\angle SDQ = \angle BDC = \alpha$), па је он једнакокраки. Следи да је $DQ = QS$. А у троуглу $\triangle CSQ$ су углови $\angle CSQ = \beta$ и $\angle SCQ$ подударни (јер је $\angle SCQ = \angle ACD = \beta$), па је и тај троугао једнакокраки. Следи да је $CQ = QS$, па заједно са $DQ = QS$ следи да је $CQ = DQ$, односно да је Q средиште CD .

б)

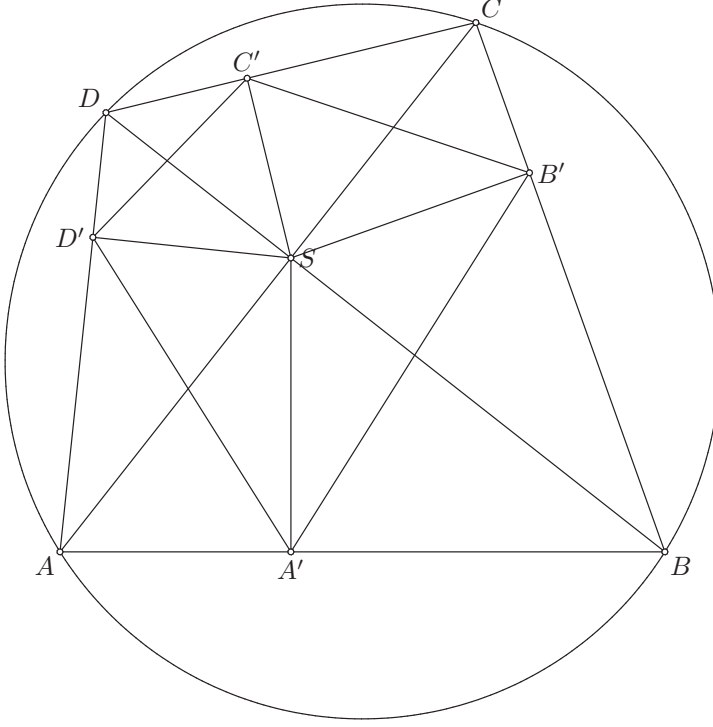


Докажимо да су $A'S, B'S, C'S, D'S$ симетрале унутрашњих углова код темена A', B', C', D' четвороугла $A'B'C'D'$. Тада ћемо имати да се симетрале унутрашњих углова четвороугла $A'B'C'D'$ секу у једној тачки (тачки S), па ће то бити центар његовог уписаног круга, а сам четвороугао ће бити тангентни.

Четвороугао $A'BB'S$ је тетиван. Заиста, наспрамни углови $\angle BA'S$ и $\angle BB'S$ су оба права, па су и суплементни. Слично, четвороугао $B'CC'S$ је тетиван јер су наспрамни углови $\angle CB'S$ и $\angle CC'S$ прави углови, па су суплементни, затим је четвороугао $C'DD'S$ тетиван јер су му наспрамни углови $\angle DC'S$ и $\angle DD'S$ оба права, па су суплементни, и, коначно, четвороугао $D'AA'S$ је тетиван јер су му наспрамни углови $\angle AD'S$ и $\angle AA'S$ оба права, па су суплементни. Иначе, сви малопре поменути углови су прави јер су, по дефиницији, тачке A', B', C', D' подножја нормала из S редом на страницама AB, BC, CD, DA .

Пре него што искористимо тетивност горепоменутих четвороуглова, означимо углове: $\angle SA'B' = \alpha$, $\angle SB'C' = \beta$, $\angle SC'D' = \gamma$, $\angle SD'A' = \delta$. Из тетивности четвороугла $A'BB'S$ следи да је $\angle SBB' = \angle SA'B' = \alpha$ (периферијски над луком $\widehat{SB'}$). Међутим, $\angle DBC = \angle SBB' = \alpha$, па из тетивности четвороугла $ABCD$ следи да је $\angle DAC = \angle DBC = \alpha$ (пе-

риферијски над луком $\widehat{DC}$), а сада из $\angle SAD' = \angle CAD = \alpha$ и тетивности четвороугла $D'AA'S$ следи да је $\angle SA'D' = \angle SAD' = \alpha$. Дакле, $\angle SA'B' = \alpha = \angle SA'D'$, па је заиста $A'S$ симетрала угла $B'A'D'$, тј. унутрашњег угла код темена A' четвороугла $A'B'C'D'$.



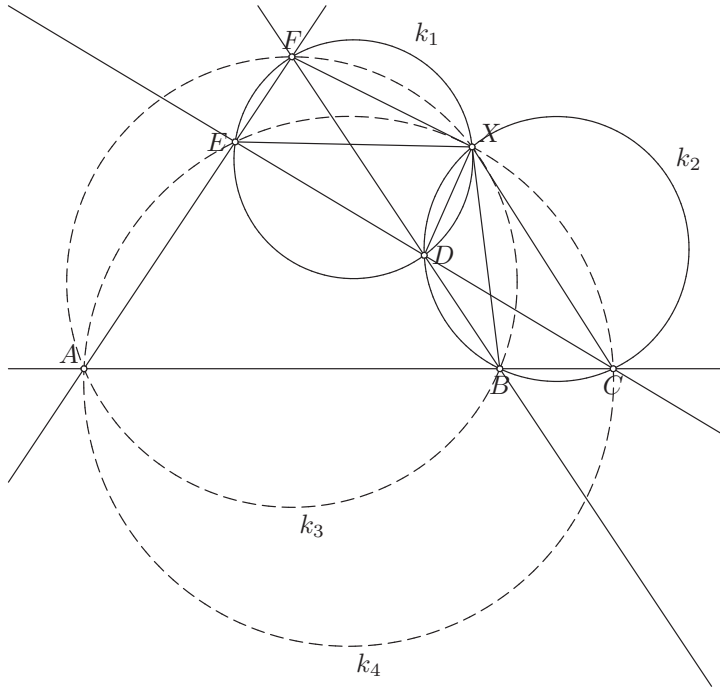
Сасвим слично се доказује да је $\beta = \angle SB'C' = \angle SCC' = \angle ACD = \angle ABD = \angle A'BS = \angle A'B'S$, тј. да је $\angle SB'C' = \angle SB'A' = \beta$, а затим и да је $\angle SC'D' = \angle SC'B' = \gamma$ и $\angle SD'A' = \angle SD'C' = \delta$. Дакле, заиста се тачка S налази у пресеку симетрала унутрашњих углова четвороугла $A'B'C'D'$, па је тај четвороугао тангентан.

Приметимо да су унутрашњи углови код темена A', B', C', D' четвороугла $A'B'C'D'$ подударни редом угловима $2\alpha, 2\beta, 2\gamma, 2\delta$. Да бисмо доказали да је $A'B'C'D'$ тетиван, довољно је доказати да је збир нека два супротна угла, нпр. углова код темена A' и C' , једнак опруженом углу. Другим речима, довољно је доказати да је $2\alpha + 2\gamma = \pi$, односно да је $\alpha + \gamma = \frac{\pi}{2}$. Из претходног имамо да је $\angle SBC = \alpha$ и да је $\angle SCB = \gamma$, па како из услова нормалности дијагонала AC и BD четвороугла $ABCD$ имамо да је $\angle BSC = \frac{\pi}{2}$, следи да је

$$\alpha + \gamma = \angle SBC + \angle SCB = \pi - \angle BSC = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

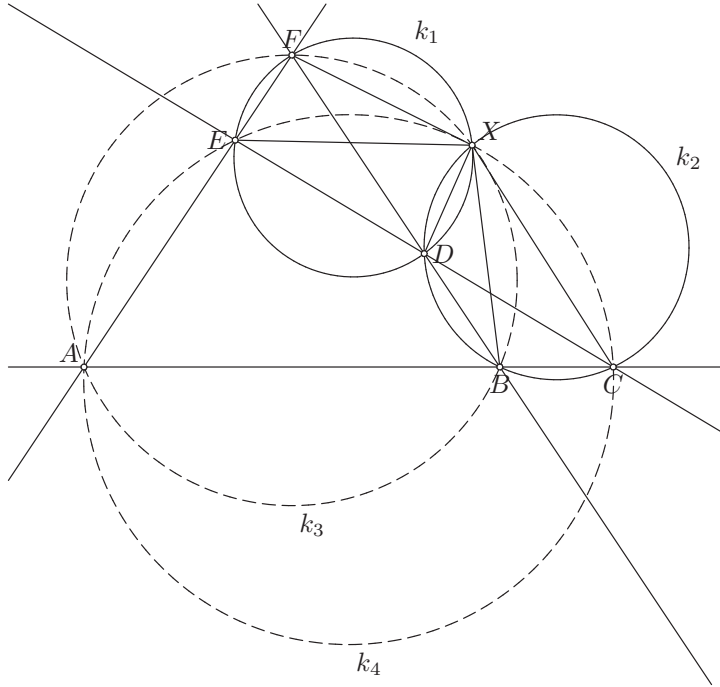
8. (Микелова теорема) Четири праве у општем положају у равни одређују четири троугла. Доказати да се описани кругови тих троуглова секу у једној тачки.

Решење:



Означимо пресечне тачке ових правих са A, B, C, D, E, F , као на слици. Тада имамо четири троугла (то су $\triangle DEF, \triangle BCD, \triangle ABF, \triangle ACE$). Нека су k_1, k_2, k_3, k_4 редом њихови описани кругови. Желимо да докажемо да се они секу у једној тачки. Нека су X, D пресечне тачке кругова k_1 и k_2 . Означимо углове $\angle EDF = \alpha$, $\angle EXD = \beta$ и $\angle DXB = \gamma$. Углови $\angle BDC$ и $\angle EDF$ су унакрсни, па су подударни. Дакле, $\angle BDC = \alpha$. Угао $\angle EXF$ је периферијски над луком $\widehat{EF}$, па је подударан углу $\angle EDF$. Следи да је $\angle EXF = \alpha$. Такође, угао $\angle BXC$ је периферијски над луком $\widehat{BC}$, па је подударан углу $\angle BDC$. Следи да је и $\angle BXC = \alpha$.

Имамо и да је $\angle EFD = \angle EXD = \beta$ јер су то периферијски углови над луком $\widehat{ED}$, као и $\angle DCB = \angle DXB = \gamma$ јер су то периферијски углови над луком $\widehat{DB}$. Одредимо угао $\angle BAF = \angle CAE$, пошто је то заједнички унутрашњи угао четвороуглова $ABXF$ и $ACXE$. У томе ће нам помоћи угао $\angle CEA$ који је спољашњи угао код темена E троугла DEF , па је једнак збиру његова два несуседна унутрашња угла, а то су $\angle EFD = \beta$ и $\angle EDF = \alpha$. Дакле, $\angle CEA = \alpha + \beta$. Следи да је $\angle CAE = \pi - \angle CEA - \angle ACE = \pi - \alpha - \beta - \gamma$.



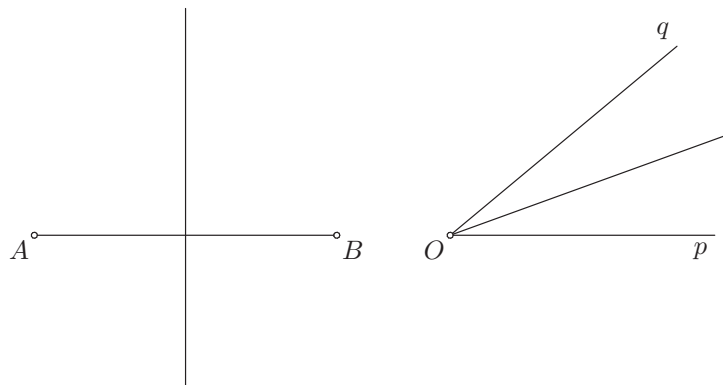
Сада доказујемо да су четвороуглови $ABXF$ и $ACXE$ тетивни, јер ћемо тада добити да њихово заједничко теме X припада круговима који садрже тачке A, B, F , односно A, C, E , а то су баш описани кругови троуглова $\triangle ABF$, односно $\triangle ACE$. А како је $\angle BXF = \angle BXD + \angle DXE + \angle EXF = \alpha + \beta + \gamma$, као и $\angle CXE = \angle CXB + \angle BXD + \angle DXE = \alpha + \beta + \gamma$, следи да су супротни углови $\angle BAF$ и $\angle BXF$ четвороугла $ABXF$, односно $\angle CAE$ и $\angle CXE$ четвороугла $ACXE$, суплементни. Дакле, то су тетивни четвороуглови, па имамо да X припада круговима k_3, k_4 (описаним око троуглова $\triangle ABF$, односно $\triangle ACE$).

Према томе, тачка X припада круговима k_1, k_2, k_3, k_4 . Како се кругови k_1, k_2 секу у тачкама D, X , а пресек сва четири круга садржи тачку X и мора бити подскуп скупа који је пресек k_1 и k_2 , следи да је пресек сва четири круга или скуп $\{D, X\}$ или скуп $\{X\}$ (тј. само тачка X). Међутим, тачка D не припада ни кругу k_3 ни кругу k_4 , па следи да не припада пресеку сва четири круга. Дакле, пресек кругова k_1, k_2, k_3, k_4 је само тачка X , тј. та четири круга секу се у једној тачки (тачки X).

Напомена 2. Када би кругови k_1 и k_2 имали само једну пресечну тачку D тј. тачку додира, тада праве не би биле у општем положају, већ би FE и BC биле паралелне. Дакле, кругови k_1 и k_2 се морају сећи у две различите тачке.

Дефиниција 9. Нека је α раван и нека се у њој налазе дуж AB и угао $\angle pOq$. Медијатриса дужи AB је њена симетрала, тј. то је права у равни α која садржи њено средиште и нормална је на њој. Бисектриса угла $\angle pOq$ је полуправа чије је теме тачка O , која припада углу $\angle pOq$ и која дели угао $\angle pOq$ на два подударна угла.

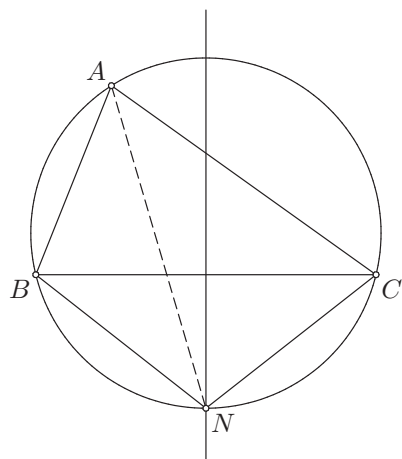
Дакле, медијатриса дужи је исто што и симетрала дужи, док је бисектриса угла *полуправа* која га дели на два подударна угла за разлику од симетрале угла која је *права* која садржи бисектрису.



Теорема 6. Нека је α раван и нека се у њој налазе дуж AB и угао $\angle pOq$. Медијатриса дужи AB је скуп свих тачака X равни α таквих да је $XA = XB$. Бисектриса угла $\angle pOq$ је скуп свих тачака Y равни α које припадају углу $\angle pOq$ таквих да је $YY_1 = YY_2$, где је Y_1 подножје нормале из Y на крак Op , а Y_2 подножје нормале из Y на крак Oq .

9. Медијатриса странице и бисектриса наспрамног угла троугла секу се у тачки која припада описаном кругу тог троугла. Доказати.

Решење:

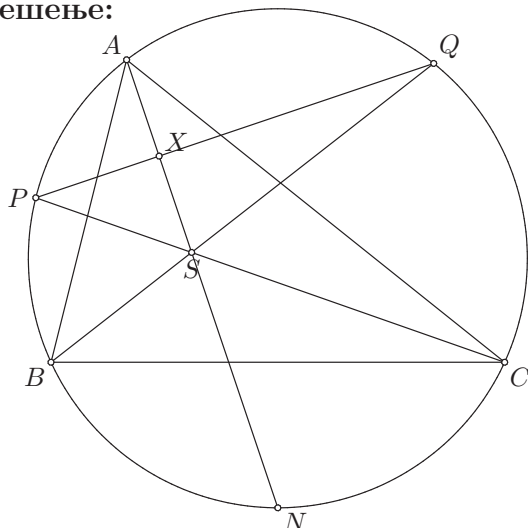


Нека је N пресечна тачка медијатрисе странице BC и описаног круга троугла $\triangle ABC$ која припада оном луку $\widehat{BC}$ којем не припада тачка A (наиме, постоје две пресечне тачке медијатрисе странице BC и описаног круга, па морамо прецизирати коју од њих желимо означити са N , а како желимо да то буде она тачка која се налази у углу $\angle BAC$ и како имамо два лука $\widehat{BC}$, за N бирамо тачку на оном луку $\widehat{BC}$ на којем се не налази тачка A). Све што сада треба доказати јесте да је полуправа AN бисектриса угла $\angle BAC$, па је довољно доказати да је $\angle BAN = \angle NAC$.

Троугао $\triangle NBC$ је једнакокраки јер је $NB = NC$ (N је на медијатрисе дужи BC), па следи да је $\angle NBC = \angle BCN$. Означимо те углове са φ . Углови $\angle BAN$ и $\angle BCN$ су оба периферијска над луком $\widehat{BN}$, па су они подударни, тј. $\angle BAN = \angle BCN = \varphi$. Слично, углови $\angle NAC$ и $\angle NBC$ су оба периферијска над луком $\widehat{NC}$, па су они подударни, тј. важи $\angle NAC = \angle NBC = \varphi$. Овим је доказ завршен, јер је сада $\angle BAN = \varphi = \angle NAC$.

10. Нека су P и Q средишта лукова AB и AC круга описаног око троугла ABC и s_α бисектриса угла $\angle BAC$. Доказати да је $PQ \perp s_\alpha$.

Решење:



Из 9. задатка имамо да су P, Q тачке такве да су CP, BQ бисектрисе углова $\angle BCA$ и $\angle ABC$. Као што знамо, бисектрисе унутрашњих углова троугла секу се у центру уписаног круга, па означимо пресечну тачку CP, BQ, s_α са S . Такође, означимо са X пресечну тачку PQ и s_α .

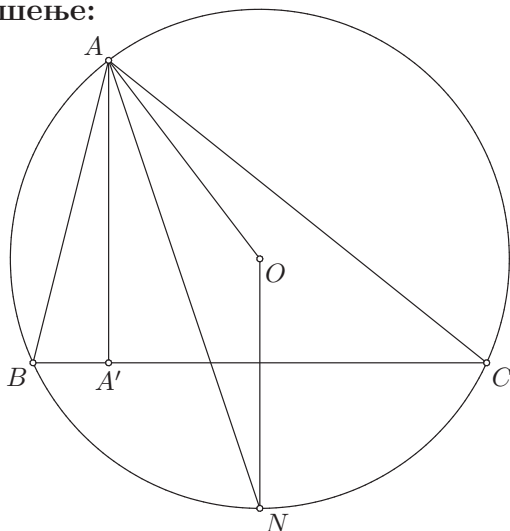
Посматрајмо троугао $\triangle XSQ$ и израчунајмо његове унутрашње углове. Прво имамо да је $\angle XQS = \angle PQB = \angle PCB = \frac{\gamma}{2}$, јер је CP бисектриса угла $\angle BCA = \gamma$. Угао $\angle XSQ$ је спољашњи угао троугла $\triangle ABS$, па је једнак збиру његових несуседних унутрашњих углова, а то су углови $\angle BAS$ и $\angle ABS$. Из чињенице да су AS и BS бисектрисе углова $\angle BAC = \alpha$ и $\angle ABC = \beta$ следи да је $\angle BAS = \frac{\alpha}{2}$ и $\angle ABS = \frac{\beta}{2}$. Дакле, $\angle XSQ = \angle BAS + \angle ABS = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$, па је

$$\angle SXQ = \pi - \angle XSQ - \angle XQS = \pi - \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2},$$

а то управо значи да је $QX \perp XS$, односно да је $PQ \perp s_\alpha$.

11. Нека су A' , N и O редом подножје висине из A , пресек бисектрисе угла $\angle BAC$ са описаном кругом троугла ABC ($AB < AC$) и центар описаног круга, доказати $\angle A'AN = \angle ANO = \angle NAO = \frac{1}{2}(\angle ABC - \angle ACB)$.

Решење:



На основу 9. задатка следи да се тачка N налази на медијатриси стране BC , па пошто и тачка O припада тој медијатриси, следи да је права ON баш медијатриса стране BC . Одавде добијамо да је $ON \perp BC$, а како је и $AA' \perp BC$, следи да је $ON \parallel AA'$. Сада имамо да углови $\angle A'AN$ и $\angle ANO$ имају заједнички крак AN и паралелне краке $A'A$ и NO , па су то подударни углови. Дакле, $\angle A'AN = \angle ANO$. Троугао $\triangle ANO$ је једнакокрак, јер су OA и ON полупречници описаног круга троугла $\triangle ABC$, па су подударни, тј. $OA = ON$. Следи да су углови наспрам њих подударни, тј. да је $\angle ANO = \angle NAO$.

Сада када знамо да су ови углови подударни, треба да изразимо било који од њих преко углова β и γ , тј. углова $\angle ABC$ и $\angle ACB$. Изразимо нпр. угао $\angle A'AN$. Имамо да је $\angle A'AN = \angle BAN - \angle BAA'$ и да је $\angle BAN = \frac{\alpha}{2}$. Како је троугао $\triangle ABA'$ правоугли и $\angle A'BA = \angle CBA = \beta$, следи да је $\angle BAA' = \pi - \angle BA'A - \angle A'BA = \pi - \frac{\pi}{2} - \beta = \frac{\pi}{2} - \beta$. Сада имамо да је

$$\begin{aligned} \angle A'AN &= \angle BAN - \angle BAA' = \frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{2} + \beta = \frac{\alpha - \pi + 2\beta}{2} \\ &= \frac{\alpha - (\alpha + \beta + \gamma) + 2\beta}{2} = \frac{\beta - \gamma}{2}, \end{aligned}$$

што је и требало доказати.

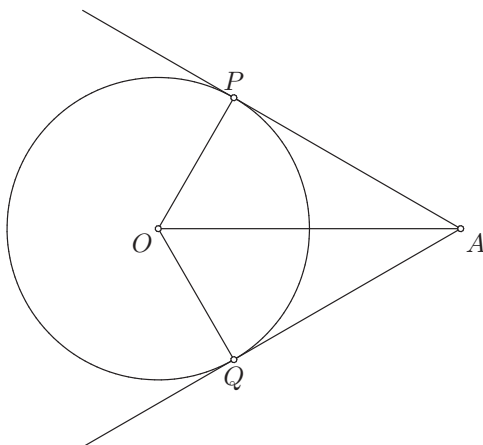
Напомена 3. Где се овде користила претпоставка да је $AB < AC$? Ако замислимо да смо на претходној слици обрнуто означили тачке B и C ,

онда није $\angle A'AN = \frac{1}{2}(\angle ABC - \angle ACB)$, него је $\angle A'AN = \frac{1}{2}(\angle ACB - \angle ABC)$. Поента је у томе што се при претпоставци $AB > AC$ мења распоред тачака на слици и онда не важе неке ствари које важе када је $AB < AC$. Конкретно, не важи $\angle A'AN = \angle BAN - \angle BAA'$, већ $\angle A'AN = \angle A'AB - \angle NAB$, па то мења резултат.

У строго формалном доказу, какви су нпр. докази на предавањима, морали бисмо помоћу претпоставке $AB < AC$ доказивати да важи распоред тачака који добијамо цртањем слике. Међутим, када решавамо задатке на колоквијуму или испиту, ми то не морамо да доказујемо, већ је довољно да то „видимо са слике”. Зато је неопходно нацртати слику која одговара датој претпоставци. Конкретно у овом задатку, треба нацртати слику тако да заиста буде $AB < AC$, што смо и учинили.

Дефиниција 10. Нека је A тачка ван круга k и нека су P, Q додирне тачке тангенти из тачке A на кругу k . Дужи AP, AQ зову се *тангентне дужи* из тачке A на кругу k .

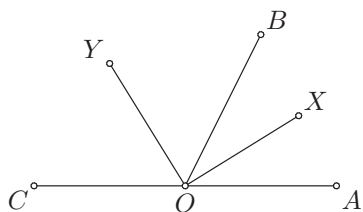
Теорема 7. Тангентне дужи из тачке A на кругу k су подударне.



Доказ: Посматрајмо троуглове $\triangle OPA$ и $\triangle OQA$. Њима је заједничка страница OA , странице OP и OQ су подударне јер су то полупречници круга k , углови $\angle OPA$ и $\angle OQA$ су прави (углови између тангенти и полупречника), па су подударни, а углови $\angle OAP$ и $\angle OAQ$ су оба оштра јер већ имамо праве углове у троугловима $\triangle OPA$ и $\triangle OQA$, па преостали углови морају бити оштри. Закључујемо на основу става ССУ да је $\triangle OPA \cong \triangle OQA$, па је $AP = AQ$, што је и требало доказати. $\square$

Дефиниција 11. *Најоредни улови* су они углови који имају заједничко теме и један крак, а преостали краци припадају једној правој.

Теорема 8. Бисектрисе најоредних улова су међусобно нормалне.

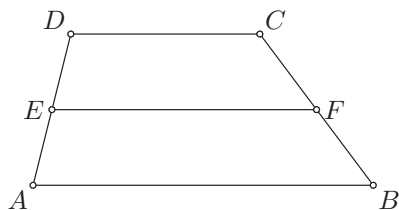


Доказ: Нека је $\angle AOB = \alpha$ и $\angle BOC = \beta$. Тада је $\alpha + \beta = \pi$. Ако је OX бисектриса угла $\angle AOB$, а OY бисектриса угла $\angle BOC$, онда је $\angle XOY = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\pi}{2}$, тј. да су бисектрисе OX и OY међусобно нормалне. $\square$

Дефиниција 12. Четвороугао $ABCD$ је *трапез* са *основицама* AB, CD и *крацима* AD, BC ако је $AB \parallel CD$.

Имали смо средњу линију троугла, а сада ћемо дефинисати и средњу линију трапеца.

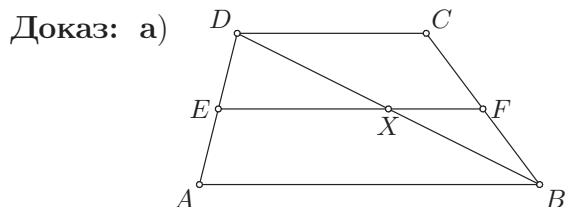
Дефиниција 13. Нека је $ABCD$ трапез и нека су E, F редом средишта кракова AD, BC . Дуж EF зове се *средња линија* трапеца $ABCD$.



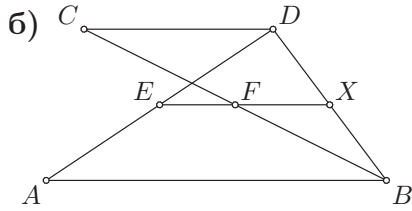
Теорема 9. Нека је четвороугао $ABCD$ трапез и нека су E, F средишта кракова AD, BC . Тада је средња линија EF паралелна основицама трапеца, тј. $EF \parallel AB$ и $EF \parallel CD$ и важи

а) $EF = \frac{1}{2}(AB + CD)$ ако је трапез $ABCD$ конвексан;

б) $EF = \frac{1}{2}(AB - CD)$ ако је трапез $ABCD$ неконвексан и $AB > CD$.



Нека је X средиште дијагонале BD трапеца $ABCD$. Следи да је EX средња линија троугла $\triangle ABD$, па је $EX \parallel AB$ и $EX = \frac{1}{2}AB$. Слично, XF је средња линија троугла $\triangle BCD$, па је $XF \parallel CD$ и $XF = \frac{1}{2}CD$. Како је $AB \parallel CD$, следи да је $EX \parallel XF$, па су тачке E, X, F колинеарне. Одавде добијамо да је $EF \parallel AB$ и $EF = EX + XF = \frac{1}{2}(AB + CD)$.



Нека је X средиште дијагонале BD трапеца $ABCD$. Следи да је EX средња линија троугла $\triangle ABD$, па је $EX \parallel AB$ и $EX = \frac{1}{2}AB$. Слично, XF је средња линија троугла $\triangle BCD$, па је $XF \parallel CD$ и $XF = \frac{1}{2}CD$. Како је $AB \parallel CD$, следи да је $EX \parallel XF$, па су тачке E, X, F колинеарне. Одавде добијамо да је $EF \parallel AB$ и $EF = EX - XF = \frac{1}{2}(AB - CD)$. $\square$

Напомена 4. Ми смо доказали да су одређене дужи средње линије (троугла или трапеца) ако знамо да су њени крајеви средишта одговарајућих страница и онда смо добијали паралелност. Међутим, довољно је да знамо само за један крај дужи да је средиште одговарајуће странице и да знамо паралелност да би посматрана дуж била средња линија. Ово убудуће можемо користити.

12. (Велики задатак) Ако са A_1, B_1 и C_1 обележимо средишта ивица $BC = a, CA = b, AB = c$ троугла ABC ($b > c$), са p полуобим тог троугла, са $l(O, r)$ описани круг тог троугла, са P, Q, R тачке у којима уписани круг $k(S, \rho)$ додирује праве BC, CA, AB , са P_i, Q_i, R_i ($i = a, b, c$) тачке у којима споља уписани круг $k_i(S_i, \rho_i)$ додирује редом праве BC, CA, AB , са M и N тачке у којима медијатриса ивице BC сече круг l , при чему је M на луку BAC , са M' и N' подножја управних из тачака M и N на правој AB , са P', P'_a, P'_b, P'_c дијаметрално супротне тачке тачкама P, P_a, P_b, P_c , доказати да је:

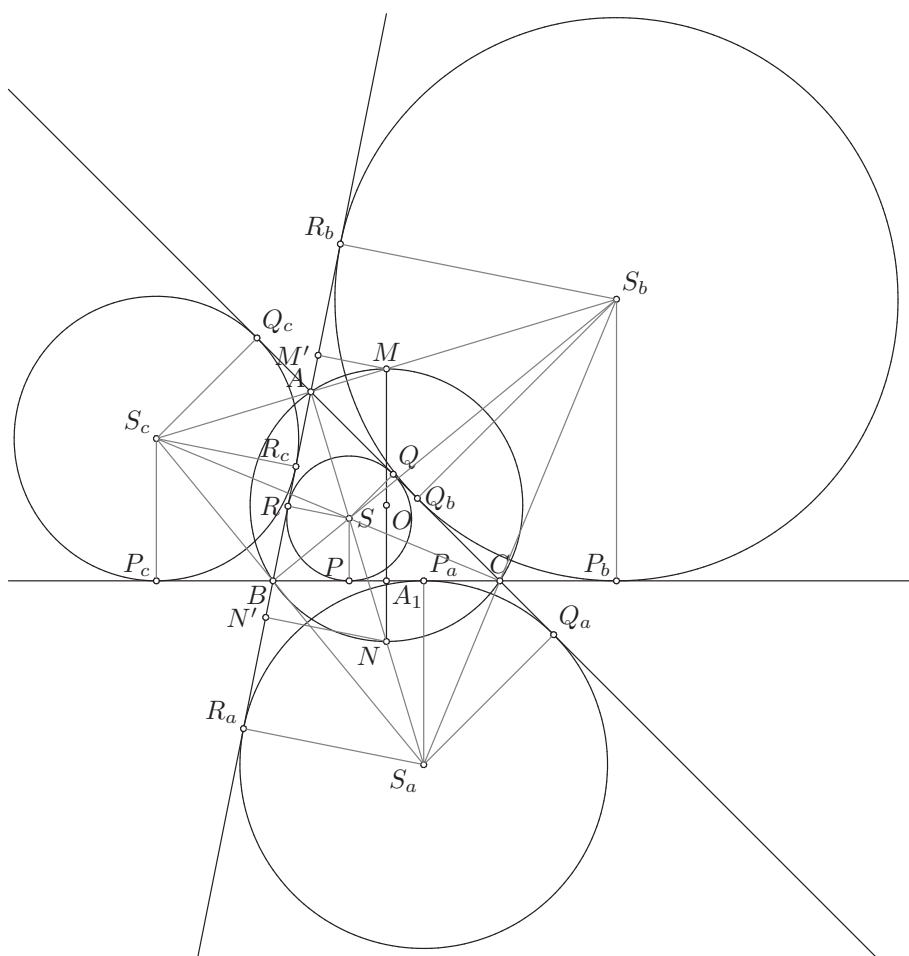
- 1) $\mathcal{B}(A, P', P_a), \quad \mathcal{B}(A, P, P'_a), \quad \mathcal{B}(P_c, A, P'_b), \quad \mathcal{B}(P_b, A, P'_c);$
- 2) $AQ_a = AR_a = p, \quad QQ_a = RR_a = a, \quad Q_bQ_c = R_bR_c = a;$
- 3) $AQ = AR = BR_c = BP_c = CP_b = CQ_b = p - a;$
- 4) $PP_a = b - c, \quad P_bP_c = b + c;$
- 5) $PA_1 = P_aA_1, \quad P_cA_1 = P_bA_1;$
- 6) $NS = NS_a = NB = NC, \quad MS_b = MS_c = MB = MC;$
- 7) $A_1M = \frac{1}{2}(\rho_b + \rho_c), \quad A_1N = \frac{1}{2}(\rho_a - \rho);$
- 8) $MM' = \frac{1}{2}(\rho_b - \rho_c), \quad NN' = \frac{1}{2}(\rho + \rho_a);$

9) $\rho_a + \rho_b + \rho_c = 4r + \rho$;

10) $AM' = \frac{1}{2}(b - c) = BN'$, $AN' = \frac{1}{2}(b + c) = BM'$;

11) $M'N' = b$.

Решење:



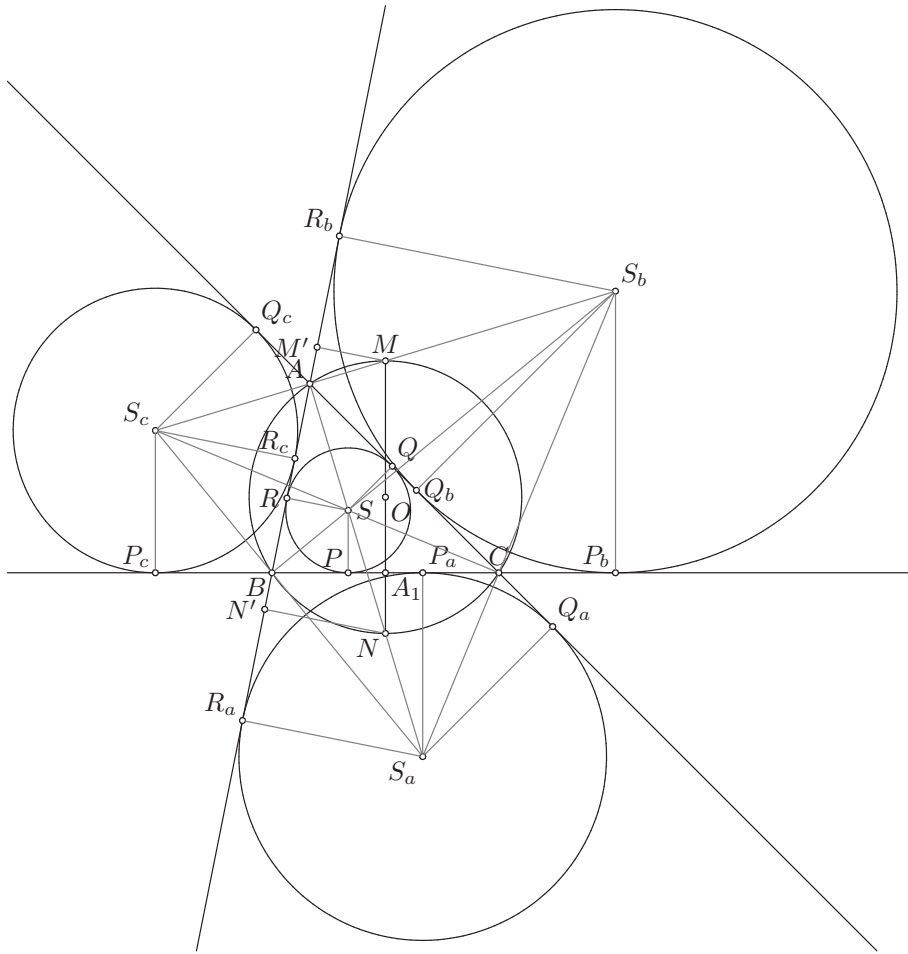
1) Ово тврђење нећемо сада доказивати, јер ћемо у доказу користити сличност. Доказ ћемо видети у следећем поглављу.

2) Доказујемо $AQ_a = AR_a = p$, $QQ_a = RR_a = a$, $Q_bQ_c = R_bR_c = a$. Дужи AQ_a и AR_a су тангентне дужи из тачке A на споља уписаном кругу k_a , па следи да су оне подударне, тј. да је $AQ_a = AR_a$. Да бисмо доказали да су те дужи једнаке полуобиму троугла $\triangle ABC$, посматрајмо збир $AQ_a + AR_a$. Имамо да је $AQ_a + AR_a = AC + CQ_a + AB + BR_a = AC + AB + CQ_a + BR_a$, па како је $CQ_a = CP_a$ и $BR_a = BP_a$, јер су то

тангентне дужи редом из тачака C, B на кругу k_a , следи да је

$$\begin{aligned} AQ_a + AR_a &= AC + AB + CQ_a + BR_a \\ &= b + c + CP_a + BP_a = b + c + BC \\ &= b + c + a = 2p, \end{aligned}$$

па је $AQ_a = AR_a = \frac{2p}{2} = p$, што је и требало доказати. Такође, јасно је да смо овим доказали да је и $BP_b = BR_b = p$, као и $CP_c = CQ_c = p$, јер смо већ напомињали да су сва три темена троугла равноправна.



Даље, како је $AQ = AR$, јер су то тангентне дужи из тачке A на уписаном кругу k , следи да је $QQ_a = AQ_a - AQ = AR_a - AR = RR_a$. Такође, пошто знамо да је $AQ_a = AR_a = p$, треба да докажемо да је $AQ = AR = p - a$, да би било $QQ_a = RR_a = AR_a - AR = p - (p - a) = a$. У том циљу, означимо $AQ = AR = x$, $BR = BP = y$ (тангентне дужи из

B на k) и $CP = CQ = z$ (тангентне дужи из C на k). Сада из очигледних једнакости

$$\begin{aligned} AR + RB &= AB \\ BP + PC &= BC \\ CQ + QA &= CA \end{aligned}$$

следи да имамо следећи систем линеарних алгебарских једначина са непознатим x, y, z :

$$\begin{aligned} x + y &= c \\ y + z &= a \\ z + x &= b. \end{aligned}$$

Саберимо све три једначине и добићемо $x + y + y + z + z + x = c + a + b$, односно $2(x + y + z) = 2p$, односно $x + y + z = p$. Сада лако добијамо да је

$$\begin{aligned} x &= x + y + z - (y + z) = p - a, \\ y &= x + y + z - (x + z) = p - b \quad \text{и} \\ z &= x + y + z - (x + y) = p - c. \end{aligned}$$

Дакле, доказали смо да је $AQ = AR = x = p - a$ (успут смо доказали и да је $BR = BP = y = p - b$ и $CP = CQ = z = p - c$), па је

$$QQ_a = RR_a = AR_a - AR = p - (p - a) = a.$$

Приметимо да је $Q_bQ_c = CQ_c - CQ_b$, а имамо да је $CQ_c = p$, као и да је $CQ_b = CP_b$ јер су то тангентне дужи из тачке C на кругу k_b . Како је $CP_b = BP_b - BC$ и $BP_b = p$, следи да је $CP_b = p - a$, па имамо да је

$$Q_bQ_c = CQ_c - CQ_b = p - CP_b = p - (p - a) = a.$$

Слично, приметимо да је $R_bR_c = BR_b - BR_c$, затим да је $BR_b = p$, да је $BR_c = BP_c = CP_c - CB$ и да је $CP_c = p$, па је $BR_c = CP_c - CB = p - a$, што значи да је

$$R_bR_c = BR_b - BR_c = p - (p - a) = a,$$

што је и требало доказати.

3) Доказујемо $AQ = AR = BR_c = BP_c = CP_b = CQ_b = p - a$. Све смо већ доказали док смо доказивали **2)**. Заиста, доказали смо да је

$AQ = AR = x = p - a$, затим да је $CQ_b = CP_b = p - a$ и коначно да је $BR_c = BP_c = p - a$. Дакле, заиста је

$$AQ = AR = BR_c = BP_c = CP_b = CQ_b = p - a.$$

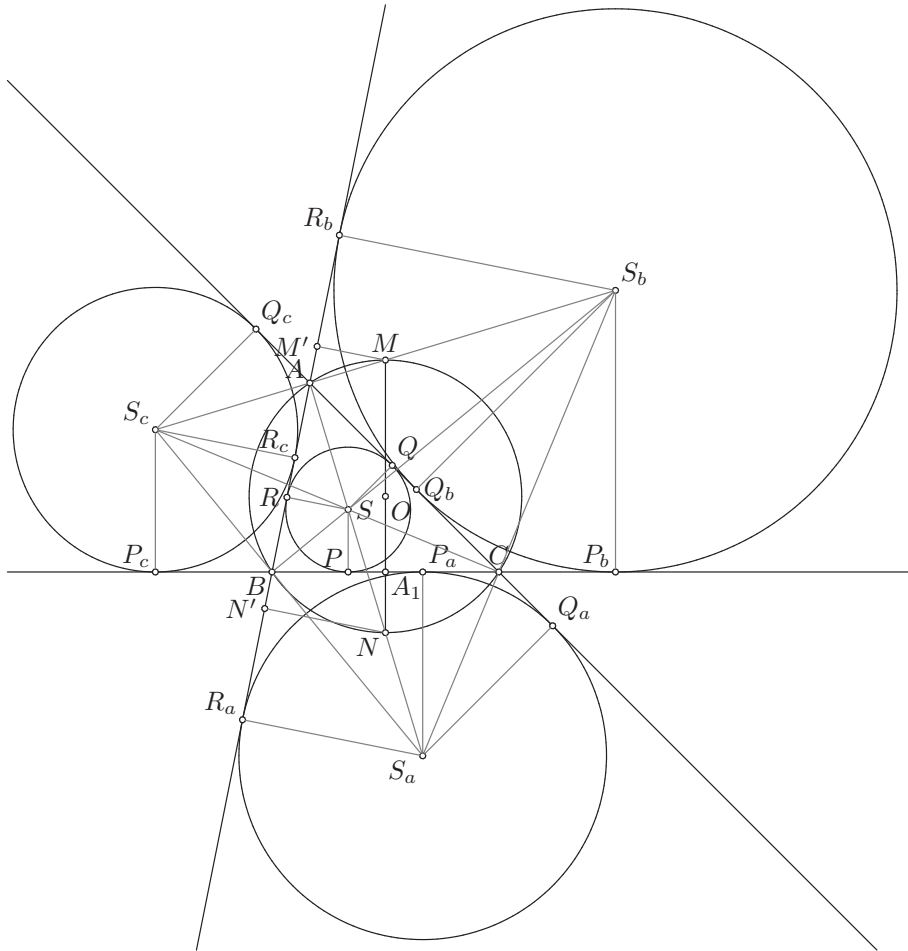
4) Доказујемо $PP_a = b - c$, $P_bP_c = b + c$. Имамо да је $PP_a = BP_a - BP$ и знамо да је $BP = y = p - b$. Како је $BP_a = BR_a$ јер су то тангентне дужи из B на кругу k_a и како је $BR_a = AR_a - AB = p - c$, следи да је

$$PP_a = BP_a - BP = BR_a - (p - b) = p - c - (p - b) = b - c.$$

Даље, имамо да је $P_bP_c = P_bC + CP_c$ и знамо да је $P_bC = p - a$ и да је $CP_c = p$, па следи да је

$$P_bP_c = P_bC + CP_c = p - a + p = 2p - a = a + b + c - a = b + c.$$

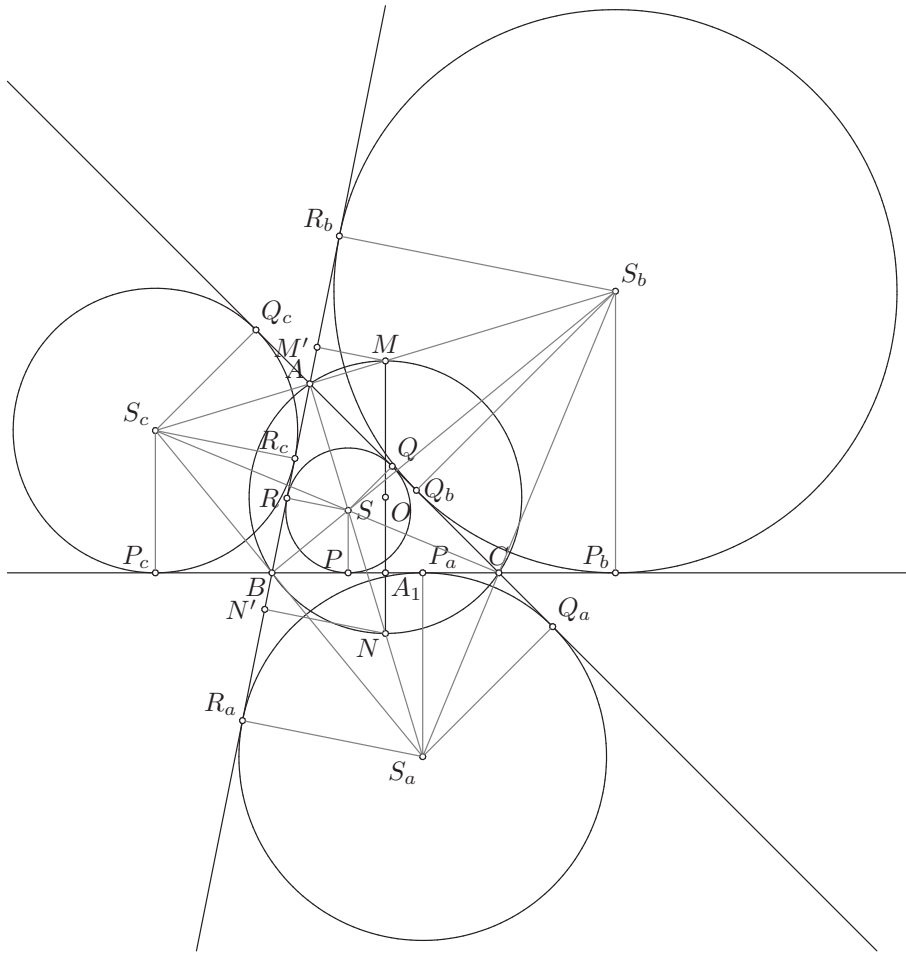
што је и требало доказати.



5) Доказујемо $PA_1 = P_aA_1$, $P_cA_1 = P_bA_1$. Практично треба доказати да је A_1 (средиште дужи BC) средиште дужи PP_a и P_bP_c . Имамо да је

$$\begin{aligned} PA_1 &= BA_1 - BP = \frac{1}{2}BC - (p - b) \\ &= \frac{a}{2} - \frac{a+b+c}{2} + b = \frac{a - a - b - c + 2b}{2} \\ &= \frac{b-c}{2} = \frac{1}{2}PP_a, \end{aligned}$$

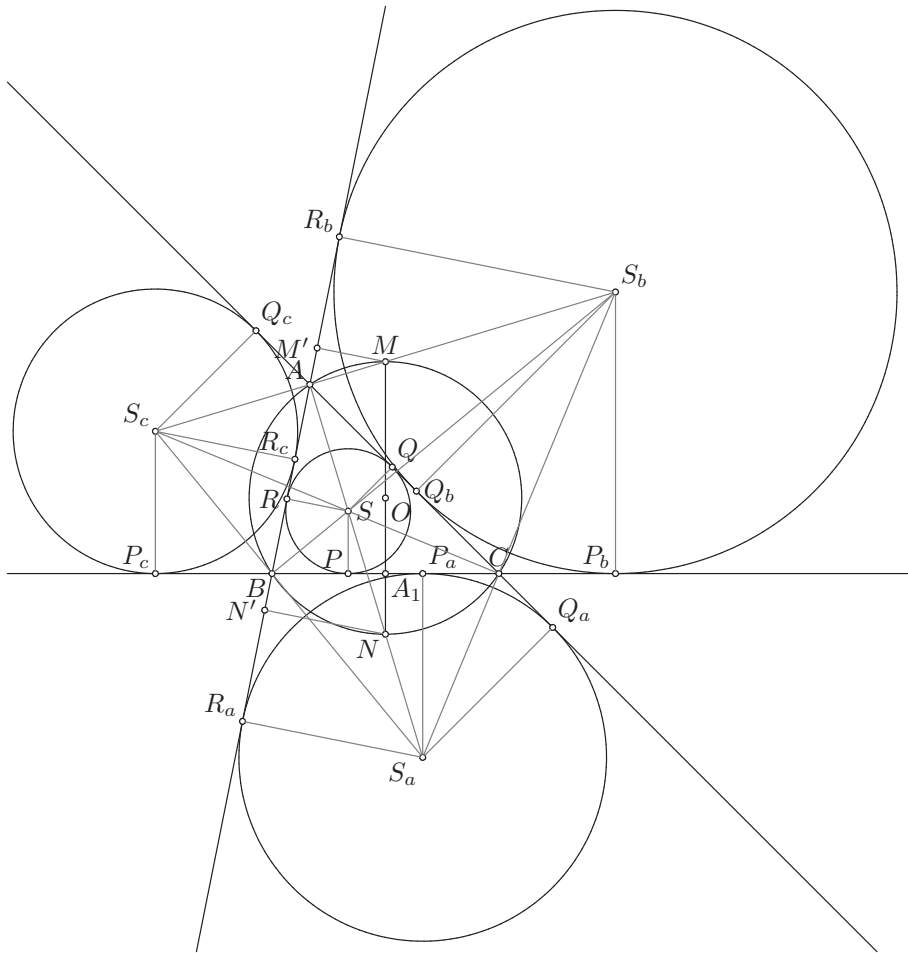
па је заиста A_1 средиште дужи PP_a , тј. $PA_1 = P_aA_1$.



Слично, имамо да је

$$\begin{aligned}
 P_c A_1 &= P_c B + B A_1 = p - a + \frac{1}{2} BC \\
 &= \frac{a + b + c}{2} - a + \frac{a}{2} = \frac{a + b + c - 2a + a}{2} \\
 &= \frac{b + c}{2} = \frac{1}{2} P_c P_b,
 \end{aligned}$$

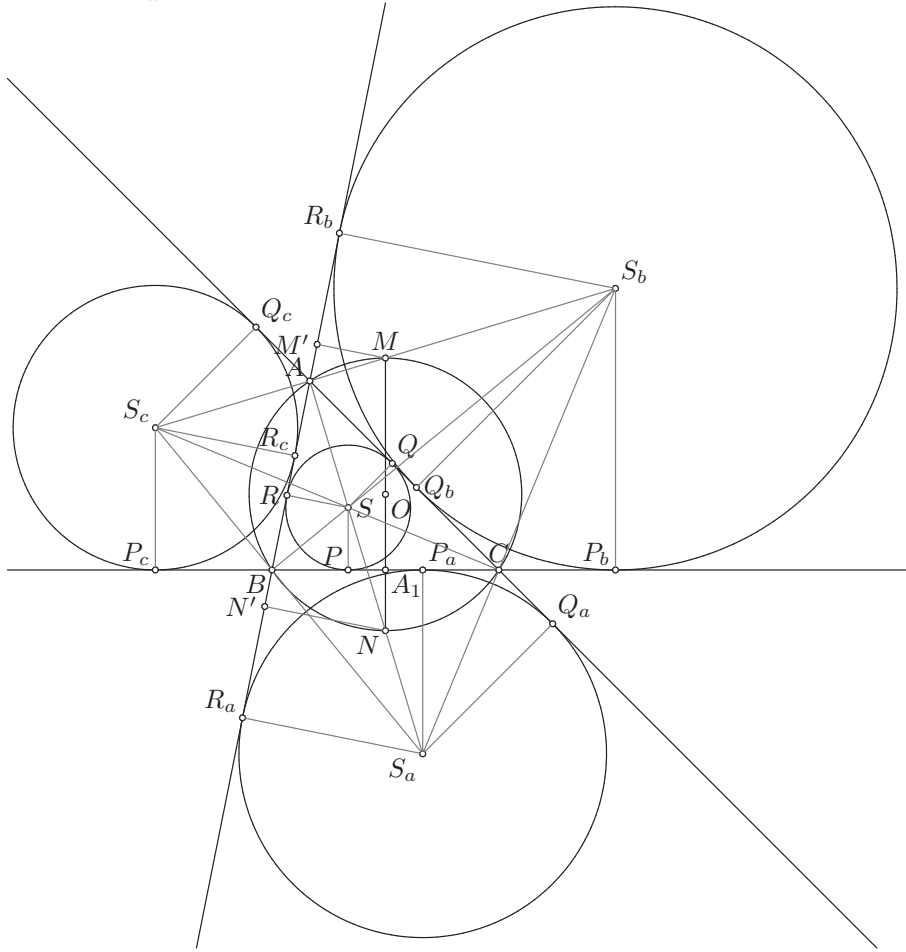
па је A_1 средиште дужи $P_c P_b$, односно важи $P_c A_1 = P_b A_1$.



6) Доказујемо $NS = NS_a = NB = NC$, $MS_b = MS_c = MB = MC$. Четвороугао SPP_aS_a је трапез јер је $SP \perp BC$ и $S_aP_a \perp BC$, па је $SP \parallel S_aP_a$. Такође, $A_1N \perp BC$ јер је права A_1N симетрала дужи BC , па је $A_1N \parallel SP$ и $A_1N \parallel S_aP_a$. Како је A_1 средиште PP_a , следи да је

A_1N средња линија неконвексног трапеца $SP P_a S_a$. Закључујемо да је N средиште дужи SS_a и $A_1N = \frac{1}{2}(S_a P_a - SP) = \frac{1}{2}(\rho_a - \rho)$.

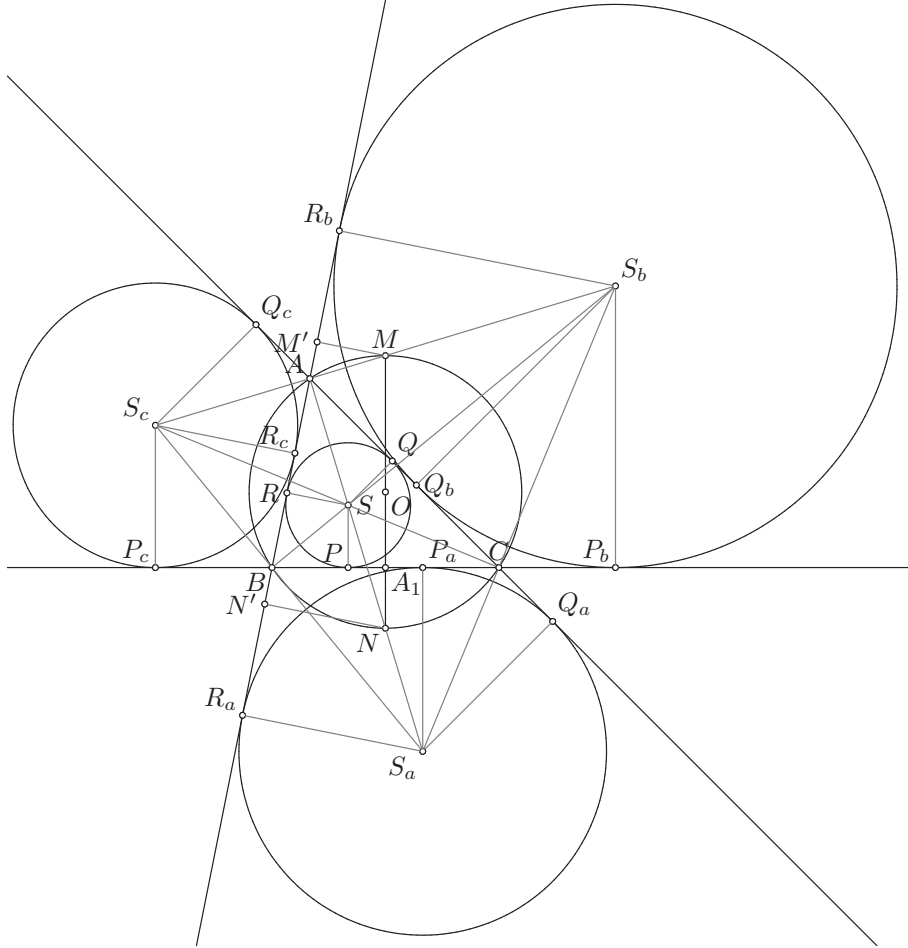
Троугао $\triangle SBS_a$ је правоугли с правим углом код темена B (SB је симетрала унутрашњег, а BS_a је симетрала спољашњег угла код темена B троугла $\triangle ABC$) и N је средиште хипотенузе SS_a , па је N центар описаног круга $\triangle SBS_a$. Следи да је $NS = NS_a = NB$, а како N припада симетрали дужи BC , следи да је $NB = NC$, па имамо да је $NS = NS_a = NB = NC$.



Докажимо да M припада бисекриси AS_b спољашњег угла $\angle CAR_b$ троугла $\triangle ABC$. Како је AS бисектриса унутрашњег угла $\angle BAC$ троугла $\triangle ABC$, следи да је $SA \perp AS_b$, тј. да је $\angle SAS_b = \frac{\pi}{2}$. Тачка N припада бисектриси AS , па је $\angle NAS_b = \frac{\pi}{2}$, а MN је пречник описаног круга l троугла $\triangle ABC$, па је $\angle NAM = \frac{\pi}{2}$ (периферијски угао над пречником). Одавде закључујемо да тачка M припада полуправој AS_b , што смо и тражили.

Четвороугао $S_cP_cP_bS_b$ је трапез, јер је $S_cP_c \perp BC$ и $S_bP_b \perp BC$, па је $S_cP_c \parallel S_bP_b$. Такође, $A_1M \perp BC$ јер је права A_1M симетрала дужи BC , па је $A_1M \parallel S_cP_c$ и $A_1M \parallel S_bP_b$. Тачка A_1 је средиште P_cP_b , па следи да је A_1M средња линија (конвексног) трапеза $S_cP_cP_bS_b$. Закључујемо да је M средиште дужи S_bS_c и $A_1M = \frac{1}{2}(S_bP_b + S_cP_c) = \frac{1}{2}(\rho_b + \rho_c)$.

Троугао $\triangle S_bBS_c$ је правоугли с правим углом код темена B (S_bB је симетрала унутрашњег, а BS_c је симетрала спољашњег угла код темена B троугла $\triangle ABC$) и M је средиште хипотенузе S_bS_c , па следи да је M центар описаног круга троугла $\triangle S_bBS_c$. Према томе, $MS_b = MS_c = MB$, а како је $MB = MC$ јер M припада симетрали дужи BC , па следи да је $MS_b = MS_c = MB = MC$.

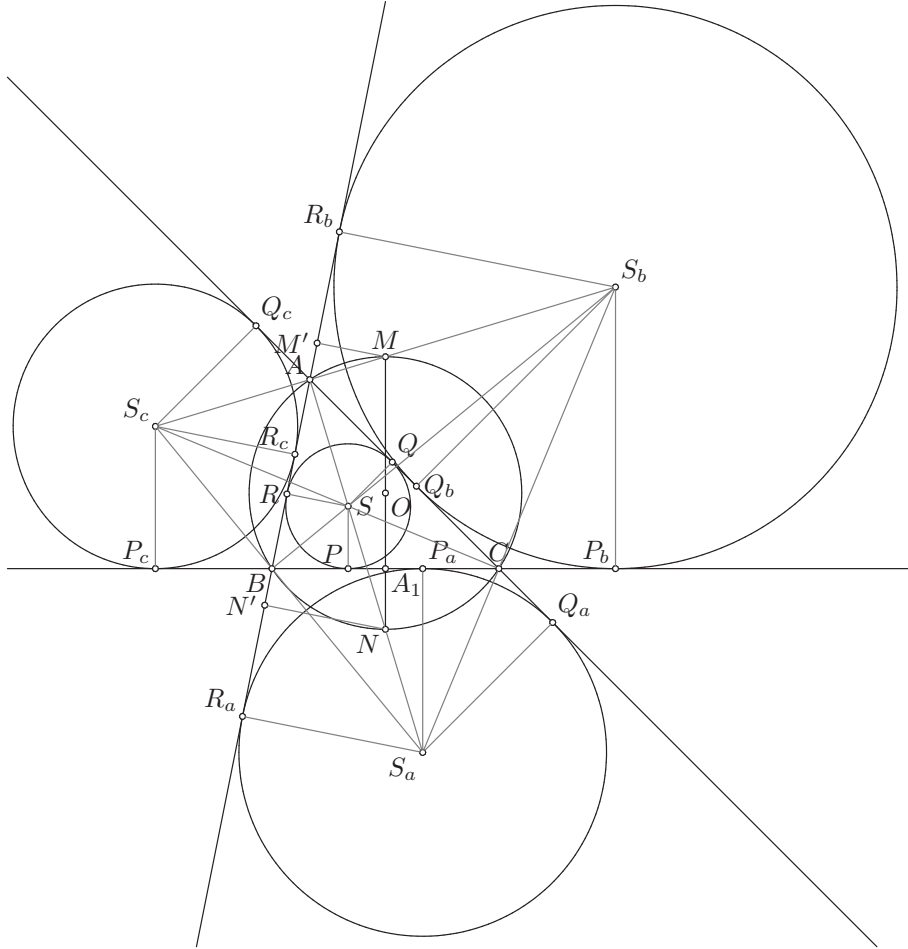


7) Доказујемо $A_1M = \frac{1}{2}(\rho_b + \rho_c)$, $A_1N = \frac{1}{2}(\rho_a - \rho)$, а то смо већ доказали док смо доказивали део **6**).

8) Доказујемо $MM' = \frac{1}{2}(\rho_b - \rho_c)$, $NN' = \frac{1}{2}(\rho + \rho_a)$. Четвороугао $S_cR_cR_bS_b$ је трапез јер је $S_cR_c \perp AB$ и $S_bR_b \perp AB$, па је $S_cR_c \parallel S_bR_b$. Такође, $MM' \perp AB$, па је $MM' \parallel S_cR_c$ и $MM' \parallel S_bR_b$, а M је средиште S_cS_b ,

па је MM' средња линија неконвексног трапеза $S_cR_cR_bS_b$. Следи да је $MM' = \frac{1}{2}(S_bR_b - S_cR_c) = \frac{1}{2}(\rho_b - \rho_c)$.

Четвороугао SRR_aS_a је трапез јер је $SR \perp AB$ и $S_aR_a \perp AB$, па је $SR \parallel S_aR_a$. Такође, $NN' \perp AB$, па је $NN' \parallel SR \parallel S_aR_a$ и N је средиште SS_a , па је NN' средња линија конвексног трапеза SRR_aS_a . Закључујемо да је $NN' = \frac{1}{2}(SR + S_aR_a) = \frac{1}{2}(\rho + \rho_a)$.



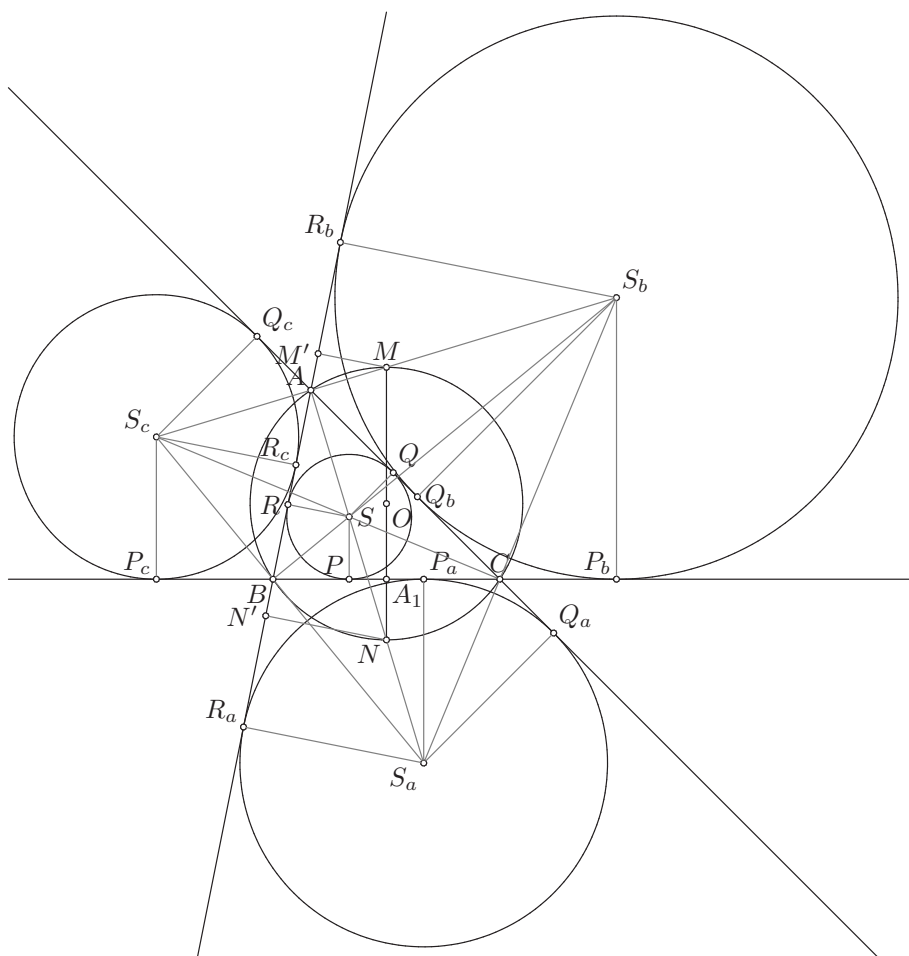
9) Доказујемо $\rho_a + \rho_b + \rho_c = 4r + \rho$. За пречник MN описаног круга l троугла $\triangle ABC$ имамо с једне стране да је $MN = 2r$, а с друге стране да је $MN = MA_1 + A_1N = \frac{1}{2}(\rho_b + \rho_c + \rho_a - \rho)$. Дакле, $2r = \frac{1}{2}(\rho_a + \rho_b + \rho_c - \rho)$, па је $4r = \rho_a + \rho_b + \rho_c - \rho$, односно $\rho_a + \rho_b + \rho_c = 4r + \rho$.

10) Доказујемо $AM' = \frac{1}{2}(b - c) = BN'$, $AN' = \frac{1}{2}(b + c) = BM'$. У делу 8) смо доказали да је MM' средња линија трапеза $S_cR_cR_bS_b$, па је M' средиште странице R_cR_b . Дакле, $R_cM' = \frac{1}{2}R_cR_b = \frac{a}{2}$. Даље имамо да је $BM' = BR_c + R_cM' = p - a + \frac{a}{2} = \frac{a+b+c-2a+a}{2} = \frac{1}{2}(b + c)$ и да је $AM' = BM' - BA = \frac{1}{2}(b + c) - c = \frac{1}{2}(b - c)$.

Такође, у делу **8)** доказали смо да је NN' средња линија трапеца SRR_aS_a , па је N' средиште RR_a . Следи да је $N'R_a = \frac{1}{2}RR_a = \frac{a}{2}$, па је $AN' = AR_a - N'R_a = p - \frac{a}{2} = \frac{a+b+c-a}{2} = \frac{1}{2}(b+c)$. Такође, следи да је $BN' = AN' - AB = \frac{1}{2}(b+c) - c = \frac{1}{2}(b-c)$.

Дакле, доказали смо да важи

$$AM' = BN' = \frac{1}{2}(b-c) \quad \text{и} \quad AN' = BM' = \frac{1}{2}(b+c).$$



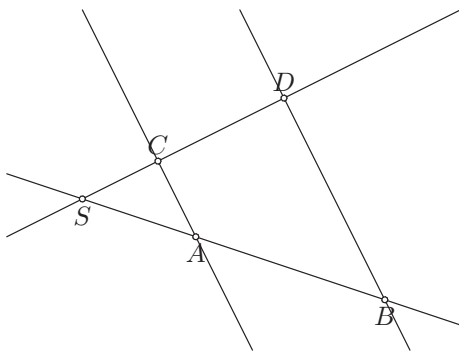
11) Доказујемо да је $M'N' = b$. Јасно је да је $M'N' = M'A + AN' = \frac{1}{2}(b-c + b+c) = b$ што је и требало доказати.

2 Сличност

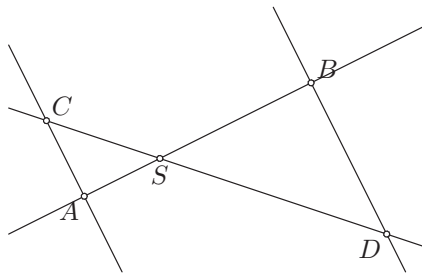
Подсетимо се Талесове теореме, једне од најстаријих теорема у математици.

Теорема 10 (Талес). *Нека се праве p, q секу у тачки S . Нека су A, B две различите тачке праве p , које су различите од S и нека су C, D две различите тачке праве q , које су различите од S . Тада је*

$$\begin{aligned} AC \parallel BD &\iff \frac{SA}{SB} = \frac{SC}{SD} = \frac{AC}{BD} \\ &\iff \frac{SA}{SC} = \frac{SB}{SD} = \frac{AB}{CD}. \end{aligned}$$



При томе, уопште не мора да важи распоред тачака као што је на овој слици. Теорема ће важити и ако имамо неки други распоред тачака.



Искористимо Талесову теорему да решимо део **1)** Великог задатка (задатка 1.12).

1.12. (Велики задатак) Ако са A_1, B_1 и C_1 обележимо средишта ивица $BC = a, CA = b, AB = c$ троугла ABC ($b > c$), са p полуобим тог троугла, са $l(O, r)$ описани круг тог троугла, са P, Q, R тачке у којима уписани круг $k(S, \rho)$ додирује праве BC, CA, AB , са P_i, Q_i, R_i ($i = a, b, c$) тачке у којима споља уписани круг $k_i(S_i, \rho_i)$ додирује редом праве BC, CA, AB ,

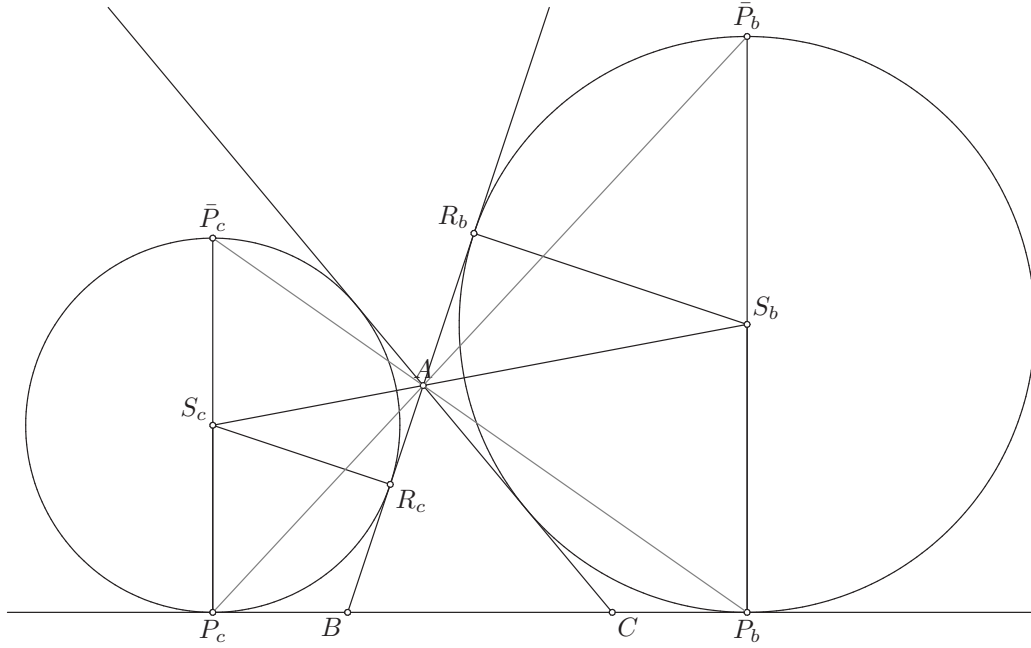
$$1) \mathcal{B}(A, P', P_a), \quad \mathcal{B}(A, P, P'_a), \quad \mathcal{B}(P_c, A, P'_b), \quad \mathcal{B}(P_b, A, P'_c).$$

Праве SS_a и QQ_a се секу у тачки A и важи $SQ \perp AC$ и $S_aQ_a \perp AC$, па је $SQ \parallel S_aQ_a$. Према Талесовој теорему следи да је $\frac{AS}{AS_a} = \frac{SQ}{S_aQ_a} = \frac{\rho}{\rho_a}$. Такође, имамо и да се праве SS_a и $\bar{P}P_a$ секу у тачки A и да је $S\bar{P} \perp BC$ и $S_aP_a \perp BC$, па је $S\bar{P} \parallel S_aP_a$. Пошто важи $\mathcal{B}(A, S, S_a)$, према Талесовој теорему следи да важи $\mathcal{B}(A, \bar{P}, P_a)$ и $\frac{S\bar{P}}{S_aP_a} = \frac{AS}{AS_a} = \frac{\rho}{\rho_a}$. Међутим, важи $S_aP_a = \rho_a$, па је $\frac{S\bar{P}}{\rho_a} = \frac{\rho}{\rho_a}$, одакле закључујемо да је $S\bar{P} = \rho$, односно да је $P' = \bar{P}$. Дакле, важи $\mathcal{B}(A, P', P_a)$.

39

а тачка P_a не припада правој AP , следи да је довољно доказати да је $S_a\bar{P}_a = \rho_a$ да би било $P'_a = \bar{P}_a$.

Већ смо доказали да је $\frac{AS}{AS_a} = \frac{\rho}{\rho_a}$. Праве SS_a и $P\bar{P}_a$ се секу у тачки A и из $SP \perp BC$ и $S_a\bar{P}_a \perp BC$ закључујемо да је $SP \parallel S_a\bar{P}_a$. Пошто важи $\mathcal{B}(A, S, S_a)$, на основу Талесове теореме следи да важи $\mathcal{B}(A, P, \bar{P}_a)$ и $\frac{S_a\bar{P}_a}{SP} = \frac{AS_a}{AS} = \frac{\rho_a}{\rho}$. Међутим, важи $SP = \rho$, па је $\frac{S_a\bar{P}_a}{\rho} = \frac{\rho_a}{\rho}$, одакле закључујемо да је $S_a\bar{P}_a = \rho_a$, тј. $P'_a = \bar{P}_a$. Дакле, важи $\mathcal{B}(A, P, P'_a)$.



Нека је $\bar{P}_b$ пресечна тачка праве S_bP_b и праве AP_c и нека је $\bar{P}_c$ пресечна тачка праве S_cP_c и праве AP_b . Довољно је доказати да важи $\mathcal{B}(P_c, A, \bar{P}_b)$ и $P'_b = \bar{P}_b$, као и да важи $\mathcal{B}(P_b, A, \bar{P}_c)$ и $P'_c = \bar{P}_c$. Како тачке P_b, P'_b припадају споља уписаном кругу k_b троугла $\triangle ABC$ и правој S_bP_b и важи $S_bP_b = S_bP'_b = \rho_b$, а тачка P_b не припада правој AP_c , следи да је довољно доказати да је $S_b\bar{P}_b = \rho_b$ да би било $P'_b = \bar{P}_b$. Слично, како тачке P_c, P'_c припадају споља уписаном кругу k_c троугла $\triangle ABC$ и правој S_cP_c и важи $S_cP_c = S_cP'_c = \rho_c$, а тачка P_c не припада правој AP_b , следи да је довољно доказати да је $S_c\bar{P}_c = \rho_c$ да би било $P'_c = \bar{P}_c$.

Праве S_bS_c и R_bR_c се секу у тачки A и важи $S_bR_b \perp AB$ и $S_cR_c \perp AB$, па је $S_bR_b \parallel S_cR_c$. Према Талесовој теореме следи да је $\frac{AS_b}{AS_c} = \frac{S_bR_b}{S_cR_c} = \frac{\rho_b}{\rho_c}$. Такође, имамо и да се праве S_bS_c и $\bar{P}_bP_c$ секу у тачки A и да је $S_b\bar{P}_b \perp BC$ и $S_cP_c \perp BC$, па је $S_b\bar{P}_b \parallel S_cP_c$. Пошто важи $\mathcal{B}(S_c, A, S_b)$, према Талесовој теореме следи да важи $\mathcal{B}(P_c, A, \bar{P}_b)$ и $\frac{S_b\bar{P}_b}{S_cP_c} = \frac{AS_b}{AS_c} = \frac{\rho_b}{\rho_c}$. Међутим, $S_cP_c = \rho_c$, па је $\frac{S_b\bar{P}_b}{\rho_c} = \frac{\rho_b}{\rho_c}$, одакле закључујемо да је $S_b\bar{P}_b = \rho_b$, односно да је $P'_b = \bar{P}_b$.

Дакле, важи $\mathcal{B}(P_c, A, P'_b)$.

Праве $S_b S_c$ и $P_b \bar{P}_c$ се секу у тачки A и из $S_b P_b \perp BC$ и $S_c \bar{P}_c \perp BC$ закључујемо да је $S_b P_b \parallel S_c \bar{P}_c$. Пошто важи $\mathcal{B}(S_b, A, S_c)$, из Талесове теореме следи да важи $\mathcal{B}(P_b, A, \bar{P}_c)$ и $\frac{S_c \bar{P}_c}{S_b P_b} = \frac{AS_c}{AS_b} = \frac{\rho_c}{\rho_b}$. Међутим, важи $S_b P_b = \rho_b$, па је $\frac{S_c \bar{P}_c}{\rho_b} = \frac{\rho_c}{\rho_b}$, одакле закључујемо да је $S_c \bar{P}_c = \rho_c$, тј. $P'_c = \bar{P}_c$. Дакле, важи $\mathcal{B}(P_b, A, P'_c)$.

Као што смо имали Ставове о подударности троуглова, постоје и Ставови о сличности троуглова. Што се тиче њихових формулација, имаћемо странице и углове, и то баш као код ставова о подударности (нпр. неке две и њима захваћен угао), с тим што имамо у виду да сличност чува *подударности ујлова и односе сјраница*.

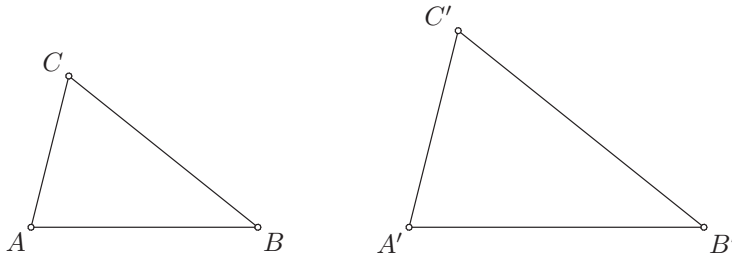
Став 2. Нека су даћи троуглови $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C'$. Ако важи нешто од следећег:

$$1^\circ \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}, \angle BAC = \angle B'A'C';$$

$$2^\circ \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'};$$

$$3^\circ \angle BAC = \angle B'A'C', \angle ABC = \angle A'B'C';$$

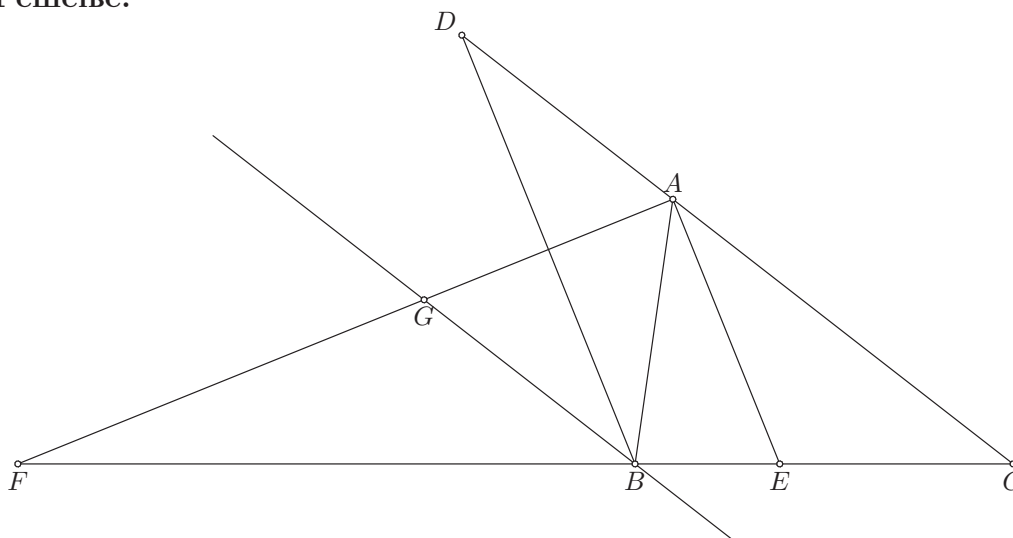
4° $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$, $\angle ACB = \angle A'C'B'$, а ујлови $\angle ABC$ и $\angle A'B'C'$ су оба оштра, оба права или оба тупа;
онда је $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.



Сада прелазимо на задатке из сличности. Први задатак је Теорема о симетрали угла. Ова теорема је веома важна и треба је знати, јер ће се користити и у даљим задацима (нпр. као што се средња линија користи у многим другим задацима).

1. (Теорема о симетрали угла) Ако су E и F тачке у којима бисектрисе унутрашњег и спољашњег угла код темена A троугла $\triangle ABC$ ($AB < AC$) секу праву BC доказати $BE : CE = BF : CF = AB : AC$.

Решение:



Идеја је да применимо Талесову теорему. Да бисмо пронашли колики је однос $BE : CE$, довољно је да нађемо колики је однос $CE : EB$, па потражимо на полуправој CA тачку D такву да важи $\mathcal{B}(C, A, D)$ и $AD = AB$. Уколико докажемо да је $DB \parallel AE$, према Талесовој теореме ће бити $CE : EB = CA : AD$, па ће одатле следити $BE : CE = AD : AC$. Како је $AD = AB$, добићемо да је $BE : CE = AB : AC$, а то и треба доказати.

Уколико докажемо да је $\angle BDA = \angle EAC = \frac{\alpha}{2}$, следиће да су то углови с паралелним крацима, па ће бити $DB \parallel AE$. Како је $AD = AB$, следи да је троугао $\triangle ADB$ једнакокрак, па је $\angle BDA = \angle DBA$. Означимо те углове са φ . Угао $\angle BAC = \alpha$ је спољашњи угао троугла $\triangle ADB$, па је једнак збиру унутрашњих несуседних углова $\angle BDA = \varphi$ и $\angle DBA = \varphi$. Дакле, $\alpha = \varphi + \varphi = 2\varphi$, па је $\varphi = \frac{\alpha}{2}$. Дакле, доказали смо да је $\angle BDA = \frac{\alpha}{2}$, па је $DB \parallel AE$, а одатле следи да је $BE : CE = AB : AC$.

Сада желимо да нађемо однос $BF : CF = FB : FC$, па уочимо праву која садржи B и паралелна је са правом AC . Означимо са G њен пресек са правом FA . Талесова теорема нам тада даје да је $FB : FC = BG : CA$, па је довољно доказати да је $BG = AB$. Права AG је симетрала угла $\angle BAD = \pi - \alpha$ (то је спољашњи угао код темена A троугла $\triangle ABC$), па је $\angle GAB = \frac{\pi - \alpha}{2}$. Из $BG \parallel AC$ закључујемо да су углови $\angle GBA$ и $\angle BAC = \alpha$ углови с паралелним крацима, па су они подударни. Дакле,

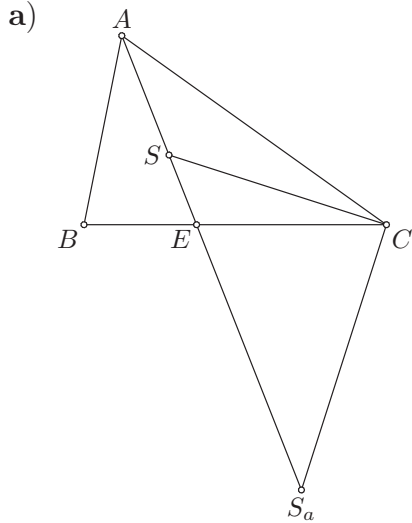
$\angle GBA = \alpha$. Одавде је $\angle BGA = \pi - \angle GBA - \angle GAB = \pi - \alpha - \frac{\pi - \alpha}{2} = \frac{\pi - \alpha}{2}$, па је $\angle BGA = \angle GAB$. Дакле, троугао $\triangle BAG$ је једнакокраки, па је $BG = BA$. Овим је доказ завршен, јер је сада $BF : CF = BG : AC = AB : AC$, што је и требало доказати.

Видимо да је понекад потребно „доцртати” неке тачке и праве да би се лакше дошло до решења задатка. Овде су тачка D и права BG добијене у жељи да се искористи Талесова теорема.

2. Нека су E и F тачке из претходног задатка. Доказати:

- а) $AS : SE = AS_a : S_aE = (AB + AC) : BC$;
- б) $AE : SE = (AB + AC + BC) : BC$, $AE : S_aE = (AB + AC - BC) : BC$;
- в) $AS_b : S_bF = AS_c : S_cF = (AC - AB) : BC$.

Решење: Овде су тачке E, F из 1. задатка, а тачке S, S_a, S_b, S_c су тачке из Великог задатка, дакле центри редом уписаног круга k и споља уписаних кругова k_a, k_b, k_c .



Применом Теореме о симетрали угла (1. задатка) на троугао $\triangle CAE$ закључујемо да је $AS : SE = AS_a : S_aE = AC : CE$. Такође, знамо да је $BE : CE = AB : AC$ (1. задатак), па је $AC : CE = AB : BE$. Означимо тај однос са λ , дакле нека је $\frac{AC}{CE} = \frac{AB}{BE} = \lambda$. Одавде је $AC = \lambda CE$ и $AB = \lambda BE$, па је $AB + AC = \lambda(BE + CE) = \lambda BC$. Следи да је $\lambda = (AB + AC) : BC$, а како је $AS : SE = AS_a : S_aE = AC : CE = \lambda$, следи да је $AS : SE = AS_a : S_aE = (AB + AC) : BC$.

б) Како је $AE = AS + SE$, дељењем са SE добијамо да је

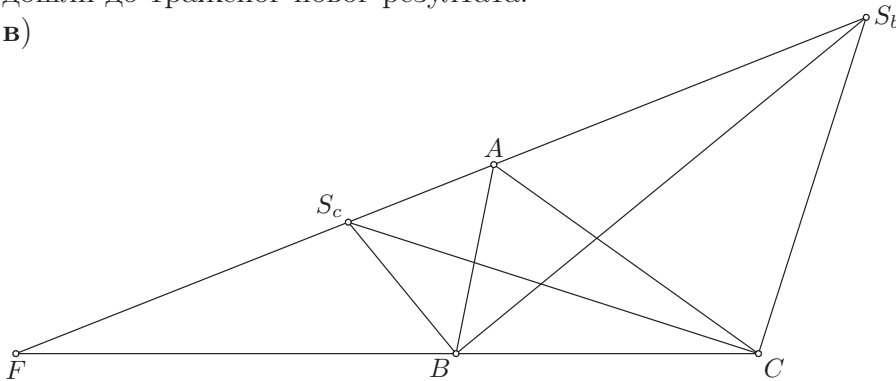
$$\begin{aligned}\frac{AE}{SE} &= \frac{AS + SE}{SE} = \frac{AS}{SE} + \frac{SE}{SE} \\ &= \frac{AS}{SE} + 1 = \frac{AB + AC}{BC} + 1 \\ &= \frac{AB + AC}{BC} + \frac{BC}{BC} = \frac{AB + AC + BC}{BC}.\end{aligned}$$

Слично, како је $AE = AS_a - S_aE$, дељењем са S_aE добијамо да је

$$\begin{aligned}\frac{AE}{S_aE} &= \frac{AS_a - S_aE}{S_aE} = \frac{AS_a}{S_aE} - \frac{S_aE}{S_aE} \\ &= \frac{AS_a}{S_aE} - 1 = \frac{AB + AC}{BC} - 1 \\ &= \frac{AB + AC}{BC} - \frac{BC}{BC} = \frac{AB + AC - BC}{BC}.\end{aligned}$$

Овде смо само користили претходне резултате и уз мало рачунања дошли до траженог новог резултата.

в)



Применом Теореме о симетрали угла на троугао $\triangle BAF$ добијамо да је $AS_b : S_bF = AS_c : S_cF = AB : BF$. Такође, применом те теореме на троугао $\triangle CAF$ добијамо да је $AS_b : S_bF = AS_c : S_cF = AC : CF$. Означимо тражени непознати однос са λ , дакле $AS_b : S_bF = AS_c : S_cF = \lambda$. На основу добијених резултата имамо да је $AB : BF = AC : CF = \lambda$. Одавде следи да је $AB = \lambda BF$ и $AC = \lambda CF$, па одузимањем добијамо да је $AC - AB = \lambda(CF - BF) = \lambda BC$. Дакле, $\lambda = (AC - AB) : BC$, па следи тражени резултат $AS_b : S_bF = AS_c : S_cF = (AC - AB) : BC$.

3. Доказати (важе ознаке из Великог задатка):

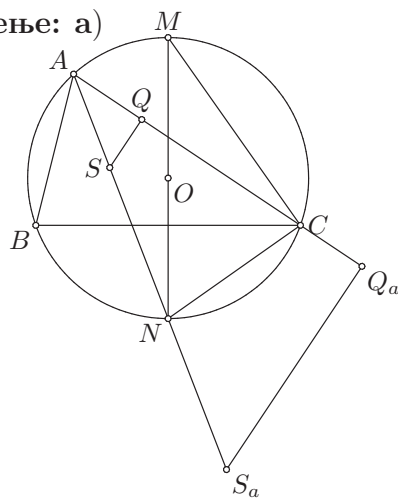
а) $SA \cdot SN = 2r\rho$;

б) $S_aA \cdot S_aN = 2r\rho_a$;

в) $S_bA \cdot S_bM = 2r\rho_b$;

г) $S_cA \cdot S_cM = 2r\rho_c$.

Решење: а)



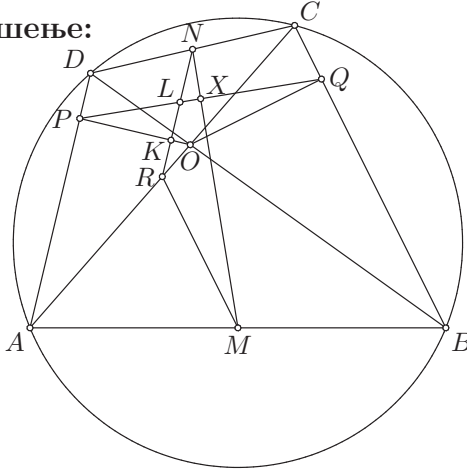
Сличност даје односе, а не производе дужи, али можемо те односе помножити дужима које су у имениоцима и доћи до производа. Како нам се јавља полупречник уписаног круга, морамо уочити подножје нормале из центра S уписаног круга на некој од страница троугла $\triangle ABC$, нпр. подножје Q на страници AC . Пошто нам се јавља $2r$, тј. пречник описаног круга, и пошто већ имамо тачку N , уочимо тачку M из Великог задатка, јер тада имамо пречник $MN = 2r$.

Сада имамо да је $\angle SAQ = \angle NAC = \angle NMC$ (периферијски над луком $\widehat{NC}$) и да су углови $\angle SQA$ и $\angle NCM$ прави ($\angle NCM$ је периферијски над пречником NM), па је $\angle SQA = \angle NCM$. Следи да је $\triangle ASQ \sim \triangle MNC$, па је $SA : NM = SQ : NC$. Множењем са NM и NC добијамо да је $SA \cdot NC = NM \cdot SQ$. Како је $NM = 2r$, $SQ = \rho$ и $NC = SN$ (Велики задатак, став 6)), следи да је $SA \cdot SN = 2r\rho$, што је и требало доказати.

б) Слично као у делу а), уочимо тачке M, Q_a из Великог задатка. Имамо да је $\angle S_aAQ_a = \angle NAC = \angle NMC$ (периферијски над луком $\widehat{NC}$) и да су углови $\angle S_aQ_aA$ и $\angle NCM$ прави, па је $\angle S_aQ_aA = \angle NCM$. Следи да је $\triangle AS_aQ_a \sim \triangle MNC$, па је $S_aA : NM = S_aQ_a : NC$, односно, после множења, $S_aA \cdot NC = NM \cdot S_aQ_a$. Заменом $NM = 2r$, $S_aQ_a = \rho_a$ и $NC = S_aN$ (Велики задатак, став 6)) добијамо $S_aA \cdot S_aN = 2r\rho_a$.

4. Нека је $ABCD$ тетиван четвороугао, M и N редом средишта страница AB и CD , O пресек дијагонала AC и BD , а P и Q нормалне пројекције тачке O редом на AD и BC . Доказати да је $MN \perp PQ$.

Решење:



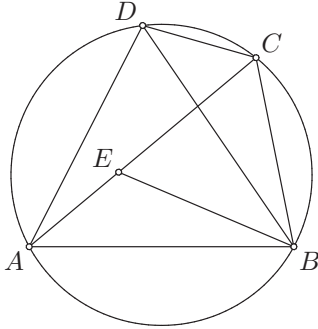
Нека је R средиште дијагонале AC . Тада је RM средња линија троугла $\triangle ABC$, па је $RM \parallel BC$ и $RM = \frac{1}{2}BC$, а RN је средња линија троугла $\triangle ACD$, па је $RN \parallel AD$ и $RN = \frac{1}{2}AD$. Даље, како је $OQ \perp BC$ и $OP \perp AD$, следи да је $RM \perp OQ$ и $RN \perp OP$, па је $\angle MRN = \angle QOP$ (углови с нормалним крацима). Поред тога имамо да је $\frac{MR}{RN} = \frac{\frac{1}{2}BC}{\frac{1}{2}AD} = \frac{BC}{AD}$, па је довољно да докажемо да је $OQ : OP = BC : AD$ да би следило да је $\triangle MRN \sim \triangle QOP$.

Троуглови $\triangle AOD$ и $\triangle BOC$ су слични, јер имају подударне углове. Заиста, $\angle AOD = \angle BOC$ јер су то унакрсни углови и $\angle ADO = \angle BCO$ (периферијски над луком $\widehat{AB}$). Код сличних троуглова висине се односе исто као и странице, па је $OQ : OP = BC : AD$ (OQ је висина троугла BOC , а OP је висина троугла AOD). Дакле, $MR : RN = BC : AD = OQ : OP$ и $\angle MRN = \angle QOP$, па је $\triangle MRN \sim \triangle QOP$. Следи да је $\angle RNM = \angle OPQ$ и $\angle RMN = \angle OQP$.

Означимо са K, L редом пресечне тачке праве RN са правима OP и QP и означимо са X пресечну тачку праве MN и праве PQ . Углови $\angle KPL$ и $\angle XNL$ су међусобно подударни, јер је $\angle KPL = \angle OPQ$ и $\angle XNL = \angle MNR$, а $\angle OPQ = \angle MNR$. Такође, $\angle KLP = \angle XLN$, јер су то унакрсни углови. Следи да троуглови $\triangle PKL$ и $\triangle NXL$ имају подударне углове, па је $\angle LXN = \angle LKP$. Међутим, $\angle LKP = \frac{\pi}{2}$, јер је то угао између праве NR и праве OP , а важи $NR \perp OP$. Према томе, $\angle LXN = \frac{\pi}{2}$, а то је угао између праве PQ и праве MN , па закључујемо да је $MN \perp PQ$.

5. Птоломејева теорема. Ако је $ABCD$ конвексан и тетиван четворо-угао, доказати да важи $AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$.

Доказ:



Идеја је да производ $AC \cdot BD$ напишемо као збир два сабирка, од којих ће један бити једнак са $AB \cdot CD$, а други са $AD \cdot BC$. Ако на дијагонали AC уочимо неку тачку E , онда је $AC = AE + EC$, па је $AC \cdot BD = (AE + EC) \cdot BD = AE \cdot BD + EC \cdot BD$. Треба погодено одабрати тачку E тако да нпр. буде $AE \cdot BD = AB \cdot CD$ и $EC \cdot BD = AD \cdot BC$, односно $AE : CD = AB : BD$ и $EC : AD = BC : BD$. Зато узмемо тачку E на дијагонали AC такву да је $\angle ABE = \angle DBC$.

Како је $\angle BAE = \angle BDC$ (периферијски над $\widehat{BC}$) и $\angle ABE = \angle DBC$, следи да је $\triangle ABE \sim \triangle DBC$, па је $AE : DC = AB : DB$. Дакле, важи $AE \cdot BD = AB \cdot CD$. Даље, имамо да је $\angle ECB = \angle ADB$ (периферијски над $\widehat{AB}$) и $\angle EBC = \angle EBD + \angle DBC = \angle EBD + \angle ABE = \angle ABD$, па је $\triangle EBC \sim \triangle ABD$. Следи да је $EC : AD = BC : BD$, па добијамо $EC \cdot BD = AD \cdot BC$. Сабирањем добијамо да је

$$\begin{aligned} AE \cdot BD + EC \cdot BD &= AB \cdot CD + AD \cdot BC \\ (AE + EC) \cdot BD &= AB \cdot CD + AD \cdot BC \\ AC \cdot BD &= AB \cdot CD + AD \cdot BC, \end{aligned}$$

што је и требало доказати. □

Дефиниција 14. Нека је $\mathcal{F}$ фамилија правих неке равни. Ако

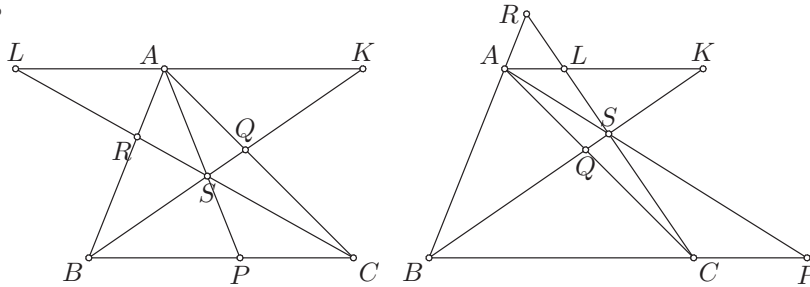
- 1) постоји тачка S која припада свим правима фамилије $\mathcal{F}$ и све праве које садрже тачку S припадају фамилији $\mathcal{F}$;
 - 2) постоји права s која је паралелна свим правима фамилије $\mathcal{F}$ и све праве које су паралелне правој s припадају фамилији $\mathcal{F}$;
- онда такву фамилију $\mathcal{F}$ зовемо *праменом* *правих*. Ако прамен $\mathcal{F}$ задовољава услов 1), кажемо да је то прамен *конкурентних* правих, а ако прамен $\mathcal{F}$ задовољава услов 2), кажемо да је то прамен *паралелних* правих.

Чевина теорема. Ако су P, Q, R редом тачке правих BC, CA, AB где су A, B, C три неколинеарне тачке, тада праве AP, BQ, CR припадају једном прамену ако и само ако важи $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = 1$.

Доказ: Означимо $\Pi = \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}}$. У формулацији теореме требало би додати услов да се тачке P, Q, R разликују од темена A, B, C троугла $\triangle ABC$, јер иначе број Π или није добро дефинисан (ако је нпр. $P = C$, онда није дефинисано $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}}$), или је једнак 0 (ако је нпр. $P = B$).

$\Rightarrow$: Нека су AP, BQ, CR праве једног прамена.

1°



Нека је S заједничка пресечна тачка правих AP, BQ, CR и нека су K, L редом пресечне тачке правих BQ, CR са правом која садржи тачку A и паралелна је са BC . Тада је на основу Талесове теореме

$$\begin{aligned} \frac{BP}{PC} &= \frac{KA}{AL} \\ \frac{CQ}{QA} &= \frac{CB}{KA} \\ \frac{AR}{RB} &= \frac{AL}{CB}, \end{aligned}$$

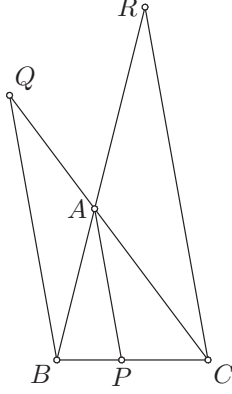
па добијамо да је

$$|\Pi| = \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = \frac{KA}{AL} \cdot \frac{CB}{KA} \cdot \frac{AL}{CB} = 1.$$

Ако је тачка S у унутрашњости троугла $\triangle ABC$, онда тачке P, Q, R припадају редом *дужима* BC, CA, AB , па је $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} > 0$, $\frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} > 0$ и $\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} > 0$. Дакле, тада је $\Pi > 0$. Тачка S не може припадати ни правој AB , ни правој AC , нити правој BC , јер ће тада нека од тачака P, Q, R бити теме троугла. Према томе, тачка S не припада троуглу $\triangle ABC$, па остаје још случај када је у спољашњости троугла $\triangle ABC$ (и, наравно, не припада ни правој AB , ни правој AC нити правој BC). Тада ће тачно једна од тачака P, Q, R припадати одговарајућој дужи (BC, AC, AB). Нпр. нека тачка Q припада дужи AC , као што је на слици. Тада је $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} < 0$, $\frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} > 0$

и $\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} < 0$, па је поново $\Pi > 0$. Слично добијамо да је $\Pi > 0$ и у преостала два случаја (P припада дужи BC , односно R припада дужи AB). Дакле, имамо $\Pi > 0$ и $|\Pi| = 1$, па следи да је $\Pi = 1$.

2°



Нека су праве AP, BQ, CR међусобно паралелне. На основу Талесове теореме је

$$\frac{CQ}{QA} = \frac{CB}{BP}$$

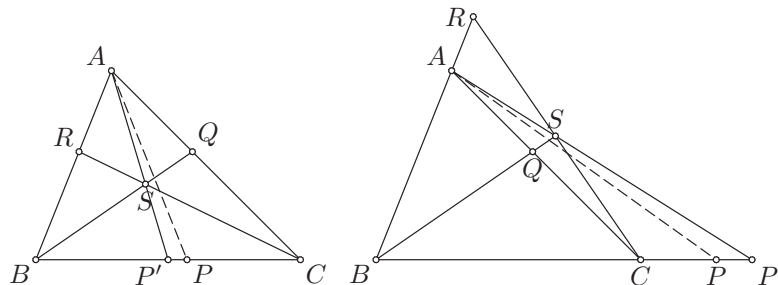
$$\frac{AR}{RB} = \frac{PC}{CB},$$

па је

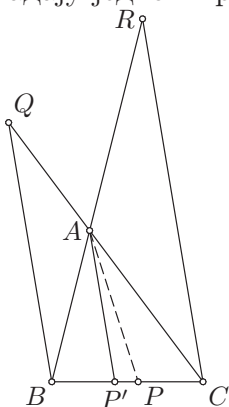
$$|\Pi| = \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CB}{BP} \cdot \frac{PC}{CB} = 1.$$

Праве AP, BQ, CR морају бити такве та тачно две од њих не пролазе кроз унутрашњост троугла $\triangle ABC$, а трећа пролази. Стога тачно две од тачака P, Q, R припадају дужима BC, CA, AB , а трећа не припада. Нпр. ако права AP пролази кроз унутрашњост троугла $\triangle ABC$, онда праве BQ, CR не пролазе кроз унутрашњост троугла и тачка P припада дужи BC , а тачке Q, R не припадају дужима CA, AB . Следи да је $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} > 0$, $\frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} < 0$ и $\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} < 0$, па је $\Pi > 0$. Слично и у преостала два случаја (права BQ пролази кроз унутрашњост троугла $\triangle ABC$, односно права CR пролази кроз унутрашњост троугла $\triangle ABC$) добијамо да је $\Pi > 0$. Дакле, важи $\Pi > 0$ и $|\Pi| = 1$, па закључујемо да је $\Pi = 1$.

$\boxed{\Leftarrow}$: Нека је $\Pi = 1$. Посматрајмо праве BQ и CR .
1°



Нека се праве BQ и CR секу у тачки S . Означимо са P' пресечну тачку праве AS и праве BC . На основу дела $\boxed{\Rightarrow}$ следи $\frac{\overrightarrow{BP'}}{\overrightarrow{P'C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = 1$. Такође, по претпоставци је $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = 1$, па је $\frac{\overrightarrow{BP'}}{\overrightarrow{P'C}} = \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}}$. Одавде следи да је $P' = P$, па се праве AP, BQ, CR секу у тачки S . Дакле, AP, BQ, CR припадају једном прамену.
2°



Нека је $BQ \parallel CR$. Означимо са P' пресечну тачку праве која садржи тачку A и паралелна је са правом BQ (и правом CR) и праве BC . На основу дела $\boxed{\Rightarrow}$ следи $\frac{\overrightarrow{BP'}}{\overrightarrow{P'C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = 1$. Такође, $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = 1$, па је $\frac{\overrightarrow{BP'}}{\overrightarrow{P'C}} = \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}}$. Одавде следи да је $P' = P$, па су праве AP, BQ, CR паралелне. Дакле, праве AP, BQ, CR припадају једном прамену. $\square$

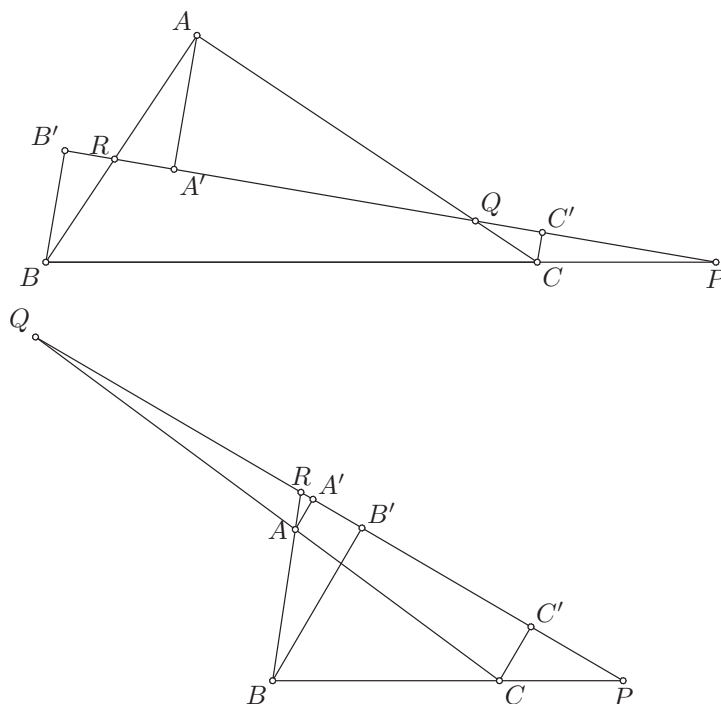
Менелајева теорема. Тачке P, Q, R правих одређених страницама BC, CA, AB троугла $\triangle ABC$ су колинеарне ако и само ако важи

$$\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = -1$$

Доказ: Означимо поново $\Pi = \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}}$. Слично као код формулације Чевине теореме, и у формулацији ове теореме требало би додати услов

да се тачке P, Q, R разликују од темена A, B, C троугла $\triangle ABC$ (из истих разлога као малопре, јер ће број Π бити недефинисан ако је нпр. $P = C$ или ће бити једнак нули ако је нпр. $P = B$).

$\Rightarrow$: Нека су P, Q, R колинеарне и нека је p права која их садржи. Означимо са A', B', C' редом подножја нормала из тачака A, B, C на правој p . Тада су праве AA', BB', CC' паралелне, па на основу Талесове теореме имамо:



$$\begin{aligned}\frac{BP}{PC} &= \frac{BB'}{CC'} \\ \frac{CQ}{QA} &= \frac{CC'}{AA'} \\ \frac{AR}{RB} &= \frac{AA'}{BB'}.\end{aligned}$$

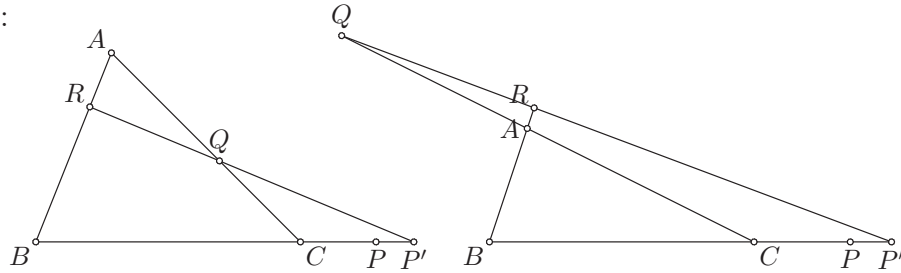
Следи да је

$$|\Pi| = \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = \frac{BB'}{CC'} \cdot \frac{CC'}{AA'} \cdot \frac{AA'}{BB'} = 1.$$

Како права p не садржи ниједно теме троугла A, B, C јер би иначе нека од тачака P, Q, R била теме троугла, на основу Пашове аксиоме закључујемо да или тачно две од тачака P, Q, R припадају одговарајућим дужицама BC, CA, AB или ниједна од њих не припада одговарајућој дужи. Ако

нпр. тачке Q, R припадају редом дужима CA, AB , важи $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} < 0$, $\frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} > 0$ и $\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} > 0$, па је $\Pi < 0$. Слично, ако тачке P, Q припадају редом дужима BC, CA или ако тачке P, R припадају редом дужима BC, AB , следи да је $\Pi < 0$. Ако ниједна од тачака P, Q, R не припада одговарајућој дужи (BC, CA, AB) , важи $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} < 0$, $\frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} < 0$ и $\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} < 0$, па је поново $\Pi < 0$. Закључујемо да је $\Pi < 0$ и $|\Pi| = 1$, па је $\Pi = -1$.

$\Leftarrow$:



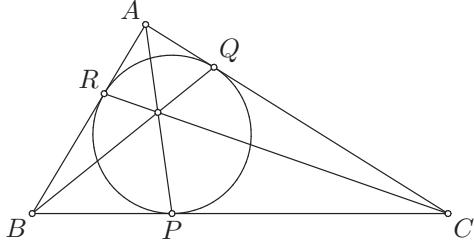
Нека је $\Pi = -1$. Означимо са P' пресечну тачку праве QR и праве BC . На основу дела $\Rightarrow$ следи да је $\frac{\overrightarrow{BP'}}{\overrightarrow{P'C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = -1$. Такође, по претпоставци је $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = -1$, па следи да је $\frac{\overrightarrow{BP'}}{\overrightarrow{P'C}} = \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}}$. Одавде следи да је $P' = P$, па су тачке P, Q, R колинеарне. $\square$

Напомена 5. Да би докази смерова $\Leftarrow$ Чевине и Менелајеве теореме били до краја коректни, морали бисмо да докажемо да тачке P' постоје, тј. у случају 1° Чевине теореме да AS и BC нису паралелне, у случају 2° Чевине теореме да права која садржи A и паралелна је са BQ и CR није паралелна са BC , а у Менелајевој теорему да праве QR и BC нису паралелне. Међутим, то овде нећемо радити.

Напомена 6. У некој литератури се уместо израза „Чевина теорема” може наћи и израз „Чеваова теорема”.

6. Ако су P, Q, R тачке у којима уписани круг троугла ABC додирује странице BC, CA, AB , доказати да су праве AP, BQ, CR конкурентне.

Решење:



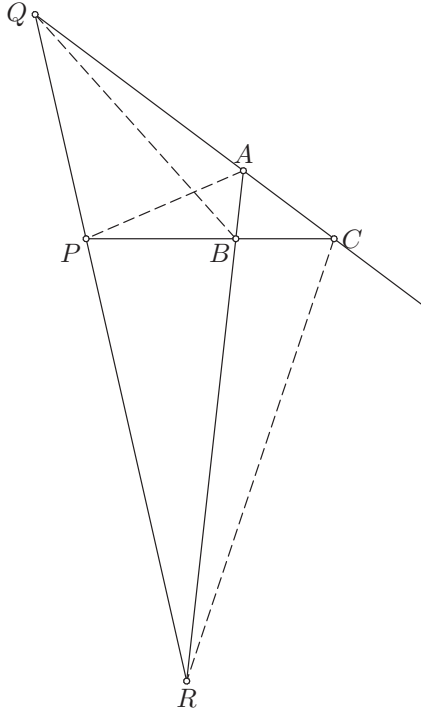
Нека је $\Pi = \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}}$. Тангентне дужи из тачака A, B, C на уписаном кругу троугла $\triangle ABC$ су подударне ($AQ = AR$, $BR = BP$, $CP = CQ$), па следи да је

$$|\Pi| = \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = \frac{BR}{PC} \cdot \frac{CP}{QA} \cdot \frac{AQ}{RB} = 1.$$

Тачке P, Q, R припадају дужима BC, CA, AB , па следи да је $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} > 0$, $\frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} > 0$ и $\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} > 0$. Одавде закључујемо да је $\Pi > 0$, па због $|\Pi| = 1$ следи да је $\Pi = 1$. На основу Чевине теореме закључујемо да праве AP, BQ, CR припадају једном прамену. С обзиром на то да дужи BQ, CR припадају унутрашњости троугла $\triangle ABC$, оне се секу, па закључујемо да праве AP, BQ, CR припадају прамену конкурентних правих, тј. оне су конкурентне (секу се у једној тачки).

7. Доказати да уколико постоје тачке у којима бисектрисе спољашњих углова код темена A, B, C секу праве одређене наспрамним странама троугла ABC , оне су колинеарне.

Решење:



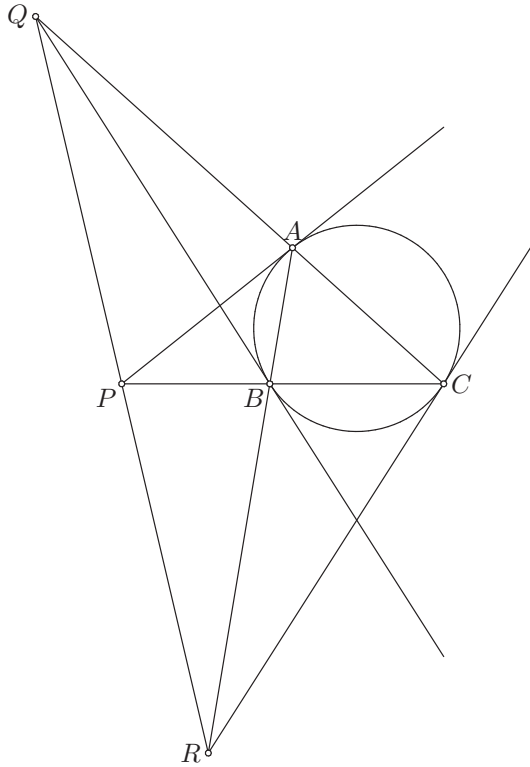
Нека су P, Q, R редом пресечне тачке симетрала спољашњих углова код темена A, B, C троугла $\triangle ABC$ са правима BC, CA, AB . Означимо $\Pi = \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}}$. На основу Теореме о симетрали угла следи да је

$$\begin{aligned} \frac{BP}{PC} &= \frac{AB}{AC} \\ \frac{CQ}{QA} &= \frac{CB}{BA} \\ \frac{AR}{RB} &= \frac{AC}{CB}, \end{aligned}$$

па је $|\Pi| = \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{CB}{BA} \cdot \frac{AC}{CB} = 1$. Како симетрале спољашњих углова троугла припадају спољашњости троугла, следи да ниједна од тачака P, Q, R не припада одговарајућој дужи (BC, CA, AB) , па следи да је $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} < 0$, $\frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} < 0$ и $\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} < 0$. Дакле, $\Pi < 0$ и $|\Pi| = 1$, па је $\Pi = -1$. На основу Менелајеве теореме следи да су тачке P, Q, R колинеарне.

8. Доказати да тачке P, Q, R у којима тангенте описаног круга троугла ABC у његовим теменима секу праве одређене наспрамним страницама, уколико постоје, припадају једној правој.

Решење:



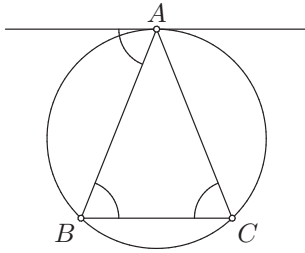
Нека су P, Q, R редом пресечне тачке тангенти у теменима A, B, C троугла $\triangle ABC$ на његовом описаном кругу са правима BC, CA, AB . Означимо $\Pi = \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}}$. Угао $\angle PAB$ је угао између тангенте PA и тетиве AB , па је подударан с периферијским углом $\angle ACB$ над том тетивом. Следи да је $\angle PAB = \angle PCA (= \angle BCA)$, а како је и $\angle APB = \angle CPA$ (исти угао), следи да је $\triangle PAB \sim \triangle PCA$. Одавде је $\frac{BP}{AP} = \frac{PA}{PC} = \frac{AB}{AC}$, па следи да је $\frac{BP}{PC} = \frac{BP}{AP} \cdot \frac{AP}{PC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$. Слично, $\angle QBA = \angle ACB$ (угао $\angle QBA$ између тангенте QB и тетиве BA подударан је с периферијским углом $\angle ACB$ над том тетивом) и $\angle BQA = \angle BQC$ (исти угао), па је $\triangle QBC \sim \triangle QAB$. Следи $\frac{CQ}{BQ} = \frac{QB}{QA} = \frac{BC}{AB}$, па је $\frac{CQ}{QA} = \frac{CQ}{BQ} \cdot \frac{BQ}{QA} = \left(\frac{BC}{AB}\right)^2$. Коначно, $\angle RCB = \angle BAC$ (угао $\angle RCB$ између тангенте RC и тетиве CB подударан је с периферијским углом $\angle BAC$ над том тетивом) и $\angle BRC = \angle ARC$ (исти угао), па је $\triangle RAC \sim \triangle RCB$. Следи да је

$\frac{AR}{CR} = \frac{RC}{RB} = \frac{AC}{CB}$, па је $\frac{AR}{RB} = \frac{AR}{CR} \cdot \frac{CR}{RB} = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2$. Према томе,

$$|\Pi| = \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 \cdot \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 \cdot \left(\frac{AC}{BC}\right)^2 = 1.$$

Како тангенте AP, BQ, CR припадају спољашњости описаног круга троугла $\triangle ABC$, следи да оне припадају и спољашњости троугла $\triangle ABC$, па тачке P, Q, R не припадају одговарајућим дужима BC, CA, AB . Према томе, $\frac{BP}{PC} < 0$, $\frac{CQ}{QA} < 0$ и $\frac{AR}{RB} < 0$, па је и $\Pi < 0$. Дакле, $\Pi = -1$, па према Менелајевој теореме следи да су тачке P, Q, R колинеарне.

Напомена 7. Размотримо у ком случају је нека од тангенти паралелна са насупрамном страницом, нпр. када је тангента у темену A троугла $\triangle ABC$ на његовом описаном кругу паралелна са BC .



Назначени угао између тангенте и тетиве AB подударан је с периферијским углом $\angle ACB$ над том тетивом, а с друге стране подударан је с углом $\angle ABC$, јер су то углови с паралелним крацима. Закључујемо да је $\angle ACB = \angle ABC$, па је троугао $\triangle ABC$ једнакокраки с основicom BC . Дакле, задатак се могао решавати само за троуглове $\triangle ABC$ који нису једнакокраки, јер иначе не постоји нека од тачака P, Q, R .

Дефиниција 15. Нека су P, Q, R, S четири различите колинеарне тачке. Пар тачака (P, Q) је *хармонијски спрећнути* с паром тачака (R, S) ако је $\frac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{RQ}} = -\frac{\overrightarrow{PS}}{\overrightarrow{SQ}}$ и пишемо $\mathcal{H}(P, Q; R, S)$.



Следе неке особине релације хармонијске спрећнутости. Најпре, та релација је симетрична у следећем смислу. Ако је $\mathcal{H}(P, Q; R, S)$, онда је $\mathcal{H}(P, Q; S, R)$, $\mathcal{H}(Q, P; R, S)$, $\mathcal{H}(Q, P; S, R)$, односно небитан је да ли је у питању пар (P, Q) или пар (Q, P) , као и да ли је у питању пар (R, S) или пар (S, R) . Такође, ако је $\mathcal{H}(P, Q; R, S)$, онда је $\mathcal{H}(R, S; P, Q)$, тј. ако је пар (P, Q) хармонијски спрећнут с паром (R, S) , онда је и пар (R, S) хармонијски спрећнут с паром (P, Q) . Докажимо ове особине.

Ако је $\mathcal{H}(P, Q; R, S)$, онда је $\frac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{RQ}} = -\frac{\overrightarrow{PS}}{\overrightarrow{SQ}}$. Заменом места разломцима на левој и десној страни једнакости добијамо $\frac{\overrightarrow{PS}}{\overrightarrow{SQ}} = -\frac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{RQ}}$, што по дефиницији даје $\mathcal{H}(P, Q; S, R)$. Множењем бројилаца и именилаца с леве и десне стране једнакости бројем -1 добијамо да је $\frac{-\overrightarrow{PS}}{-\overrightarrow{SQ}} = -\frac{-\overrightarrow{PR}}{-\overrightarrow{RQ}}$, односно да је $\frac{\overrightarrow{SP}}{\overrightarrow{QS}} = -\frac{\overrightarrow{RP}}{\overrightarrow{QR}}$. Како су тачке P, Q, R, S међусобно различите, ниједан од ових вектора није нула вектор, па ни бројеви с леве и десне стране једнакости нису једнаки 0 , што значи да можемо узети њихове инверзе и они ће такође бити једнаки. Добијамо да је $\frac{\overrightarrow{QS}}{\overrightarrow{SP}} = -\frac{\overrightarrow{QR}}{\overrightarrow{RP}}$, а то по дефиницији значи да је $\mathcal{H}(Q, P; S, R)$. Поновном заменом места разломцима на левој и десној страни једнакости добијамо $\mathcal{H}(Q, P; R, S)$.

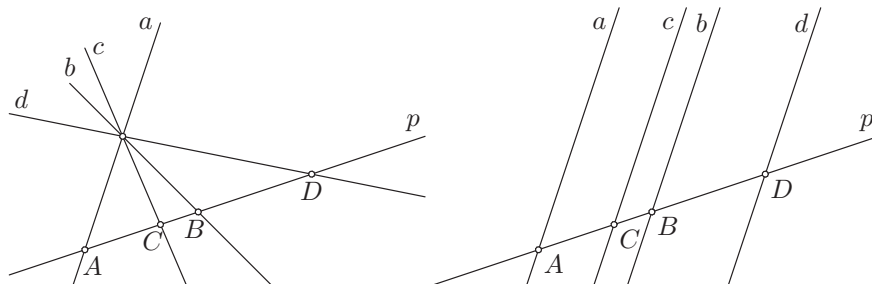
Ако је $\mathcal{H}(P, Q; R, S)$, онда је $\frac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{RQ}} = -\frac{\overrightarrow{PS}}{\overrightarrow{SQ}} = \lambda$. Следи да је $\overrightarrow{PR} = \lambda \overrightarrow{RQ}$ и $\overrightarrow{PS} = -\lambda \overrightarrow{SQ} = \lambda \overrightarrow{QS}$. Вектори $\overrightarrow{RP}$ и $\overrightarrow{PS}$ су колинеарни и ниједан од њих није нула вектор, па следи да је $\lambda \neq 0$ и постоји однос тих вектора који је једнак $\frac{\overrightarrow{RP}}{\overrightarrow{PS}} = \frac{-\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{PS}} = \frac{-\lambda \overrightarrow{RQ}}{\lambda \overrightarrow{QS}} = -\frac{\overrightarrow{RQ}}{\overrightarrow{QS}}$. Следи да је $\mathcal{H}(R, S; P, Q)$.

Даље, ако су P, Q, R три разне колинеарне тачке и R није средиште дужи PQ , тада постоји јединствена тачка S таква да је $\mathcal{H}(P, Q; R, S)$. Заиста, тада је $\frac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{RQ}} \notin \{0, 1\}$, па постоји јединствена тачка S таква да је $\frac{\overrightarrow{PS}}{\overrightarrow{SQ}} = -\frac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{RQ}}$ (због $-\frac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{RQ}} \neq -1$ следе постојање и јединственост тачке S). Због $-\frac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{RQ}} \neq 0$ следи да је S различита од P , а наравно мора бити и $S \neq Q$ и $S \neq R$, па је заиста $\mathcal{H}(P, Q; R, S)$.

Ако је $\mathcal{H}(P, Q; R, S)$, онда важи тачно један од распореда тачака $\mathcal{B}(P, R, Q)$ и $\mathcal{B}(P, S, Q)$. Заиста, из $\mathcal{H}(P, Q; R, S)$ следи $\frac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{RQ}} = -\frac{\overrightarrow{PS}}{\overrightarrow{SQ}} = \lambda$. Како због различитости тачака P, Q, R, S важи $\lambda \neq 0$, следи да је тачно један од односа $\frac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{RQ}}$ и $\frac{\overrightarrow{PS}}{\overrightarrow{SQ}}$ позитиван (други је наравно негативан). Ако је $\frac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{RQ}} > 0$, онда је $\frac{\overrightarrow{PS}}{\overrightarrow{SQ}} < 0$, па важи $\mathcal{B}(P, R, Q)$ и не важи $\mathcal{B}(P, S, Q)$. Ако је $\frac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{RQ}} < 0$, онда је $\frac{\overrightarrow{PS}}{\overrightarrow{SQ}} > 0$, па важи $\mathcal{B}(P, S, Q)$ и не важи $\mathcal{B}(P, R, Q)$. Према томе, важи тачно један од распореда тачака $\mathcal{B}(P, R, Q)$ и $\mathcal{B}(P, S, Q)$.

Дефинисаћемо и хармонијску спрегнутост парова правих.

Дефиниција 16. Нека праве a, b, c, d припадају једном прамену. Кажемо да је пар (a, b) *хармонијски сирејнути* с паром (c, d) ако постоји права p таква да је $p \cap a = \{A\}$, $p \cap b = \{B\}$, $p \cap c = \{C\}$, $p \cap d = \{D\}$ и важи $\mathcal{H}(A, B; C, D)$. Тада пишемо $\mathcal{H}(a, b; c, d)$.



Да би дефиниција била коректна, требало би доказати да ова особина не зависи од избора праве p . То нећемо радити. Навешћемо само једну особину без доказа. Ако су a, b, c, d праве конкурентног прамена (конкурентне праве) и $c \perp d$, важи $\mathcal{H}(a, b; c, d)$ ако и само су c и d симетрале углова који граде праве a и b (има их два и треба да c буде симетрала једног од њих, а d симетрала оног другог).

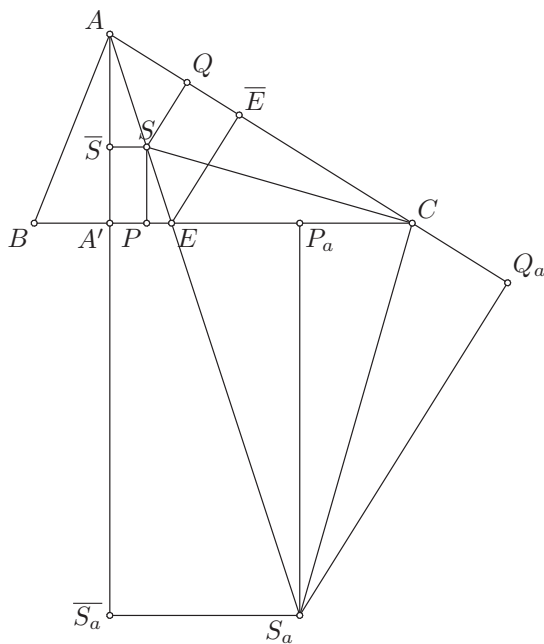
Због доказане симетричности релације хармонијске спрегнутости парова тачака, следи и симетричност релације хармонијске спрегнутости парова правих. Такође, често уместо „пар (P, Q) је хармонијски спрегнут с паром (R, S) ” или „парови (P, Q) и (R, S) су хармонијски спрегнути” кажемо и „тачке P, Q, R, S су хармонијски спрегнуте”. Слично, често кажемо „праве a, b, c, d су хармонијски спрегнуте”.

9. Нека су $\overline{S}, \overline{S_a}, \overline{S_b}, \overline{S_c}$ пројекције тачака S, S_a, S_b, S_c на праву одређену висином AA' троугла ABC , а $\overline{E}$ пројекција E на праву AC . Доказати:

a) $\mathcal{H}(A, E; S, S_a), \mathcal{H}(A, A'; \bar{S}, \bar{S}_a), \mathcal{H}(A, \bar{E}; Q, Q_a), \mathcal{H}(A', E; P, P_a);$

b) $\mathcal{H}(A, F; S_b, S_c), \mathcal{H}(A', F; P_b, P_c), \mathcal{H}(A, A'; \overline{S_b}, \overline{S_c})$.

Решение:



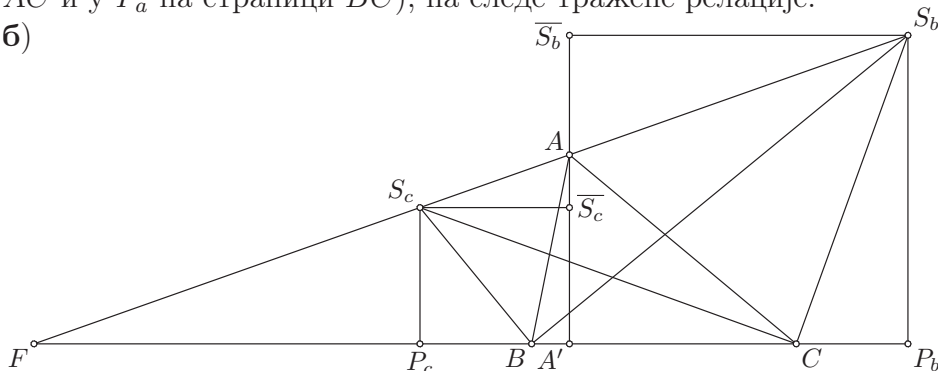
а) Тачке S, S_a су редом центар уписаног и споља уписаног круга који додирује страницу BC , а тачка E је пресечна тачка симетрале унутрашњег угла код темена A и (наспрамне) странице BC . На основу Теореме о симетрали угла (1. задатка) следи $AS : SE = AS_a : S_aE (= AC : CE)$. Такође, како важи распоред тачака $\mathcal{B}(A, S, E, S_a)$ следи да су односи $\frac{\overrightarrow{AS}}{\overrightarrow{SE}}$ и $\frac{\overrightarrow{AS_a}}{\overrightarrow{S_aE}}$ супротних знакова, па важи $\frac{\overrightarrow{AS}}{\overrightarrow{SE}} = -\frac{\overrightarrow{AS_a}}{\overrightarrow{S_aE}}$, тј. $\mathcal{H}(A, E; S, S_a)$.

Сада ћемо доказати да се нормалним пројектовањем чува хармонијска спрегнутост тачака. Тачке A, S, E, S_a се пројектују у тачке $A, \bar{S}, A', \bar{S}_a$ и доказујемо да из $\mathcal{H}(A, E; S, S_a)$ следи $\mathcal{H}(A, A'; \bar{S}, \bar{S}_a)$. Важи $S\bar{S} \perp AA'$, $EA' \perp AA'$ и $S_a\bar{S}_a \perp AA'$, па следи да је $S\bar{S} \parallel EA' \parallel S_a\bar{S}_a$, па Талесова теорема даје $A\bar{S} : \bar{S}A' = AS : SE = AS_a : S_aE = A\bar{S}_a : \bar{S}_aA'$. Нормално пројектовање чува распоред тачака, па из распореда тачака $\mathcal{B}(A, S, E, S_a)$ закључујемо да важи распоред тачака $\mathcal{B}(A, \bar{S}, A', \bar{S}_a)$. Следи $\frac{\overrightarrow{AS}}{\overrightarrow{SA'}} = -\frac{\overrightarrow{AS_a}}{\overrightarrow{S_aA'}}$, па је $\mathcal{H}(A, A'; \bar{S}, \bar{S}_a)$.

Сада када знамо да нормално пројектовање чува хармонијску спрегнутост тачака, из $\mathcal{H}(A, E; S, S_a)$ директно следи $\mathcal{H}(A, \overline{E}; Q, Q_a)$, као и

$\mathcal{H}(A', E; P, P_a)$. Заиста, тачке A, S, E, S_a пројектују се у тачке $A, Q, \overline{E}, Q_a$ на правој AC и у тачке A', P, E, P_a на правој BC (центри S, S_a уписаног и споља уписаног круга пројектују се редом у додирне тачке тих кругова и одговарајуће странице, односно праве која је садржи; дакле, S се пројектује у Q на страници AC и у P на страници BC , а S_a у Q_a на правој AC и у P_a на страници BC), па следе тражене релације.

б)



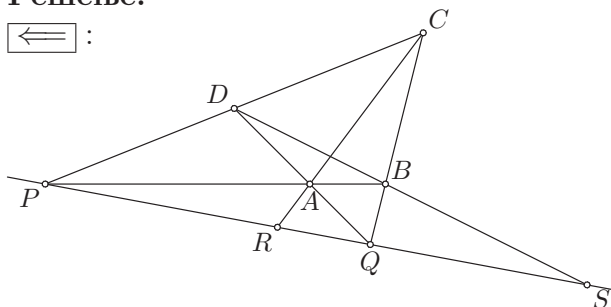
Тачке S_b, S_c су центри споља уписаних кругова који додирују редом странице AC, AB , а тачка F је пресечна тачка симетрале спољашњег угла код темена A и (наспрамне) странице BC . На основу Теореме о симетрали угла (1. задатка) следи $AS_c : S_cF = AS_b : S_bF (= AB : BF)$. У зависности од тога да ли је $AB < AC$ или $AB > AC$ важи распоред $\mathcal{B}(F, S_c, A, S_b)$ или распоред $\mathcal{B}(F, S_b, A, S_c)$ (не може бити $AB = AC$, јер је тада симетрала спољашњег угла код темена A паралелна с правом BC и не постоји тачка F), па су односи $\frac{\overrightarrow{AS_b}}{\overrightarrow{S_bF}}$ и $\frac{\overrightarrow{AS_c}}{\overrightarrow{S_cF}}$ супротних знакова. Дакле, $\frac{\overrightarrow{AS_b}}{\overrightarrow{S_bF}} = -\frac{\overrightarrow{AS_c}}{\overrightarrow{S_cF}}$, па важи $\mathcal{H}(A, F; S_b, S_c)$.

Нормалним пројектовањем тачке F, S_c, A, S_b пројектују се у тачке F, P_c, A', P_b на правој BC и у тачке $A', \overline{S_c}, A, \overline{S_b}$ на правој AA' , па из $\mathcal{H}(A, F; S_b, S_c)$ следе $\mathcal{H}(A', F; P_b, P_c)$ и $\mathcal{H}(A, A'; \overline{S_b}, \overline{S_c})$.

10. Важи $\mathcal{H}(P, Q; R, S)$ ако и само ако постоје четири тачке A, B, C, D такве да важи $AB \cap CD = \{P\}$, $BC \cap AD = \{Q\}$, $PQ \cap AC = \{R\}$, $PQ \cap BD = \{S\}$.

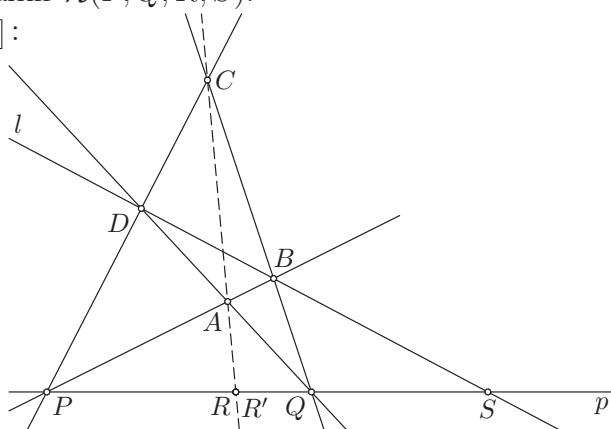
Решење:

$\Leftarrow$:



Нека су A, B, C, D четири разне тачке у равни и нека постоје тачке $\{P\} = AB \cap CD$, $\{Q\} = BC \cap AD$, $\{R\} = PQ \cap AC$, $\{S\} = PQ \cap BD$. Посматрајмо троугао $\triangle PQC$, тачке R, B, D редом на његовим странама PQ, QC, CP и тачку S на правој PQ . Праве PB, QD, CR секу се у тачки A , па оне припадају једном прамену. Према Чевиној теорему следи да је $\frac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{RQ}} \cdot \frac{\overrightarrow{QB}}{\overrightarrow{BC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CD}}{\overrightarrow{DP}} = 1$. Такође, тачке S, B, D су колинеарне, па је према Менелајевој теорему $\frac{\overrightarrow{PS}}{\overrightarrow{SQ}} \cdot \frac{\overrightarrow{QB}}{\overrightarrow{BC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CD}}{\overrightarrow{DP}} = -1$. Следи да је $\frac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{RQ}} = \frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{QB}} \cdot \frac{\overrightarrow{DP}}{\overrightarrow{CD}} = -\frac{\overrightarrow{PS}}{\overrightarrow{SQ}}$, па важи $\mathcal{H}(P, Q; R, S)$.

$\Rightarrow$:



Нека су P, Q, R, S хармонијски спрегнуте тачке (важи $\mathcal{H}(P, Q; R, S)$). Означимо са p праву која садржи тачке P, Q, R, S . Треба пронаћи неке четири тачке A, B, C, D у некој равни која садржи праву p тако да важи $\{P\} = AB \cap CD$, $\{Q\} = BC \cap AD$, $\{R\} = PQ \cap AC$, $\{S\} = PQ \cap BD$. Одаберимо произвољну праву l која садржи тачку S и различита је од праве p и одаберимо на њој произвољне две разне тачке B, D различите од тачке S такве да $PB \nparallel QD$ и $PD \nparallel QB$ (убрзо ћемо видети зашто морамо наметнути баш ова два услова). Како желимо да одаберемо тачке

A, C тако да буде $\{P\} = AB \cap CD$ и $\{Q\} = BC \cap AD$, добијамо да тачка A мора припадати правима PB и QD и да тачка C мора припадати правима PD и QB . Из тих разлога нека је $\{A\} = PB \cap QD$ и $\{C\} = PD \cap QB$ (дакле, морамо наметнути услове $PB \nparallel QD$ и $PD \nparallel QB$ да би постојали пресеци тих правих).

Сада имамо четири тачке A, B, C, D и треба још проверити да ли је $\{P\} = AB \cap CD$, $\{Q\} = BC \cap AD$, $\{R\} = PQ \cap AC$, $\{S\} = PQ \cap BD$. Прве две једнакости важе јер смо бирали тачке A, C тако да оне важе. Такође, важи и четврта једнакост ($\{S\} = PQ \cap BD$) јер смо тако бирали тачке B, D . Треба још проверити да ли је $\{R\} = PQ \cap AC$. Означимо пресек правих PQ и AC са R' . На основу дела $\boxed{\Leftarrow}$ следи да важи $\mathcal{H}(P, Q; R', S)$, односно $\frac{\overrightarrow{PR'}}{\overrightarrow{R'Q}} = -\frac{\overrightarrow{PS}}{\overrightarrow{SQ}}$. По претпоставци важи и $\mathcal{H}(P, Q; R, S)$, односно $\frac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{RQ}} = -\frac{\overrightarrow{PS}}{\overrightarrow{SQ}}$. Дакле, следи $\frac{\overrightarrow{PR'}}{\overrightarrow{R'Q}} = \frac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{RQ}} = k$, па је $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RQ} = k\overrightarrow{RQ} + \overrightarrow{RQ} = (k+1)\overrightarrow{RQ}$, али и $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PR'} + \overrightarrow{R'Q} = k\overrightarrow{R'Q} + \overrightarrow{R'Q} = (k+1)\overrightarrow{R'Q}$, те је $R' = R$. Према томе, важи и $\{R\} = PQ \cap AC$.

Дефиниција 17. Нека су A, B, C три колинеарне тачке. Дефинишемо израз $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ на следећи начин:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{cases} AB \cdot AC, & \text{ако није } \mathcal{B}(B, A, C) \\ -AB \cdot AC, & \text{ако јесте } \mathcal{B}(B, A, C) \end{cases}.$$

11. Ако су A, B, C, D разне колинеарне тачке, а O средиште дужи AB , тада важи $\mathcal{H}(A, B; C, D) \iff AO^2 = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD}$.

Решење: Лако се проверава да израз дефинисан у дефиницији 17 суштински представља скаларни производ колинеарних вектора. Заиста, ако није $\mathcal{B}(B, A, C)$, онда је $\cos \angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \cos 0 = 1$, па добијамо $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AC}\| = AB \cdot AC$, а ако јесте $\mathcal{B}(B, A, C)$, онда је $\cos \angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \cos \pi = -1$, па је $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AC}\| = -AB \cdot AC$.

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(A, B; C, D) &\iff \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = -\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}} \\ &\iff \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = -\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB}. \end{aligned}$$

$$\iff (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}) \cdot (\overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OB}) = -(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD}) \cdot (\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OB})$$

(овде користимо дистрибутивност „множења” у односу на сабирање вектора)

$$\begin{aligned} \iff \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB} &= \\ = -\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{CO} - \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{CO} - \overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OB} & \end{aligned}$$

Сада искористимо да је $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OB}$ и да за свако X, Y важи $-\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{YX}$.

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & -\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB} = \\ & = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OB} \end{aligned}$$

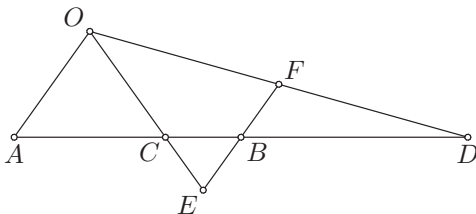
$$\Leftrightarrow 2OB^2 = 2\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB}$$

$$\Leftrightarrow OB^2 = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB}$$

$$\Leftrightarrow AO^2 = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB}.$$

12. Ако су A, B, C, D разне тачке праве p , O тачка ван те праве, E и F тачке у којима права која садржи тачку B и паралелна је OA сече OC и OD , доказати да важи $\mathcal{H}(A, B; C, D) \Leftrightarrow B$ је средиште EF .

Решење:



На основу Талесове теореме следи да је $AC : CB = AO : EB$, као и $AD : DB = AO : BF$, па је

$$AC : CB = AD : DB \Leftrightarrow AO : EB = AO : BF \Leftrightarrow EB = BF.$$

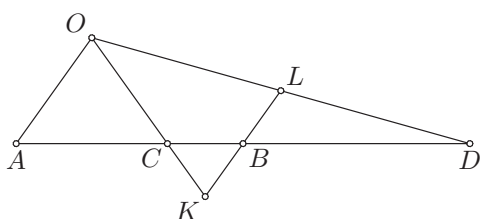
По претпоставци су A, B, C, D разне тачке праве p , па је $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD} = l\overrightarrow{AB}$, за неке $k, l \notin \{0, 1\}$, при чему је $k \neq l$. Дакле, $\overrightarrow{AC} = k(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) = k\overrightarrow{AC} + k\overrightarrow{CB}$, па је $(1 - k)\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{CB}$, односно $\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = \frac{k}{1-k}$. Слично је $\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}} = \frac{l}{1-l}$. Како је $k \neq l$, онда је $k - kl \neq l - kl$, односно $k(1-l) \neq l(1-k)$, па је $\frac{k}{1-k} \neq \frac{l}{1-l}$. Одавде следи да је $AC : CB = AD : DB$ могуће само у случају да је $\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = -\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}}$. Дакле,

$$\mathcal{H}(A, B; C, D) \Leftrightarrow AC : CB = AD : DB \Leftrightarrow EB = BF.$$

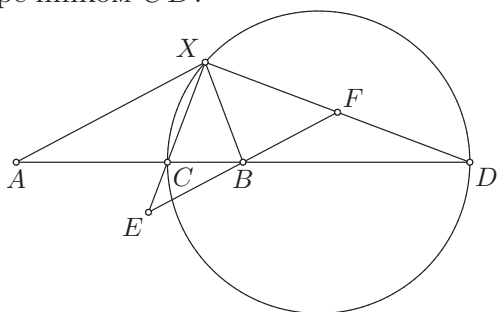
Да би ово било еквивалентно са тиме да је B средиште дужи EF , треба само проверити да ли су тачке E, F различите. Ако би било $E = F$, онда би праве OC и OD биле исте, а како се тачка O налази ван праве p која садржи C, D следило би да је $C = D$, што је у супротности с условом задатка. Дакле, $E \neq F$, па је заиста $EB = BF \Leftrightarrow B$ је средиште EF . Према томе, доказали смо да важи $\mathcal{H}(A, B; C, D) \Leftrightarrow B$ је средиште EF .

13. (Аполонијев круг) Одредити скуп свих тачака у равни којима су растојања од двеју датих тачака сразмерна датим неподударним дужима.

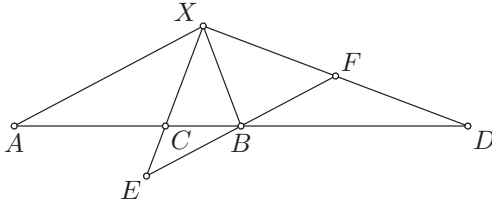
Решење:



Нека су m, n две дате неподударне дужи и нека су A, B две дате тачке. Нека је O произвољна тачка ван праве AB таква да је $OA = m$, нека је p права паралелна правој OA која садржи тачку B , нека су K, L тачке праве p с разних страна тачке B такве да је $BK = BL = n$ и нека су C, D пресечне тачке правих OK, OL с правом AB . На основу Талесове теореме следи да је $AC : CB = AO : BK = m : n = AO : BL = AD : DB$, па тачке C, D припадају траженом геометријском месту l тачака X таквих да је $AX : XB = m : n$. Докажимо да је тражено ГМТ l круг k над пречником CD .



$\square$: Нека је $X \in k$ произвољна тачка круга k . Докажимо да је $AX : XB = m : n$. Ако се тачка X поклапа с неком од тачака C, D , доказ је завршен. Нека се тачка X разликује од тачака C, D . Посматрајмо праву паралелну правој AX кроз тачку B и означимо њен пресек са правима XC, XD редом са E, F . На основу Талесове теореме је $AX : BE = AC : CB = m : n$, као и $AX : BF = AD : DB = m : n$, па следи да је $BE = BF$, тј. да је B средиште дужи EF . Троугао $\triangle EXF$ је правоугли, јер је $\angle EXF = \angle CXD = \frac{\pi}{2}$ као периферијски угао над пречником CD . Како је B средиште хипотенузе EF , што је уједно и центар описаног круга тог троугла, значи да је $BE = BF = BX$, а како је $AX : BE = m : n$, следи да је $AX : XB = m : n$.



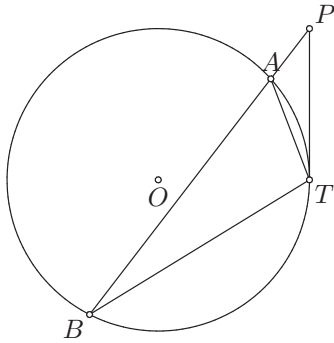
$\square$: Нека је $X \in l$ произвољна тачка, тј. нека је X таква да је $AX : XB = m : n$ и докажимо да $X \in k$. Ако се тачка X поклапа с неком од тачака C, D (што је могуће, јер је $AC : CB = AD : DB = m : n$), доказ је завршен. Нека се тачка X разликује од тачака C, D . Посматрајмо поново праву паралелну правој AX кроз тачку B и означимо њен пресек са правима XC, XD редом са E, F . На основу Талесове теореме је $AX : BE = AC : CB = m : n$ и $AX : BF = AD : DB = m : n$, па због $AX : XB = m : n$ следи да је $BE = BF = BX$, тј. да је B центар описаног круга троугла $\triangle EXF$. Према томе, тај троугао је правоугли, тј. $\angle EXF = \frac{\pi}{2}$. Пошто је $\angle CXD = \angle EXF$, следи да је то периферијски угао над пречником CD , тј. да X припада кругу над пречником CD , односно да $X \in k$.

Дефиниција 18. Круг k из претходног задатка зове се *Аполонијев круг*.

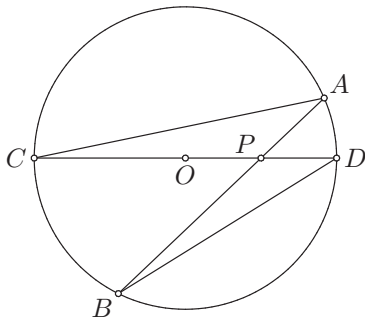
Став 3. Нека је $k(O, r)$ круг равни α , P тачка те равни и A, B пресечне тачке круга k и произвољне праве која садржи тачку P и има заједничких тачака с кругом k (може бити и танјенса, тада је $A = B$). Вредности израза $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ не зависи од избора те праве.

Доказ: Разликујемо случајеве када је тачка P на кругу, у спољашњости круга или у његовој унутрашњости.

Ако је тачка P на кругу k , онда се увек једна од тачака A, B поклапа с тачком P , па је $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0 = PO^2 - r^2$ (јер је $OP = r$).



Нека је тачка P у спољашњости круга k и нека је PT тангента тог круга. Троуглови $\triangle PTA$ и $\triangle PBT$ су слични, јер је $\angle TPA = \angle BPT$ и $\angle PTA = \angle PBT$ (угао између тангенте и тетиве подударан је периферијском углу над том тетивом). Следи да је $PT : PB = PA : PT$, тј. $PA \cdot PB = PT^2$. Како је $\triangle PTO$ правоугли, на основу Питагорине теореме је $PT^2 = PO^2 - OT^2 = PO^2 - r^2$. Такође, како је P у спољашњости круга k , следи да не важи $\mathcal{B}(A, P, B)$, па на основу дефиниције 17 важи $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = PA \cdot PB = PO^2 - r^2$.



Нека је тачка P у унутрашњости круга k и нека се разликује од центра O . Посматрајмо праву PO и означимо њене пресеке с кругом k са C, D тако да важи $\mathcal{B}(C, O, P, D)$. Троуглови $\triangle PAC$ и $\triangle PDB$ су слични, јер је $\angle PAC = \angle BAC = \angle BDC = \angle BDP$ и $\angle PCA = \angle DCA = \angle DBA = \angle DBP$ (периферијски углови над истим луковима су подударни). Следи да је $PA : PD = PC : PB$, тј. $PA \cdot PB = PC \cdot PD = (PO + OC) \cdot (OD - PO) = (r + PO) \cdot (r - PO) = r^2 - PO^2$. Како је P тачка у унутрашњости круга k , следи да важи $\mathcal{B}(A, P, B)$, па на основу дефиниције 17 важи $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = -PA \cdot PB = -(r^2 - PO^2) = PO^2 - r^2$.

Ако је $P = O$, онда је $PA = PB = r$ и важи $\mathcal{B}(A, P, B)$. Према томе, $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = -PA \cdot PB = -r^2 = PO^2 - r^2$ (јер је $PO = 0$).

Према томе, у свим случајевима је $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = PO^2 - r^2$, што значи да

вредност тог израза не зависи од избора праве која садржи тачку P . $\square$

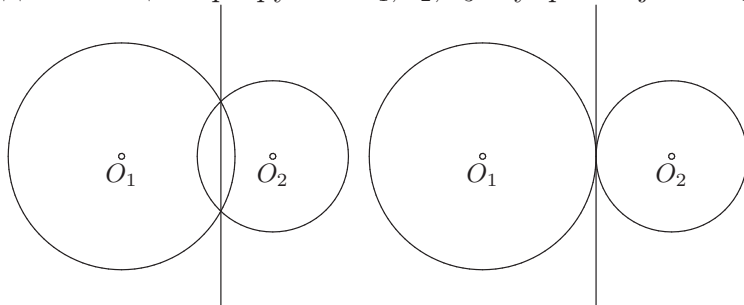
Дефиниција 19. Вредност израза $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} (= PO^2 - r^2)$ назива се *по-тенцијом* тачке P у односу на круг $k(O, r)$ и обележава се са $p(P, k)$.

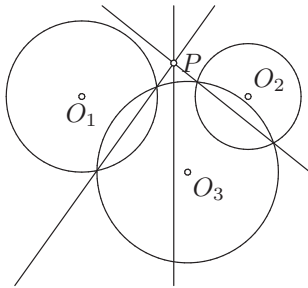
Из дефиниције је јасно да је потенција тачке P већа од нуле ако P припада спољашњости круга k , једнака нули ако припада кругу k , а мања од нуле ако припада унутрашњости круга k . Такође, најмању потенцију има тачка O и она је једнака $-r^2$.

Став 4. Скуп свих тачака равни које имају једнаке *по*тенције у односу на кругове $k_1(O_1, r_1), k_2(O_2, r_2)$ је *пра*ва *у*правна на *пра*вој O_1O_2 .

Дефиниција 20. Права из претходног става назива се *по*тенцијалном или *радикалном осом* кругова k_1 и k_2 .

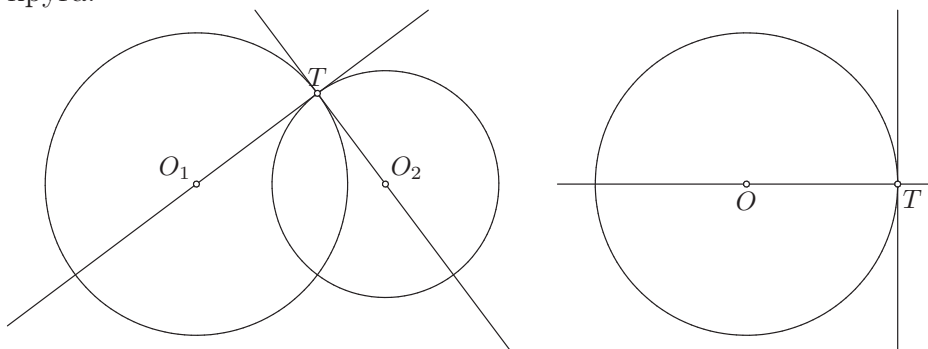
Ако имамо три круга у равни, њихове радикалне осе припадају једном прамену, а ако је у питању прамен конкурентних правих, пресечна тачка се назива *радикалним центром* тих кругова. Како конструисати радикалну осу кругова $k_1(O_1, r_1), k_2(O_2, r_2)$? Ако се они секу у тачкама A, B , потенција тих тачака у односу на оба круга је нула, па оне припадају њиховој радикалној оси. Следи да је радикална оса управо права AB . Ако се k_1, k_2 додирују у тачки A , њена потенција у односу на оба круга је нула, па је радикална оса кругова k_1, k_2 права која садржи тачку A и управна је на O_1O_2 , што је заједничка тангента кругова k_1, k_2 у њиховој додирној тачки A . Ако кругови k_1, k_2 немају заједничких тачака, онда конструишемо круг $k_3(O_3, r_3)$ такав да његов центар O_3 не припада правој O_1O_2 и да сече кругове k_1, k_2 . Затим конструишемо радикалне осе кругова k_1, k_3 и кругова k_2, k_3 . У њиховом пресеку налази се тачка која има једнаке потенције у односу на сва три круга, односно радикални центар кругова k_1, k_2, k_3 . Радикална оса кругова k_1, k_2 је права која садржи радикални центар кругова k_1, k_2, k_3 и управна је на O_1O_2 .





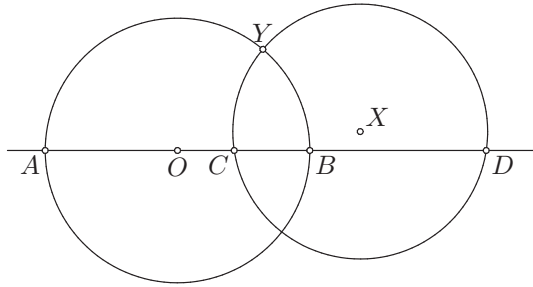
Дефиниција 21. Нека су у равни дати кругови k_1, k_2 који се секу и нека су t_1, t_2 редом тангенте тих кругова у некој од пресечних тачака. Угао између кругова k_1, k_2 је угао који граде тангенте t_1, t_2 . Ако је $t_1 \perp t_2$, за кругове k_1, k_2 кажемо да су међусобно *нормални* (*ујравни, ортогонални*) и то означавамо са $k_1 \perp k_2$. Слично, ако су у равни дати права и круг који се секу, угао између праве и круга је угао између те праве и тангенте круга у некој од пресечних тачака, а ако су оне међусобно нормалне, онда су и тај круг и та права међусобно *нормални*.

Размотримо кад су кругови, односно круг и права, међусобно нормални. Знамо да је тангента неког круга нормална на полупречнику који садржи додирну тачку. Пошто је код нормалних кругова k_1, k_2 тангента t_1 круга k_1 у пресечној тачки T нормална на тангенти t_2 круга k_2 у тачки T и на полупречнику O_1T круга k_1 , следи да је тангента t_2 заправо права O_1T , односно да тангента t_2 садржи центар O_1 круга k_1 . Дакле, кругови k_1, k_2 су међусобно нормални ако и само ако се секу и тангента једног од кругова у некој од пресечних тачака садржи центар другог круга. Слично, права и круг су нормални ако и само ако права садржи центар круга.



14. Нека су A, B, C, D колинеарне тачке такве да важи $\mathcal{B}(A, C, B, D)$ и нека је k круг над пречником AB и l било који круг који садржи тачке C, D . Доказати да важи $\mathcal{H}(A, B; C, D) \iff k \perp l$.

Решење:



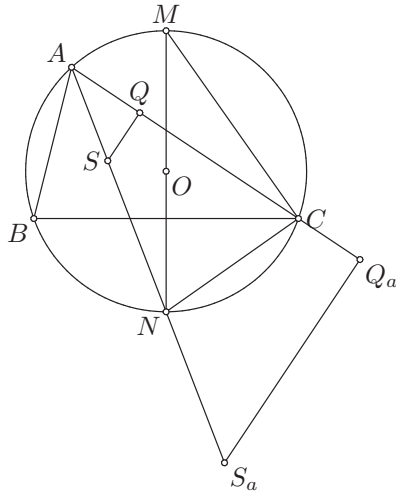
Означимо са O центар круга k . Тачка O је и средиште дужи AB јер је AB пречник круга k .

$\implies$: Нека важи $\mathcal{H}(A, B; C, D)$. На основу 11. задатка следи $AO^2 = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD} = p(O, l)$. Нека је Y додирна тачка неке тангенте круга l из тачке O . Тада је $p(O, l) = OY^2$, па је $AO = OY$, тј. $Y \in k$. Према томе, кругови k и l се секу у тачки Y . Како је OY тангента круга l у тачки Y и садржи центар O круга k , следи да је $k \perp l$.

$\impliedby$: Нека је $k \perp l$ и нека је Y једна од пресечних тачака тих кругова. Тада је $OY = AO$. Тангента круга l у тачки Y садржи центар O круга k , тј. OY је тангента круга l , па је $p(O, l) = OY^2$. Дакле, $AO^2 = OY^2 = p(O, l) = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD}$, па на основу 11. задатка следи да важи $\mathcal{H}(A, B; C, D)$.

15. Ако је $l(O, r)$ описани круг, $k(S, \rho)$ уписани круг и $k_a(S_a, \rho_a)$ споља уписани круг који додирује страницу BC датог троугла ABC , доказати да је $OS^2 = r^2 - 2r\rho$ и $OS_a^2 = r^2 + 2r\rho_a$.

Решење:



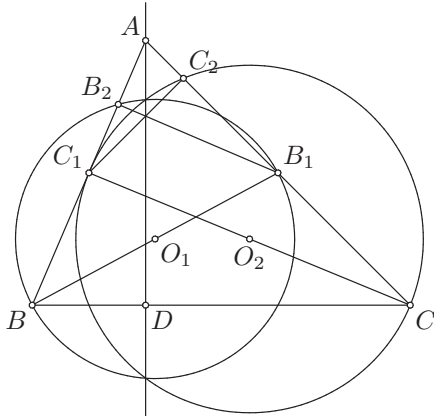
Потенције тачака S, S_a у односу на описани круг l су једнаке редом $p(S, l) = SO^2 - r^2$ и $p(S_a, l) = S_aO^2 - r^2$. Такође, ове потенције су једнаке $p(S, l) = \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SN} = -SA \cdot SN$ и $p(S_a, l) = \overrightarrow{S_aA} \cdot \overrightarrow{S_aN} = S_aA \cdot S_aN$. Остаје још да се израчунају $SA \cdot SN$ и $S_aA \cdot S_aN$.

Уочимо подножја нормала из тачака S, S_a на правој AC , означимо их редом са Q, Q_a и уочимо тачку M из Великог задатка. Имамо да је $\angle SAQ = \angle S_aAQ_a = \angle NAC = \angle NMC$ (периферијски над луком $\widehat{NC}$) и да су углови $\angle SQA, \angle S_aQ_aA$ и $\angle NCM$ прави ($\angle NCM$ је периферијски над пречником NM), па је $\angle SQA = \angle S_aQ_aA = \angle NCM$. Следи да је $\triangle ASQ \sim \triangle AS_aQ_a \sim \triangle MNC$, па је $SA : NM = SQ : NC$ и $S_aA : NM = S_aQ_a : NC$. Множењем обеју једнакости са NM и NC добијамо да је $SA \cdot NC = NM \cdot SQ$ и $S_aA \cdot NC = NM \cdot S_aQ_a$. Како је $NM = 2r, SQ = \rho, S_aQ_a = \rho_a$ и $NC = SN = S_aN$ (Велики задатак, став **6**)), следи да је $SA \cdot SN = 2r\rho$ и $S_aA \cdot S_aN = 2r\rho_a$.

Дакле, $OS^2 - r^2 = -2r\rho$ и $OS_a^2 - r^2 = 2r\rho_a$, па је $OS^2 = r^2 - 2r\rho$ и $OS_a^2 = r^2 + 2r\rho_a$, што је и требало доказати.

16. Права одређена висином AD троугла ABC представља радикалну осу кругова којима су пречници тежишне линије BB_1 и CC_1 тог троугла.

Решење:



Нека су O_1, O_2 редом средишта тежишних дужи BB_1, CC_1 . Довољно је доказати да је $AD \perp O_1O_2$ и да тачка A има једнаке потенције у односу на кругове $k_1(O_1, O_1B), k_2(O_2, O_2C)$. Тачке B_1, C_1 су редом средишта страница AC, AB , па је B_1C_1 средња линија троугла $\triangle ABC$, што значи да је $B_1C_1 \parallel BC$. Према томе, BCC_1B_1 је неконвексан трапез, па је O_1O_2 његова средња линија, што значи да је $O_1O_2 \parallel BC$. С друге стране, важи $AD \perp BC$, па следи да је $AD \perp O_1O_2$.

Ако је угао $\angle BAC$ прав, онда тачка A припада круговима k_1, k_2 , јер је $\angle BAC = \angle BAB_1 = \angle C_1AC$, па су то онда периферијски углови над пречницима BB_1, CC_1 тих кругова. У том случају су потенције тачке A у односу на кругове k_1, k_2 нула, па су једнаке. Нека угао $\angle BAC$ није прав. Означимо са B_2 другу пресечну тачку круга k_1 и праве AB и са C_2 другу пресечну тачку круга k_2 и праве AC . Угао $\angle BB_2B_1$ је периферијски над пречником BB_1 круга k_1 , а угао $\angle CC_2C_1$ је периферијски над пречником CC_1 круга k_2 , па су то прави углови. Следи да су и углови $\angle AB_2B_1, \angle AC_2C_1$ прави. Дакле, троуглови $\triangle AB_2B_1, \triangle AC_2C_1$ имају два пара подударних углова (углови код темена A се поклапају и $\angle AB_2B_1 = \angle AC_2C_1 = 90^\circ$), па су слични. Према томе, добијамо да је $AB_2 : AC_2 = AB_1 : AC_1$. Тачке B_1, C_1 су средишта страница AC, AB , тј. важи $AB_1 = \frac{AC}{2}, AC_1 = \frac{AB}{2}$, па је $AB_1 : AC_1 = \frac{AC}{2} : \frac{AB}{2} = AC : AB$, што значи да је $AB_2 : AC_2 = AC : AB$, тј. $AB_2 \cdot AB = AC_2 \cdot AC$. Ако је угао $\angle BAC$ оштар, онда је $p(A, k_1) = AB_2 \cdot AB$ и $p(A, k_2) = AC_2 \cdot AC$, па су потенције једнаке. Ако је овај угао туп, онда је $p(A, k_1) = -AB_2 \cdot AB$ и $p(A, k_2) = -AC_2 \cdot AC$, па су и у овом случају потенције једнаке. Према томе, права AD је радикална оса кругова k_1, k_2 .

3 Конструктивни задаци

У конструктивним задацима се тражи да лењиром и шестаром конструишемо фигуру у равни која испуњава одређена својства. Наведимо основне конструкције које можемо извршити лењиром и шестаром.

Лењир: Лењиром можемо конструисати праву која садржи две дате разне тачке, затим полуправу која садржи две дате разне тачке тако да једна од њих буде њено теме као и дуж чија су темена две дате разне тачке.

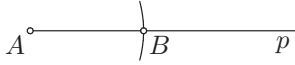
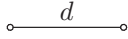
Шестар: Шестаром можемо конструисати круг чији је центар дата тачка и полупречник дата дуж, као и било који лук тог круга.

Овај списак конструкција је веома сиромашан. Уколико бисмо сваку сложену конструкцију морали да сводимо на основне, решења задатака би се непотребно компликовала, па зато проширујемо списак основних конструкција списком елементарних конструкција, које ћемо сматрати познатим и нећемо их сводити на основне:

- конструкција дужи подударне датој дужи;
- конструкција угла подударног датом углу;
- конструкција медијатрисе дужи;
- проналажење средишта дужи;
- конструкција бисектрисе угла;
- конструкција правога угла и нормале из тачке на правој;
- конструкција паралелних правих (полуправих, дужи);
- конструкција тангенте датог круга из дате тачке;
- конструкција геометријског места тачака (ГМТ) из којих се дата дуж види под датим углом;
- подела дате дужи на n подударних дужи, где је $n \in \mathbb{N}$ произвољан природан број;
- конструкција троугла коме су:
 - странице подударне датим дужима;
 - две странице и њима захваћени угао подударни датим дужима и датом углу;
 - једна страница и на њој налегли угли подударни датој дужи и датим угловима;
 - две странице и угао наспрам једне од њих подударни датим дужима и датом углу, при чему је познато да ли је угао наспрам друге странице оштар, прав или туп;
 - једна страница, угао наспрам ње и један од углова налеглих на њој подударни датој дужи и датим угловима.

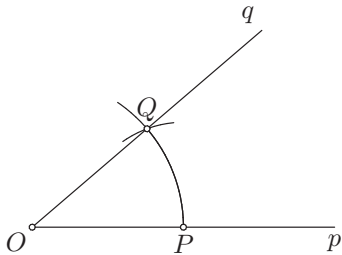
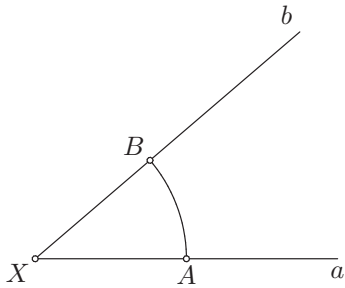
Следе детаљни описи сваке од елементарних конструкција.

Конструкција дужи подударне датој дужи



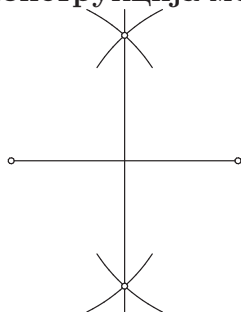
Означимо са A произвољну тачку и конструишимо произвољну полу-праву Ap чије је теме тачка A . Конструишимо кружни лук с центром у тачки A чији је полупречник дуж d . У пресеку тог лука и полуправе Ap означимо тачку B и дуж AB је подударна дужи d .

Конструкција угла подударног датом углом



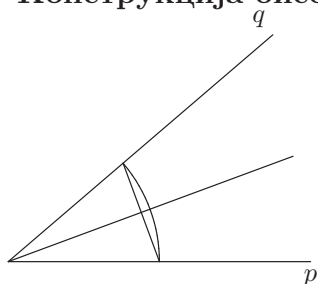
Означимо са O произвољну тачку и конструишимо произвољну полу-праву Op чије је теме тачка O . Конструишимо лук l с центром у тачки O произвољног полупречника и означимо са P пресечну тачку тог лука и полуправе Op . На датом углу $\angle aXb$ конструишимо лук с центром у X полупречника OP од крака Xa до крака Xb . Пресечне тачке тог лука с крацима Xa, Xb означимо редом са A, B . Конструишимо сада лук с центром у P полупречника AB и у пресеку с луком l означимо тачку Q . Конструишимо полуправу Oq с теменом O која садржи тачку Q и угао $\angle pOq$ је подударан углу $\angle aXb$.

Конструкција медијатрисе дужи; проналажење средишта дужи



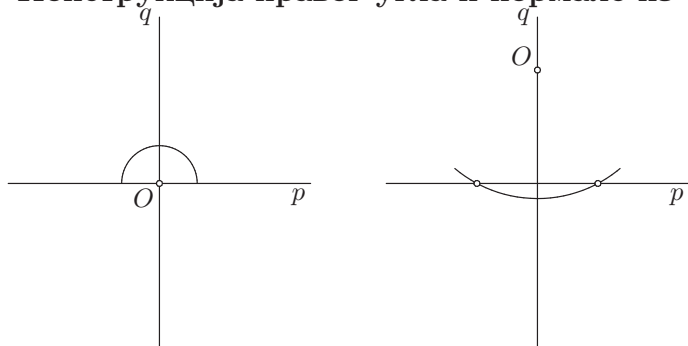
Конструишимо с обе стране праве која садржи дату дуж по један лук с центром у једном темену дужи, а потом и по један лук с центром у другом темену дужи, при чему су полупречници тих лукова подударни и већи су од половине дате дужи (да бисмо имали две пресечне тачке тих лукова). Конструишимо праву која пролази кроз те пресечне тачке и она је медијатриса те дужи. У пресеку дужи и њене медијатрисе налази се средиште те дужи.

Конструкција бисектрисе угла



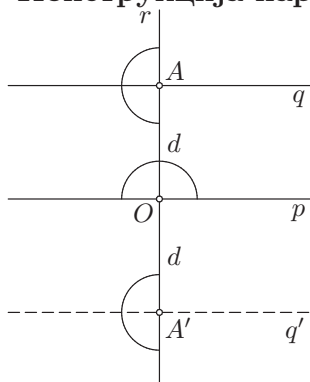
Конструишимо лук с центром у темену угла, произвољног полупречника, од једног до другог крака угла. Конструишимо дуж чија су темена пресечне тачке тог лука и кракова угла, конструишимо полуправу чије је теме теме угла и која припада медијатрисе те дужи и она је бисектриса тог угла.

Конструкција правог угла и нормале из тачке на правој



Нека је дата права p и тачка O . Конструиримо лук с центром O довољно великог полупречника тако да пресече праву p у два тачкама. Конструиримо медијатрису дужи чија су темена пресечне тачке тог лука и праве p и она је нормала на p из тачке O . За конструкцију правог угла довољно је конструисати бисектрису ма ког опруженог угла.

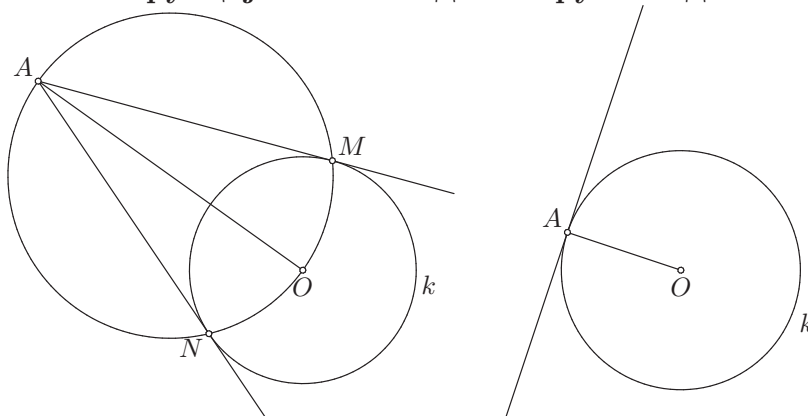
Конструкција паралелних правих



Нека је дата права p . Да бисмо конструисали праву q која је паралелна са p , конструиримо прво нормалу r на правој p у некој произвољној тачки O , а затим конструиримо нормалу q на правој r . Уколико желимо да права q буде на растојању d од праве p (d је дата дуж), конструиримо дуж OA која је подударна дужи d и конструиримо нормалу q на правој r у тачки A . Тада је $q \parallel p$ и налази се на растојању d од ње.

Приметимо да постоје две могућности за тачку A , па постоје и две могућности за праву q . Уколико нам је потребно да се одлучимо за једну од њих, наметнемо додатни услов који жељена права q треба да задовољи и он ће нам дати јединствен избор.

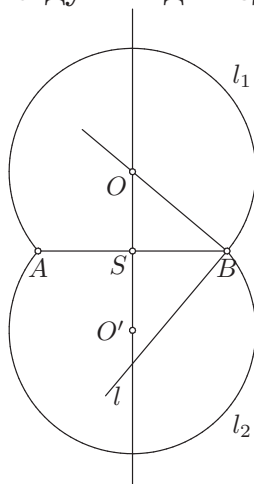
Конструкција тангенте датог круга из дате тачке



Ако је тачка A у спољашњости круга k , означимо с O центар круга k и конструишимо круг над пречником AO (центар му је средиште дужи AO и полупречник му је дуж чија су темена то средиште и тачка A). У пресеку тог круга и круга k означимо тачке M, N . Праве AM, AN су тражене тангенте.

Ако је тачка A на кругу k , онда конструишимо нормалу на полупречнику OA у тачки A .

Конструкција геометријског места тачака (ГМТ) из којих се дата дуж види под датим углом

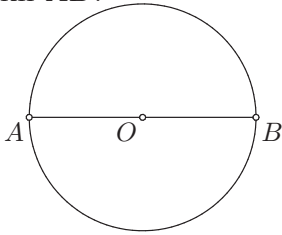


Нека је φ оштар угао, тј. нека је $\varphi < \frac{\pi}{2}$. Конструишимо полуправу $B\ell$ с теменом B такву да је $\angle ABl = \varphi$ и конструишимо нормалу n на полуправој $B\ell$ у тачки B . Конструишимо симетралу дужи AB и нека је њен пресек с правом n тачка O . Конструишимо лук l_1 с центром O од тачке A до тачке B такав да важи $l_1, O \div AB$. Нека је S средиште дужи AB . Конструишимо дуж SO' подударну дужи SO такву да важи $O, O' \div S$ и конструишимо лук l_2 с центром O' од тачке A до тачке B

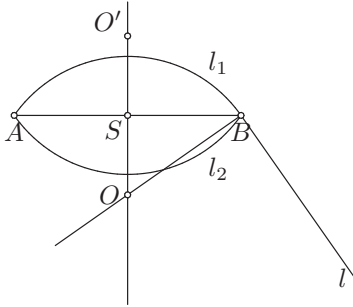
такав да важи $l_2, O' \div AB$.

Унија лукова l_1 и l_2 јесте тражено ГМТ, јер је полуправа Bl нормална на полупречнику OB круга који садржи лук l_1 , па је она тангента и с тетивом AB заклапа угао φ . За произвољну тачку X с лука l_1 угао $\angle AXB$ периферијски над луком $\widehat{AB}$ (који није лук l_1) и подударан је углу између тетиве AB и тангенте Bl , односно углу φ , а онда због симетрије исто важи и за лук l_2 .

Напоменимо да тачка O' није пресек полуправе Bl и медијатрисе дужи AB .

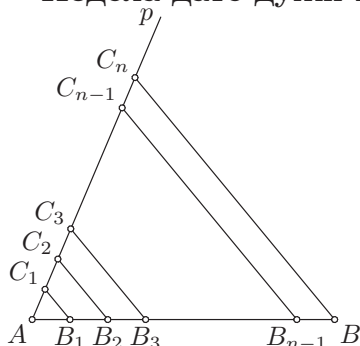


Нека је сада φ прав угао, тј. $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Конструирајмо круг l над пречником AB и то је тражено ГМТ (за свако $X \in l$ угао $\angle AXB$ је периферијски над пречником AB , па је прав, тј. подударан је углу φ).



Коначно, ако је φ туп угао, тј. $\varphi > \frac{\pi}{2}$, конструкција иде слично као у првом случају (када је φ оштар), с тим што уместо услова $l_1, O \div AB$ и $l_2, O' \div AB$ имамо услове $l_1, O \div AB$ и $l_2, O' \div AB$.

Подела дате дужи на n подударних дужи

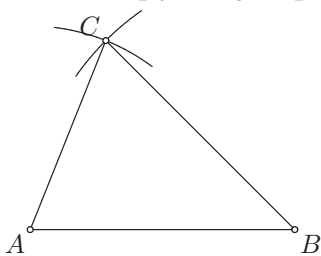


Нека је AB дата дуж. Конструиримо произвољну полуправу Ap различиту од полуправе AB такву да угао $\angle BAp$ није опружен. Нека је C_1 произвољна тачка на полуправој Ap различита од тачке A и нека су $C_2, C_3, \dots, C_n$ тачке на полуправој Ap такве да је $B(A, C_1, C_2, \dots, C_n)$ и $AC_1 \cong C_1C_2 \cong C_2C_3 \cong \dots \cong C_{n-1}C_n$. Конструиримо праву C_nB и затим конструиримо праве које садрже редом тачке $C_{n-1}, \dots, C_2, C_1$ које су паралелне са правом C_nB . Њихове пресеке са дужи AB означимо редом са $B_{n-1}, \dots, B_2, B_1$. Тада су на основу Талесове теореме (и њених последица) дужи $AB_1, B_1B_2, \dots, B_{n-1}B$ међусобно подударне.

Елементарне конструкције троуглова

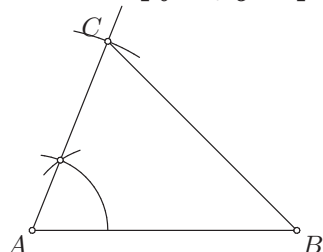
Приметимо да су увек дати они елементи троугла који се јављају у Ставовима о подударности троуглова. Разлог је што се Ставови користе да се докаже јединственост решења, односно да ако конструиремо два таква троугла (којима су одговарајући елементи дате дужи, односно дати углови), они морају бити међусобно подударни.

Конструкција троугла коме су дате странице a, b, c



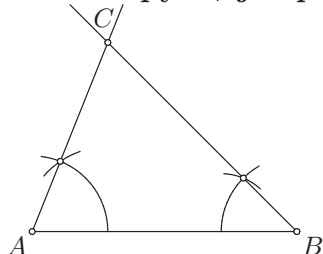
Нека су дате дужи a, b, c . Конструиримо дуж AB која је подударна дужи c . Конструиримо лук с центром A полупречника b и лук с центром B полупречника a . У пресеку тих лукова означимо тачку C и добили смо троугао $\triangle ABC$.

Конструкција троугла коме су дати странице b, c и угао α



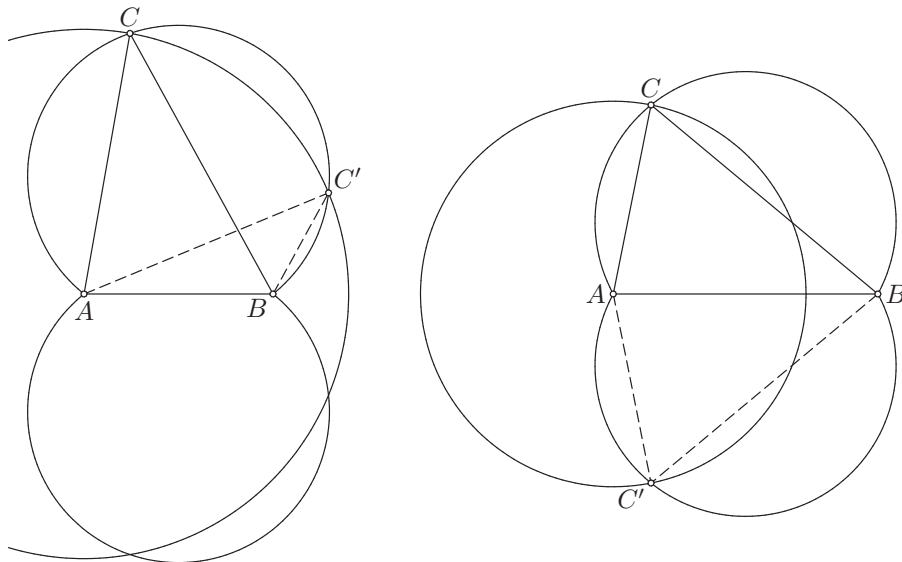
Нека су дати угао α и дужи b, c . Конструиримо дуж AB која је подударна дужи c . Конструиримо полуправу Ap такву да је $\angle BAp = \alpha$. Конструиримо лук с центром A полупречника b , у пресеку с полуправом Ap означимо тачку C и добили смо троугао $\triangle ABC$.

Конструкција троугла коме су дати страница c и углови α, β



Нека су дати дуж c и углови α, β . Конструиримо дуж AB која је подударна дужи c . Конструиримо полуправу Ap такву да је $\angle BAp = \alpha$ и полуправу Bq која је с исте стране праве AB с које је и полуправа Ap и за коју важи $\angle ABq = \beta$. У пресеку тих полуправих означимо тачку C и добили смо троугао $\triangle ABC$.

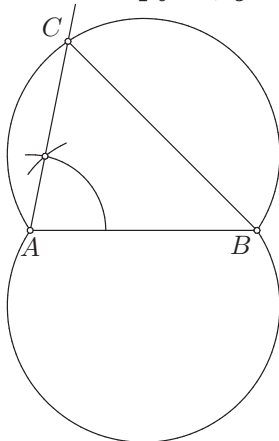
Конструкција троугла коме су дати странице b, c и угао γ



Нека су дати угао γ и дужи b, c и нека је познато да ли је угао β оштар, прав или туп. Конструиримо дуж AB која је подударна дужи c . Конструиримо ГМТ l из којих се дуж AB види под углом γ . Конструиримо круг $k(A, b)$. У пресеку круга k и ГМТ l означимо са C ону тачку за коју је угао $\angle ABC$ оштар ако је β оштар, прав ако је β прав, односно туп ако је β туп. Тако добијамо троугао $\triangle ABC$.

Ако није познато да ли је угао β оштар, прав или туп, онда могу постојати два неподударна троугла $\triangle ABC$ таквих да је $AB = c$, $\angle BAC = \alpha$ и $AC = b$. Ако је $AC \leq AB$, добијена решења биће међусобно подударна (тада се каже да је решење јединствено до на подударност). Ако је $AC > AB$, број међусобно неподударних решења биће једнак броју пресечних тачака круга $k(A, b)$ и једног од лукова ГМТ l (дакле, постојаће два неподударна решења ако се они секу у двама разним тачкама, постојаће јединствено решење до на подударност ако се они додирују, тј. секу у једној тачки, а неће бити решења ако они немају пресечних тачака).

Конструкција троугла коме су дати страница c и углови α, γ



Нека су дати дуж c и углови α, γ . Конструиримо дуж AB која је подударна дужи c . Конструиримо ГМТ l из којих се дуж AB види под углом γ . Конструиримо полуправу Ap такву да је $\angle BAp = \alpha$. У њеном пресеку са ГМТ l означимо са C тачку која није тачка A и добијамо троугао $\triangle ABC$.

Постоји још елементарних конструкција. Неке од њих ћемо навести у решењима задатака. Сада ћемо изучити етапе у решавању задатака из конструкција. Те етапе су Анализа, Конструкција, Доказ и Дискусија.

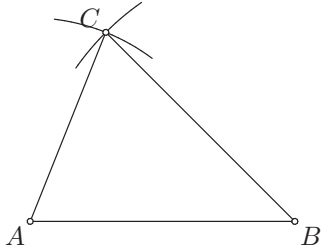
Анализа је етапа конструктивног задатка у којој се претпостави да имамо решен задатак, тј. да имамо конструисану фигуру која испуњава услове задатка P . Затим тражимо нове услове Q које та фигура задовољава помоћу којих се она може лакше конструисати. Услове Q изводимо из услова P , па дакле доказујемо и $P \Rightarrow Q$.

Конструкција је етапа у којој применом коначно много основних и елементарних конструкција описујемо како треба конструисати фигуру која задовољава услове Q које смо извели из задатих услова P током Анализе.

С обзиром на то да је наш задатак био да конструиремо фигуру која задовољава услове P , а ми смо у етапи Конструкција конструисали фигуру која задовољава услове Q , сада морамо доказати да тако конструисана фигура заиста задовољава почетне услове задатка, тј. услове P . Према томе, у етапи **Доказ** доказујемо $Q \Rightarrow P$. Све што смо навели у етапи Конструкција сматрамо да важи „по конструкцији” (ПК).

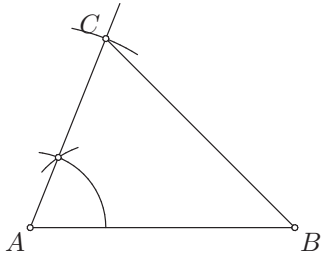
Коначно, у етапи **Дискусија** испитујемо колико постоји фигура које задовољавају услове задатка у зависности од њих. Испитајмо под којим је условима могуће извршити елементарне конструкције троуглова.

Троугао коме су дате странице a, b, c



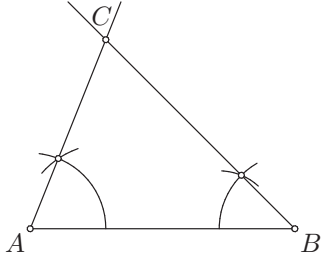
Ако су дате странице a, b, c , неопходно је да се лукови $l_1(A, b)$ и $l_2(B, a)$ секу у тачки ван дужи AB , што се дешава ако се одговарајући кругови секу у двама тачкама. Услов за ово је да је $|a - b| < AB < a + b$, што је познатије као неједнакост троугла за његове странице. Дакле, ако је $a + b > c$, $b + c > a$, $c + a > b$, постоји јединствено решење до на подударност, а у супротном нема решења.

Троугао коме су дати странице b, c и угао α



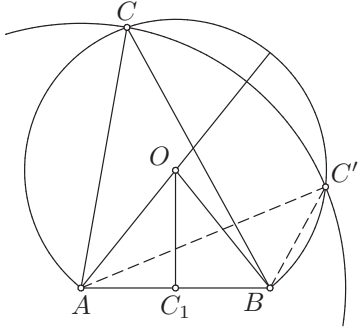
Ако су дати угао α и странице b, c , конструкција троугла је увек могућа и решење је јединствено до на подударност.

Троугао коме су дати страница c и углови α, β



Ако су дати дуж c и углови α, β , неопходно је да се краци Ap, Bq углова $\angle BAp, \angle ABq$ секу. Ово је тачно ако и само ако је $\alpha + \beta < \pi$, јер ако је $\alpha + \beta = \pi$, ови краци припадају паралелним правима, а ако је $\alpha + \beta > \pi$, праве које садрже ове краке се секу са супротне стране праве AB од оне где се ови краци налазе. Дакле, ако је $\alpha + \beta < \pi$, постоји јединствено решење до на подударност, а у супротном нема решења.

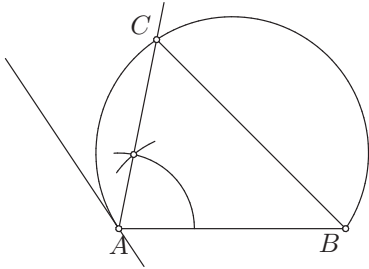
Троугао коме су дати странице b, c и угао γ



Ако су дате странице b, c и угао γ , при чему је познато да ли је угао β оштар, прав или туп, неопходно је да ГМТ l из којих се дуж AB види под углом γ и круг $k(A, b)$ имају заједничких тачака. Ово је тачно ако и само ако полупречник круга k није већи од пречника кругова који одређују ГМТ l . Ради једноставности, посматрајмо све само у једној од двеју полуравни с рубом AB . У њој се налази један од два лука који чине l .

Нека је O центар круга коме припада лук l и нека је C_1 средиште странице AB . Угао $\angle AOB$ је централни угао над луком $\widehat{AB}$ (супротним од лука l), па је двапут већи од периферијског угла над истим луком. Како је l ГМТ из којих се дуж AB види под углом γ , следи да је $\angle AOB = 2\gamma$. Троугао $\triangle ABO$ је једнакокрак, па је OC_1 симетрала угла $\angle AOB$, што значи да је $\angle AOC_1 = \frac{1}{2}\angle AOB = \gamma$. Како је $\sin \angle AOC_1 = \frac{AC_1}{AO}$, следи да је $\sin \gamma = \frac{\frac{1}{2}AB}{AO}$, па је $\sin \gamma = \frac{c}{2AO}$. Дакле, $2AO = \frac{c}{\sin \gamma}$ је пречник круга који садржи лук l , па следи да је услов постојања решења $b \leq \frac{c}{\sin \gamma}$.

Троугао коме су дати страница c и углови α, γ



Коначно, ако су дати дуж s и углови α, γ , услов постојања решења јесте да је угао $\angle BAC$ мањи од угла који тангента t на кругу који садржи лук ГМТ l гради са тетивом AB (посматрамо, поново, све у једној од двеју полуравни s рубом AB). Угао који тангента t гради с тетивом AB суплементан је периферијском углу на ГМТ l , тј. једнак је $\pi - \gamma$. Дакле, мора бити $\alpha < \pi - \gamma$, односно $\alpha + \gamma < \pi$. У том случају постоји јединствено решење до на подударност.

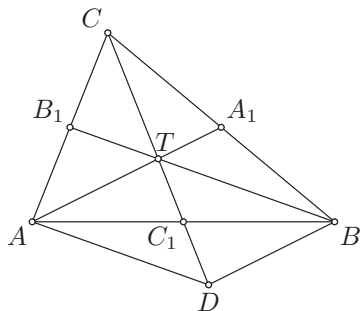
Напомена 8. Као што се може приметити, у дискусији под којим су условима могуће елементарне конструкције троуглова коришћене су тригонометријске функције. Надаље ће етапа Дискусија у задацима из конструкција бити једино место где сме да се користи тригонометрија, јер нам једино тригонометријске функције дају везу између дужи и углова која нам је потребна да бисмо одредили постојање и број неподударних решења. Дакле, у Анализи, Конструкцији и Доказу, као и у било ком задатку који није из конструкција, тригонометрија **не сме** да се користи.

1. Конструисати троугао ABC ако су задати следећи елементи:

- | | |
|-----------------------------|----------------------------------|
| 1) t_a, t_b, t_c ; | 7) $\beta - \gamma, l_a, \rho$; |
| 2) β, γ, p ; | 8) $\alpha, b - c, \rho_a$; |
| 3) $\alpha, a, b + c$; | 9) a, ρ_b, ρ_c ; |
| 4) $\beta, h_c, b \pm c$; | 10) α, ρ, ρ_a ; |
| 5) $t_a, h_b, b \pm c$; | 11) $b - c, h_a, \rho$. |
| 6) $\beta - \gamma, b, c$; | |

Решење: 1) t_a, t_b, t_c

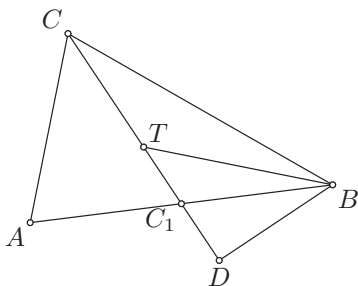
Анализа: Нека је $\triangle ABC$ троугао који задовољава услове задатка. Нека су A_1, B_1, C_1 редом средишта страница BC, CA, AB . Тада су тежишне дужи AA_1, BB_1, CC_1 редом подударне датим дужима t_a, t_b, t_c .



Нека је T пресек тежишних дужи AA_1, BB_1, CC_1 , тј. тежиште троугла $\triangle ABC$ и нека је тачка D симетрична тачки T у односу на тачку C_1 . Тачка C_1 је заједничко средиште дужи TD и AB , па је четвороугао $ADBT$ паралелограм. Следи да је $AD \parallel BT$ и $AD = BT = \frac{2}{3}BB_1 = \frac{2}{3}t_b$, као и $BD \parallel AT$ и $BD = AT = \frac{2}{3}AA_1 = \frac{2}{3}t_a$. Такође, имамо да важи $TD = TC_1 + C_1D = 2TC_1 = 2 \cdot \frac{1}{3}CC_1 = \frac{2}{3}t_c$. У троуглу $\triangle TDB$ имамо да је $TD = \frac{2}{3}t_c$, $DB = \frac{2}{3}t_a$ и $BT = \frac{2}{3}t_b$, па тај троугао у мемо да конструишемо. Тачка C_1 је средиште дужи TD и AB , па је тачка A симетрична тачки B у односу на тачку C_1 . Такође, како је $CT = \frac{2}{3}CC_1 = \frac{2}{3}t_c = TD$, следи

да је тачка T средиште дужи CD , као и да је тачка C симетрична тачки D у односу на тачку T .

Конструкција: Конструирамо троугао $\triangle TDB$ такав да је $TD = \frac{2}{3}t_c$, $DB = \frac{2}{3}t_a$, $BT = \frac{2}{3}t_b$. Означимо са C_1 средиште дужи TD , са A тачку симетричну тачки B у односу на тачку C_1 и са C тачку симетричну тачки D у односу на тачку T .



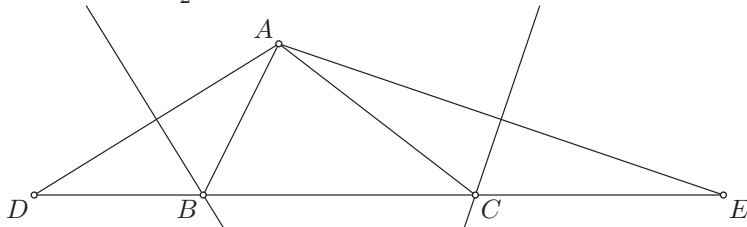
Доказ: Докажимо да овако конструисани троугао $\triangle ABC$ задовољава услове задатка. По конструкцији је C_1 средиште дужи AB . Означимо са A_1, B_1 редом средишта страница BC, CA . Треба доказати да су тежишне дужи AA_1, BB_1, CC_1 редом подударне дужима t_a, t_b, t_c . ПК је C_1 средиште дужи TD , па је $\mathcal{B}(T, C_1, D)$ и $TC_1 = C_1D$, а T је ПК средиште дужи CD , па следи $\mathcal{B}(C, T, D)$ и $CT = TD = TC_1 + C_1D = 2TC_1$. Дакле, важи распоред $\mathcal{B}(C, T, C_1, D)$ и $CT : TC_1 = 2TC_1 : TC_1 = 2 : 1$, па је T тежиште троугла $\triangle ABC$. Следи да је $AT = \frac{2}{3}AA_1$, $BT = \frac{2}{3}BB_1$ и $CT = \frac{2}{3}CC_1$. ПК је $BT = \frac{2}{3}t_b$ и $CT = TD = \frac{2}{3}t_c$, па следи да је $\frac{2}{3}BB_1 = \frac{2}{3}t_b$ и $\frac{2}{3}CC_1 = \frac{2}{3}t_c$. Дакле, важи $BB_1 = t_b$ и $CC_1 = t_c$. Остаје још да докажемо да је $AA_1 = t_a$. Како је ПК C_1 заједничко средиште дужи AB и TD , следи да је четвороугао $ADBT$ паралелограм, па је $AT = BD$. ПК је $BD = \frac{2}{3}t_a$, а како је $AT = \frac{2}{3}AA_1$, следи да је $\frac{2}{3}AA_1 = \frac{2}{3}t_a$, тј. $AA_1 = t_a$.

Дискусија: Ако је $\frac{2}{3}t_a + \frac{2}{3}t_b \leq \frac{2}{3}t_c$ или $\frac{2}{3}t_b + \frac{2}{3}t_c \leq \frac{2}{3}t_a$ или $\frac{2}{3}t_c + \frac{2}{3}t_a \leq \frac{2}{3}t_b$, односно $t_a + t_b \leq t_c$ или $t_b + t_c \leq t_a$ или $t_c + t_a \leq t_b$, онда не постоји троугао $\triangle TDB$, па самим тим не постоји ни троугао $\triangle ABC$. Дакле, у овом случају нема решења.

Ако је $t_a + t_b > t_c$, $t_b + t_c > t_a$ и $t_c + t_a > t_b$, онда је троугао $\triangle TDB$ одређен јединствено до на подударност (каква год два различита троугла $\triangle TDB$ конструисали, они ће бити подударни на основу става ССС). Како троугао $\triangle TDB$ једнозначно одређује троугао $\triangle ABC$ (и обратно), следи да је и троугао $\triangle ABC$ одређен јединствено до на подударност. Према томе, у овом случају постоји јединствено решење до на подударност.

2) β, γ, p

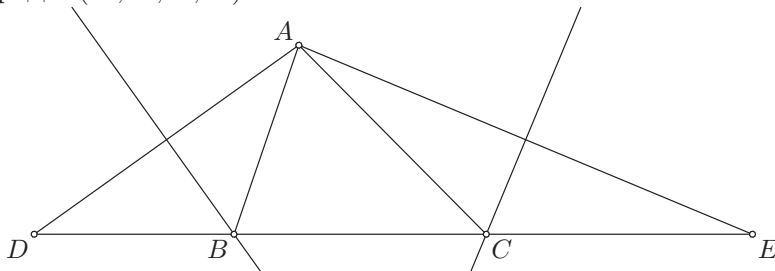
Анализа: Нека је $\triangle ABC$ троугао који испуњава услове задатка, тј. такав да је $\frac{BC+CA+AB}{2} = p$, $\angle ABC = \beta$ и $\angle BCA = \gamma$.



Нека су D, E тачке на правој BC такве да је $\mathcal{B}(D, B, C, E)$, $DB = AB$ и $CE = AC$. Тада је $DE = AB + BC + CA = 2p$. Троугао $\triangle ABD$ је једнакокраки, јер је $AB = DB$, па следи да је $\angle ADB = \angle DAB = \varphi$. Угао $\angle ABC$ је спољашњи угао тог троугла, па је он једнак збиру унутрашњих несуседних углова $\angle ADB$ и $\angle DAB$. Дакле, $\beta = \varphi + \varphi = 2\varphi$, па следи да је $\varphi = \frac{\beta}{2}$. Дакле, $\angle ADB = \frac{\beta}{2}$. Слично се доказује да је $\angle AEC = \frac{\gamma}{2}$.

У троуглу $\triangle ADE$ важи да је $DE = 2p$, $\angle ADE = \angle ADB = \frac{\beta}{2}$ и $\angle AED = \angle AEC = \frac{\gamma}{2}$, па тај троугао уметмо да конструишемо. Како је $DB = AB$, следи да тачка B припада медијатриси дужи DA . Слично, из $CE = AC$ следи да тачка C припада медијатриси дужи AE .

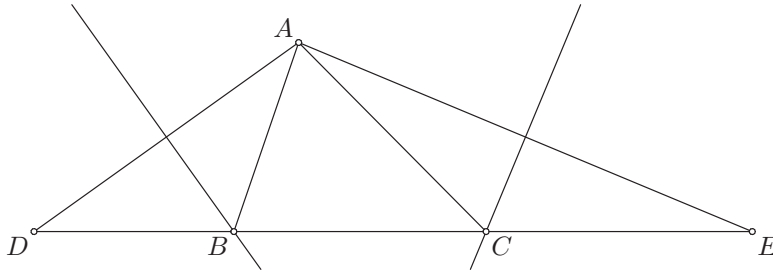
Конструкција: Конструишемо троугао $\triangle ADE$ такав да је $DE = 2p$, $\angle ADE = \frac{\beta}{2}$, $\angle AED = \frac{\gamma}{2}$. Конструишемо медијатресе дужи AD и AE и означимо редом њихове пресеке с дужи DE са B, C тако да важи распоред $\mathcal{B}(D, B, C, E)$.



Доказ: Треба доказати да је $\frac{AB+BC+AC}{2} = p$, да је $\angle ABC = \beta$ и да је $\angle BCA = \gamma$. ПК је $\mathcal{B}(D, B, C, E)$, па је $DE = DB + BC + CE$. Тачка B припада медијатриси дужи AD , па је $DB = AB$, а тачка C припада медијатриси дужи AE , па је $EC = AC$. Следи да је $DE = AB + BC + AC$. Такође, ПК је $DE = 2p$, па следи да је $AB + BC + AC = 2p$, односно да је $\frac{AB+BC+AC}{2} = p$.

Из $DB = AB$ следи да је троугао $\triangle ADB$ једнакокрак, па имамо да је $\angle DAB = \angle ADB$. ПК важи да је $\mathcal{B}(D, B, C, E)$ и $\angle ADE = \frac{\beta}{2}$, па је

$\angle ADB = \angle ADE = \frac{\beta}{2}$. Угао $\angle ABC$ је спољашњи угао троугла $\triangle ADB$, па је једнак збиру унутрашњих несуседних углова $\angle DAB$ и $\angle ADB$. Дакле, $\angle ABC = \angle DAB + \angle ADB = \frac{\beta}{2} + \frac{\beta}{2} = \beta$. Слично се доказује и да је $\angle BCA = \gamma$.



Дискусија: Ако је $\beta + \gamma \geq \pi$, не постоји троугао $\triangle ABC$ коме су то унутрашњи углови, па задатак нема решења.

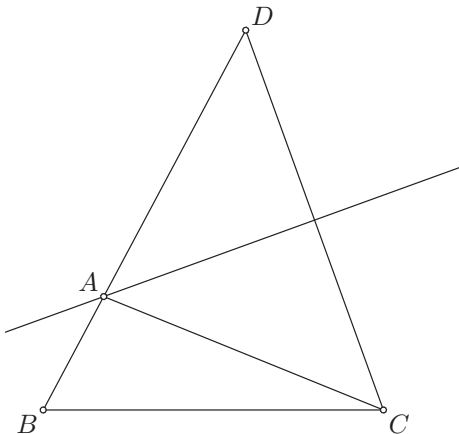
Нека је $\beta + \gamma < \pi$. Тада је $\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} < \frac{\pi}{2} < \pi$, па постоји јединствен троугао $\triangle ADE$ до на подударност. Да ли медијатрисе странице AD и AE секу страницу DE редом у тачкама B, C тако да важи $\mathcal{B}(D, B, C, E)$? Угао $\angle ADE = \frac{\beta}{2}$ је оштар, па медијатриса странице AD , која је нормална на краку DA тога угла, сече његов други крак. Дакле, тачка B постоји и важи $B, E \asymp D$. Нама је потребно да важи распоред $\mathcal{B}(D, B, E)$, а то је тачно ако је $\angle DAB < \angle DAE$. Како је $\angle DAB = \angle ADB = \frac{\beta}{2}$ и $\angle DAE = \pi - \angle ADE - \angle AED = \pi - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2}$, следи да важи $\mathcal{B}(D, B, E)$ ако испуњено $\frac{\beta}{2} < \pi - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2}$, односно $\beta + \frac{\gamma}{2} < \pi$, што је испуњено, јер је $\beta + \gamma < \pi$. Треба још проверити да ли медијатриса странице AE сече EB у тачки C таквој да важи $\mathcal{B}(B, C, E)$, јер ће онда важити распоред $\mathcal{B}(D, B, C, E)$.

Угао $\angle AEB = \angle AED = \frac{\gamma}{2}$ је оштар, па медијатриса странице AE , која је нормална на краку EA тога угла, сече његов други крак EB у тачки C таквој да је $B, C \asymp E$. При томе важи распоред $\mathcal{B}(E, C, B)$ ако је $\angle EAC < \angle EAB$. Како је $\angle EAC = \angle AEC = \frac{\gamma}{2}$ и $\angle EAB = \pi - \angle ABE - \angle AEB = \pi - \beta - \frac{\gamma}{2}$, следи да је $\mathcal{B}(E, C, B)$ испуњен ако је $\frac{\gamma}{2} < \pi - \beta - \frac{\gamma}{2}$, односно ако је $\beta + \gamma < \pi$.

Дакле, ако је $\beta + \gamma < \pi$, постоји јединствено решење до на подударност.

3) $\alpha, a, b + c$

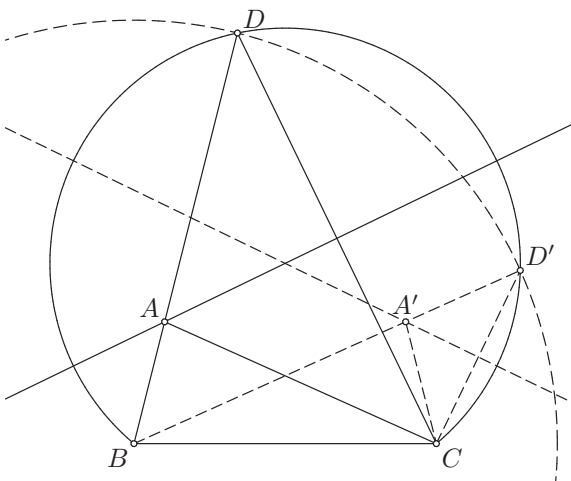
Анализа: Нека је $\triangle ABC$ троугао који испуњава услове задатка, тј. такав да је $\angle BAC = \alpha$, $BC = a$ и $AC + AB = b + c$.



Нека је D тачка таква да важи $\mathcal{B}(B, A, D)$ и $AD = AC$. Тада је $BD = BA + AD = BA + AC = b + c$. Такође, троугао $\triangle ACD$ је једнакокраки, па је $\angle ADC = \angle ACD = \varphi$. Угао $\angle BAC$ је спољашњи угао троугла $\triangle ACD$, па је једнак збиру његових унутрашњих несуседних углова $\angle ADC$ и $\angle ACD$. Следи да је $\alpha = \varphi + \varphi$, тј. $\varphi = \frac{\alpha}{2}$. Дакле, $\angle ADC = \frac{\alpha}{2}$.

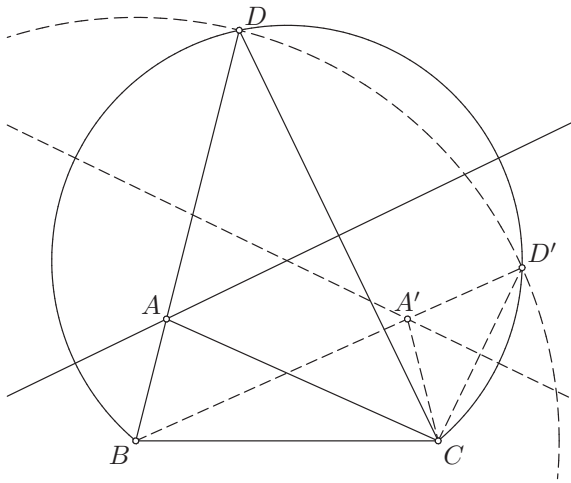
У троуглу $\triangle BCD$ је $BC = a$, $BD = b + c$ и $\angle BDC = \angle ADC = \frac{\alpha}{2}$, па тај троугао унемо да конструишемо. Из $\mathcal{B}(B, A, D)$ и $AD = AC$ следи да тачка A припада пресеку медијатрисе странице CD и странице BD .

Конструкција:



Конструишимо троугао $\triangle BCD$ такав да је $BC = a$, $BD = b + c$ и $\angle BDC = \frac{\alpha}{2}$. Конструишимо медијатрису странице CD и означимо са A њен пресек са страницом BD (дакле, да важи $\mathcal{B}(D, A, B)$).

Доказ: Треба доказати да је $\angle BAC = \alpha$, $BC = a$ и $AC + AB = b + c$. ПК је $BC = a$. Тачка A припада страници BD , па важи $\mathcal{B}(B, A, D)$ и $BD = BA + AD$. С друге стране, тачка A припада медијатриси странице CD , па је $AD = AC$. Дакле, $BD = BA + AC$, а како је ПК $BD = b + c$, следи да је $BA + AC = b + c$. Троугао $\triangle ACD$ је једнакокрак, па је $\angle ACD = \angle ADC$. Како је ПК $\mathcal{B}(B, A, D)$ и $\angle BDC = \frac{\alpha}{2}$, следи да је $\angle ADC = \angle BDC = \frac{\alpha}{2}$. Угао $\angle BAC$ је спољашњи угао троугла $\triangle ACD$, па је једнак збиру унутрашњих несуседних углова $\angle ACD$ и $\angle ADC$. Следи да је $\angle BAC = \angle ACD + \angle ADC = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \alpha$.



Дискусија: Ако је $\alpha \geq \pi$, не постоји троугао $\triangle ABC$ коме је то унутрашњи угао, па задатак нема решења.

Ако је $b + c \leq a$, не постоји троугао $\triangle ABC$ коме је $b + c$ збир двеју страница а a трећа страница (због неједнакости троугла), па задатак нема решења.

Нека је $\alpha < \pi$ и $b + c > a$. Да би постојао троугао $\triangle BCD$, потребно је да буде испуњено $BD \leq \frac{BC}{\sin \angle BDC}$, односно $b + c \leq \frac{a}{\sin \frac{\alpha}{2}}$. Нама није познато да ли је угао $\angle BCD$ оштар, прав или туп. Како је $BD = b + c > a = BC$, следи да постоје два неподударна троугла $\triangle BCD$ ако је $b + c < \frac{a}{\sin \frac{\alpha}{2}}$, односно да је троугао $\triangle BCD$ јединствен ако је $b + c = \frac{a}{\sin \frac{\alpha}{2}}$.

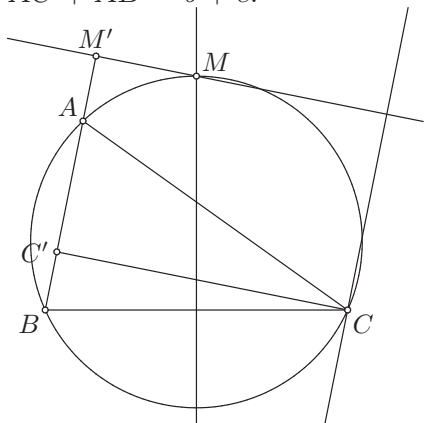
Треба још проверити да ли медијатриса странице CD сече страницу BD , тј. да ли важи $\mathcal{B}(D, A, B)$. С обзиром на то да је $\angle BDC = \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$, медијатриса дужи CD сигурно сече полуправу DB у некој тачки A (права нормална на једном краку оштрог угла сече други крак). Троугао $\triangle CDA$ је једнакокраки ($AC = AD$), па је $\angle ACD = \angle ADC = \angle BDC$. Тачка A припада дужи BD ако и само ако је $\angle DCA < \angle DCB$, односно ако и само ако је $\angle BDC < \angle DCB$. На основу неједнакости троугла, ово

важи ако и само ако је $BC < DB$, тј. $a < b + c$, а ово смо претпоставили да важи. Дакле, за сваки од неподударних троуглова $\triangle BCD$ постоји тачка A , па постоје два неподударна троугла $\triangle ABC$.

Дакле, ако је $\alpha < \pi$, $b + c > a$ и $\frac{a}{\sin \frac{\alpha}{2}} > b + c$, постоје два неподударна решења. Ако је $\alpha < \pi$, $b + c > a$ и $\frac{a}{\sin \frac{\alpha}{2}} = b + c$, постоји јединствено решење до на подударност. У супротном нема решења.

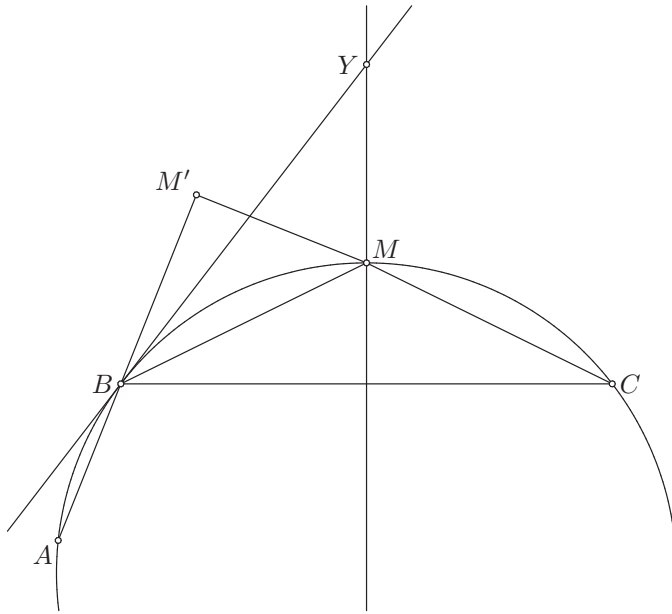
4) а) $\beta, h_c, b + c$

Анализа: Нека је $\triangle ABC$ троугао који испуњава услове задатка. Ако је C' подножје висине из темена C , онда је $\angle ABC = \beta$, $CC' = h_c$ и $AC + AB = b + c$.



Нека су M, M' тачке из Великог задатка. Тада важи $A, M' \in BC$ и $MM' \perp AB$. Следи да је $\angle M'BC = \beta$. На основу Великог задатка следи да је $BM' = \frac{1}{2}(b + c)$. Из $CC' = h_c$ следи да тачка C припада правој која је паралелна правој AB , тј. правој BM' , налази се на растојању h_c од ње и налази се с оне стране праве BM' с које се налази крак BC угла $\angle M'BC$. Тачка M припада правој која је нормална на правој BM' у тачки M' и медијатриси дужи BC . Коначно, тачка A припада правој BM' и описаном кругу троугла $\triangle BCM$, јер је то у ствари описани круг троугла $\triangle ABC$ коме тачка M припада на основу Великог задатка.

Конструкција: Конструирајмо дуж $BM' = \frac{1}{2}(b + c)$. Конструирајмо угао $\angle M'Bq = \beta$. Конструирајмо праву p која је паралелна правој BM' , налази се на растојању h_c од ње и налази се с оне стране праве BM' с које се налази крак Bq угла $\angle M'Bq$. У пресеку праве p и крака Bq означимо тачку C . Конструирајмо медијатрису m дужи BC . Конструирајмо нормалу n на правој BM' у тачки M' . У пресеку правих m и n означимо са M тачку такву да важи $M, M' \in BC$. Конструирајмо описани круг l троугла $\triangle BMC$. У пресеку круга l и праве BM' означимо тачку A (различиту од тачке B) такву да важи $A, M' \in BC$.

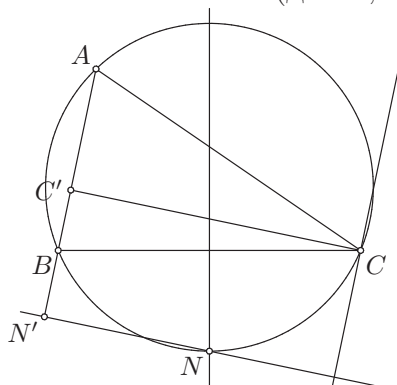


Остаје још да нађемо услов који ће обезбедити да се права BM' и круг l секу у тачкама A, B таквим да је $A, M' \div BC$. Нека је t тангента на кругу l у тачки B и нека је Y тачка на њој таква да важи $Y, M, M' \div BC$. Тада је $\angle YBM$ угао између тетиве BM и тангенте t , па је подударан периферијском углу $\angle BCM$ над тетивом BM . Троугао $\triangle BCM$ је једнакокрак, па су углови $\angle MBC$ и $\angle BCM$ подударни. Следи да је $\angle YBM = \angle BCM = \angle MBC$. Услов да важи распоред $A, M' \div BC$ је да је угао $\angle MBM'$ мањи од угла $\angle MBY$, тј. од њему подударног угла $\angle MBC$. Како је $\cos$ опадајућа функција на $(0, \frac{\pi}{2})$ (и на $(0, \pi)$, али овде је примењујемо на оштре углове), овај услов је еквивалентан са условом $\cos \angle MBM' > \cos \angle MBC$, тј. $\frac{BM'}{BM} > \frac{\frac{1}{2}BC}{BM}$, односно $BM' > \frac{1}{2}BC$. Дакле, услов је $\frac{1}{2}(b+c) > \frac{1}{2} \frac{h_c}{\sin \beta}$, тј. $h_c < (b+c) \sin \beta$. Овај услов је јачи од постојећег услова $h_c < (b+c) \tan \beta$ за оштре углове β , јер је $\sin \beta < \tan \beta$ за све $\beta \in (0, \frac{\pi}{2})$, па је услов $h_c < (b+c) \tan \beta$ за оштре углове β сувишан. Такође, услов $h_c < (b+c) \sin \beta$ мора важити за све $\beta \in (0, \pi)$ да би постојало решење.

Дакле, ако је $\beta < \pi$ и $h_c \geq (b+c) \sin \beta$, нема решења, а ако је $\beta < \pi$ и $h_c < (b+c) \sin \beta$, постоји јединствено решење до на подударност.

б) $\beta, h_c, b - c$

Анализа: Нека је $\triangle ABC$ троугао који испуњава услове задатка. Нека је C' подножје висине из темена C . Тада је $\angle ABC = \beta$, $CC' = h_c$ и $AC - AB = b - c$ (дакле, мора бити $AC > AB$).



Нека су N, N' тачке из Великог задатка. Тада важи $A, N' \div BC$ (због $AB < AC$) и $NN' \perp AB$. Следи да је $\angle N'BC = \pi - \beta$. На основу Великог задатка следи да је $BN' = \frac{1}{2}(b - c)$. Из $CC' = h_c$ следи да тачка C припада правој која је паралелна правој AB , тј. правој BN' , налази се на растојању h_c од ње и налази се с оне стране праве BN' с које се налази крак BC угла $\angle N'BC$. Тачка N припада правој која је нормална на правој BN' у тачки N' и медијатриси дужи BC . Коначно, тачка A припада правој BN' и описаном кругу троугла $\triangle BCN$, јер је то у ствари описани круг троугла $\triangle ABC$ коме тачка N припада на основу задатка 1.9.

Конструкција: Конструиримо дуж $BN' = \frac{1}{2}(b - c)$. Конструиримо угао $\angle N'Bq = \pi - \beta$. Конструиримо праву p која је паралелна правој BN' , налази се на растојању h_c од ње и налази се с оне стране праве BN' с које се налази крак Bq угла $\angle N'Bq$. У пресеку праве p и крака Bq означимо тачку C . Конструиримо медијатрису m дужи BC . Конструиримо нормалу n на правој BN' у тачки N' . У пресеку правих m и n означимо са N тачку такву да важи $N, N' \div BC$. Конструиримо описани круг l троугла $\triangle BNC$. У пресеку круга l и праве BN' означимо са A тачку такву да важи $\mathcal{B}(A, B, N')$.

Доказ: Треба доказати да је $\angle ABC = \beta$, $AC > AB$ и $AC - AB = b - c$, као и да је висина из темена C подударна дужи h_c .

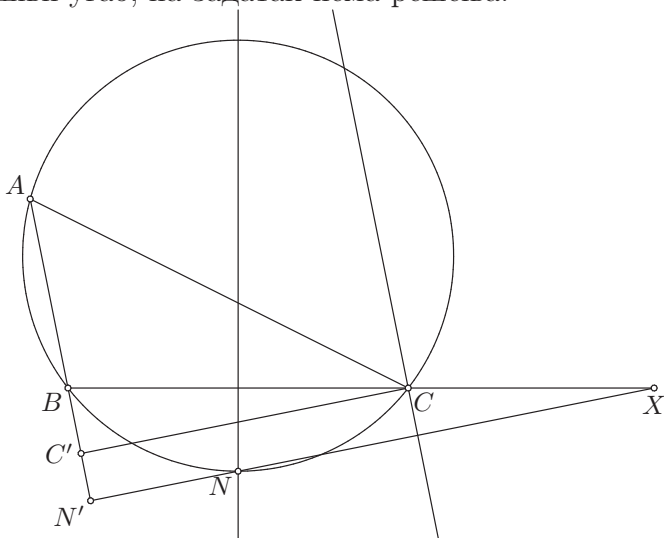
ПК важи $\mathcal{B}(A, B, N')$ и $\angle N'BC = \pi - \beta$, па је $\angle ABC = \pi - \angle N'BC = \pi - (\pi - \beta) = \beta$.

Тачка C припада правој која је паралелна правој BN' , тј. правој AB и налази се на растојању h_c од ње. Ако је CC' висина из темена C , тј.

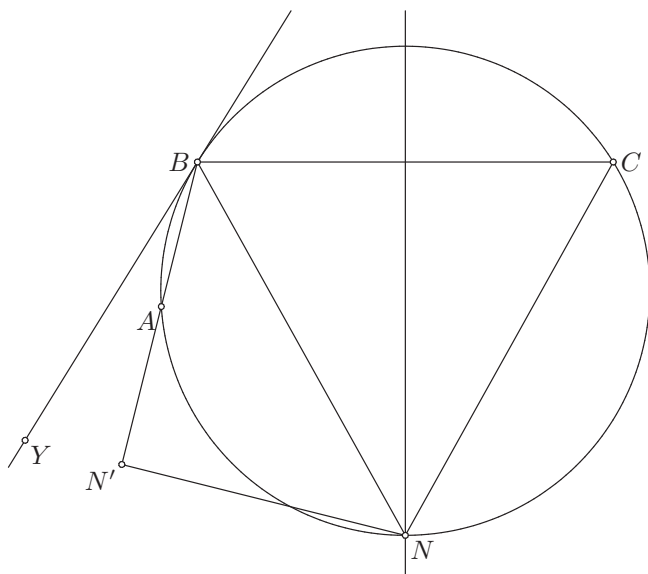
ако је C' тачка на правој AB и $CC' \perp AB$, следи да је $CC' = h_c$ (дуж која је нормална на паралелним правима подударна је растојању између њих).

Круг l садржи тачке A, B, C , па је то описани круг троугла $\triangle ABC$. Тачка N припада медијатриси m стране BC и описаном кругу l троугла $\triangle ABC$. ПК важи $\mathcal{B}(A, B, N')$, па следи да важи $A, N' \div BC$, а како ПК важи $N, N' \div BC$, следи да важи $A, N \div BC$. Према томе, тачка N је тачка из Великог задатка. Тачка N припада нормали n на правој BN' , односно правој AB , у тачки N' , па следи да је N' подножје нормале из тачке N на правој AB . Дакле, N' је тачка из Великог задатка. Због $\mathcal{B}(A, B, N')$, следи да је $AN' > AB$, а на основу Великог задатка је $AN' = \frac{1}{2}(AC + AB)$ (ово важи без обзира на то да ли је $AB < AC$ или није), па следи да је $\frac{1}{2}(AC + AB) > AB$, односно $AC + AB > 2AB$, тј. $AC > AB$. Сада основу Великог задатка следи да је $BN' = \frac{1}{2}(AC - AB)$, а како је ПК $BN' = \frac{1}{2}(b - c)$, следи да је $\frac{1}{2}(AC - AB) = \frac{1}{2}(b - c)$, тј. да је $AC - AB = b - c$.

Дискусија: Ако је $\beta \geq \pi$, не постоји троугао $\triangle ABC$ коме је то унутрашњи угао, па задатак нема решења.



Нека је $\beta < \pi$. Ако β није туп, онда $\pi - \beta$ није оштар, па се нормала n на правој BN' у тачки N' и полуправа BC (крак угла $\angle N'BC = \angle N'Bq = \pi - \beta$) не секу. Тада је испуњено $N, N' \div BC$. Ако је пак β туп, тј. $\pi - \beta$ оштар, онда се нормала n и полуправа BC секу у некој тачки X . Услов да важи $N, N' \div BC$ је $\frac{1}{2}BC < BX$. Из $\cos(\pi - \beta) = \frac{BN'}{BX}$ добијамо $BX = \frac{BN'}{\cos(\pi - \beta)}$, па услов да важи $N, N' \div BC$ гласи $\frac{1}{2}BC < \frac{BN'}{\cos(\pi - \beta)}$. Како је $\sin(\pi - \beta) = \frac{CC'}{BC}$, следи да је $BC = \frac{CC'}{\sin(\pi - \beta)} = \frac{h_c}{\sin(\pi - \beta)}$, па добијамо $\frac{h_c}{2 \sin(\pi - \beta)} < \frac{b - c}{2 \cos(\pi - \beta)}$, тј. $h_c < (b - c) \operatorname{tg}(\pi - \beta)$.

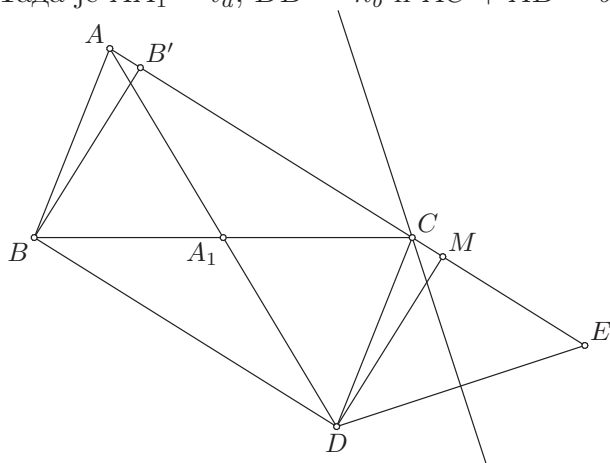


Остаје још да нађемо услов који ће обезбедити распоред $\mathcal{B}(A, B, N')$. Нека је t тангента на кругу l у тачки B и нека је Y тачка на њој таква да важи $Y, N, N' \doteq BC$. Тада је $\angle YBN$ угао између тетиве BN и тангенте t , па је подударан периферијском углу $\angle BCN$ над тетивом BN . Троугао $\triangle BCN$ је једнакокрак, па су углови $\angle NBC$ и $\angle BCN$ подударни. Следи да је $\angle YBN = \angle BCN = \angle NBC$. Услов да важи распоред $\mathcal{B}(A, B, N')$ је да је угао $\angle N'BN$ већи од угла $\angle YBN$, тј. од њему подударног угла $\angle NBC$. Како је $\cos$ опадајућа функција на $(0, \frac{\pi}{2})$ (и на $(0, \pi)$, али овде је примењујемо на оштре углове), овај услов је еквивалентан са условом $\cos \angle N'BN < \cos \angle NBC$, тј. $\frac{BN'}{BN} < \frac{\frac{1}{2}BC}{BN}$, односно $BN' < \frac{1}{2}BC$. Дакле, услов је $\frac{1}{2}(b - c) < \frac{1}{2}\frac{h_c}{\sin \beta}$, тј. $(b - c) \sin \beta < h_c$ (важи $\sin(\pi - \beta) = \sin \beta$).

Према томе, ако је $\beta \leq \frac{\pi}{2}$ и $(b - c) \sin \beta < h_c$, задатак има јединствено решење до на подударност. Такође, ако је $\beta > \frac{\pi}{2}$ и $(b - c) \sin \beta < h_c < (b - c) \operatorname{tg}(\pi - \beta)$, задатак има јединствено решење до на подударност. У свим осталим случајевима задатак нема решења.

5) а) $t_a, h_b, b + c$

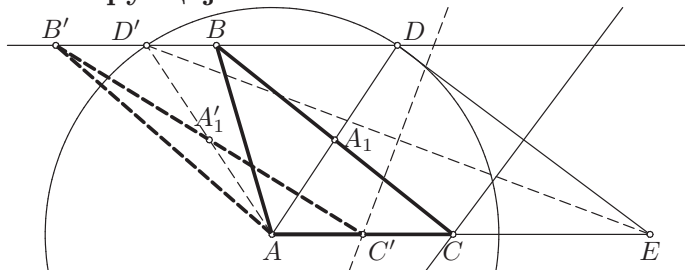
Анализа: Нека је $\triangle ABC$ троугао који испуњава услове задатка. Нека је A_1 средиште странице BC и нека је B' подножје висине из темена B . Тада је $AA_1 = t_a$, $BB' = h_b$ и $AC + AB = b + c$.



Нека је D тачка симетрична тачки A у односу на тачку A_1 . Тада је $AD = AA_1 + A_1D = 2AA_1 = 2t_a$. У четвороуглу $ABDC$ дијагонале AD и BC имају заједничко средиште A_1 , па је то паралелограм. Следи да је $BD \parallel AC$ и $BD = AC$, као и $AB \parallel CD$ и $AB = CD$. Нека је M подножје нормале из тачке D на правој AC и нека је E тачка таква да је $B(A, C, E)$ и $CE = CD$. Тада је $AE = AC + CE = AC + CD = AC + AB = b + c$, а како је $BB' \perp AC$ и $DM \perp AC$, следи да је $BB' \parallel DM$. Због $BD \parallel AC$, тј. $BD \parallel B'M$, следи да је $BDMB'$ паралелограм (штавише, због услова $BB' \perp B'M$ је и правоугаоник), па је $DM = BB' = h_b$.

У троуглу $\triangle ADE$ је $AD = 2t_a$ и $AE = b + c$, а висина DM је подударна дужи h_b . То значи да тачка D припада правој која је паралелна правој AE и налази се на растојању h_b од ње, као и да припада кругу с центром у A и полупречником $2t_a$. Због $CD = CE$ следи да тачка C припада симетрали дужи DE . Тачка D је симетрична тачки A у односу на тачку A_1 , па је A_1 средиште дужи AD . Такође, тачка A_1 је средиште дужи BC , па следи да је тачка B симетрична тачки C у односу на тачку A_1 .

Конструкција:



Конструишимо дуж $AE = b + c$. Конструишимо праву p паралелну са AE на растојању h_b од ње. Конструишимо круг $k(A, 2t_a)$. У пресеку круга k и праве p означимо тачку D . Конструишимо симетралу дужи DE . У њеном пресеку с дужи AE означимо тачку C (дакле, $\mathcal{B}(A, C, E)$). Означимо с A_1 средиште дужи AD и са B тачку симетричну тачки C у односу на тачку A_1 .

Доказ: Треба доказати да је тежишна дуж из темена A подударна дужи t_a , да је висина из темена B подударна дужи h_b и да је $AC + AB = b + c$.

ПК је A_1 средиште странице BC троугла $\triangle ABC$, па је AA_1 тежишна дуж из темена A . Такође, ПК је $AD = 2t_a$ и A_1 је средиште дужи AD , па следи да је $AA_1 = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}2t_a = t_a$.

Дијагонале AD и BC четвороугла $ABDC$ имају заједничко средиште A_1 , па је у питању паралелограм. Следи да је $AB \parallel CD$ и $AB = CD$, као и $AC \parallel BD$ и $AC = BD$. Нека је M подножје висине из темена B троугла $\triangle ABC$. Како C припада правој AE , следи да су праве AC и AE исте, па из $AC \parallel BD$ следи да је $AE \parallel BD$. Права p садржи D и паралелна је са AE , па како и права BD садржи D и паралелна је са AE , следи да су праве p и BD исте, тј. да $B \in p$. Све тачке с праве p су на растојању h_b од праве AE , тј. од праве AC , па како је $BM \perp AC$, следи да је $BM = h_b$, што је и требало доказати.

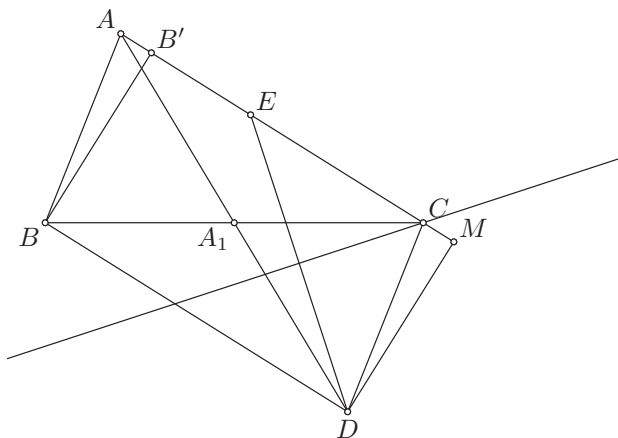
Коначно, C припада симетрали дужи DE , па је $CD = CE$, што заједно са $AB = CD$ даје $CE = AB$. По конструкцији је $\mathcal{B}(A, C, E)$, па је $AE = AC + CE = AC + AB$, а такође је по конструкцији $AE = b + c$, па следи да је $AC + AB = b + c$.

Дискусија: Да би круг $k(A, 2t_a)$ и права p имали заједничких тачака, мора бити $2t_a \geq h_b$. Заиста, права p је на растојању h_b од праве AE , што значи да за сваку тачку X са праве p важи $XA \geq h_b$. Ако је $2t_a = h_b$, онда имамо јединствену пресечну тачку D праве p и круга $k(A, 2t_a)$, а ако је $2t_a > h_b$, имамо две такве тачке D . Из Дискусије у делу **3)** овог задатка следи да симетрала странице DE троугла $\triangle ADE$ сече страницу AE у тачки C таквој да је $\mathcal{B}(A, C, E)$ ако и само ако је $AD < AE$, тј. ако и само ако је $2t_a < b + c$.

Дакле, ако је $h_b = 2t_a < b + c$, задатак има јединствено решење до на подударност. Ако је $h_b < 2t_a < b + c$, задатак има два неподударна решења. У осталим случајевима задатак нема решења.

б) $t_a, h_b, b - c$

Анализа: Нека је $\triangle ABC$ троугао који испуњава услове задатка. Тада је $AC > AB$. Нека је A_1 средиште странице BC и нека је B' подножје висине из темена B . Тада је $AA_1 = t_a$, $BB' = h_b$ и $AC - AB = b - c$.



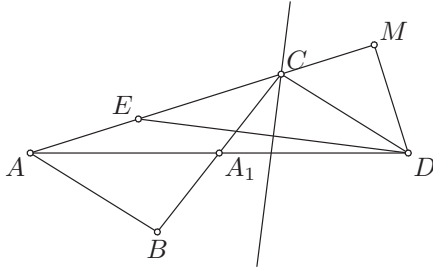
Нека је D тачка симетрична тачки A у односу на тачку A_1 . Тада је $AD = AA_1 + A_1D = 2AA_1 = 2t_a$. У четвороуглу $ABDC$ дијагонале AD и BC имају заједничко средиште A_1 , па је то паралелограм. Следи да је $BD \parallel AC$ и $BD = AC$, као и $AB \parallel CD$ и $AB = CD$. Нека је M подножје нормале из тачке D на правој AC и нека је E тачка таква да је $\mathcal{B}(A, E, C)$ и $CE = CD$. Тада је $AE = AC - CE = AC - CD = AC - AB = b - c$ и троугао $\triangle CDE$ је једнакокрак, па важи $\angle CED = \angle CDE$ и то су оштри углови. Следи да је $\angle AED = \pi - \angle CED$ туп угао, па важи распоред $\mathcal{B}(A, E, M)$. Дакле, тачка E је на страници AM таква да је $AE = b - c$. Како је $BB' \perp AC$ и $DM \perp AC$, следи да је $BB' \parallel DM$. Због $BD \parallel AC$, тј. $BD \parallel B'M$, следи да је $BDMB'$ паралелограм (штавише, због $BB' \perp B'M$ је и правоугаоник), па је $DM = BB' = h_b$.

У троуглу $\triangle ADM$ је $AD = 2t_a$, $DM = h_b$ и $\angle AMD = \frac{\pi}{2}$, па унемо да га конструишемо. Тачка E је таква да је $\mathcal{B}(A, E, M)$ и $AE = b - c$. Због $CD = CE$ следи да тачка C припада симетрали дужи DE . Тачка D је симетрична тачки A у односу на тачку A_1 , па је A_1 средиште дужи AD . Такође, тачка A_1 је средиште дужи BC , па следи да је тачка B симетрична тачки C у односу на тачку A_1 .

Доказ: Треба доказати да је тежишна дуж из темена A подударна дужи t_a , да је висина из темена B подударна дужи h_b и да је $AC > AB$ и $AC - AB = b - c$.

Дијагонале AD и BC четвороугла $ABDC$ имају заједничко средиште A_1 , па је у питању паралелограм. Следи да је $AB \parallel CD$ и $AB = CD$, као и $AC \parallel BD$ и $AC = BD$. Нека је B' подножје висине из темена B троугла $\triangle ABC$. ПК је $BB' \perp AC$ и $DM \perp AM$, а како су A, C, M колинеарне, следи да је $BB' \perp AM$, па важи $BB' \parallel DM$. Ово заједно са $AC \parallel BD$ и чињеницом да су праве $B'M$ и AC исте јер су тачке A, B', M, C колинеарне, следи да је $BD \parallel B'M$, па је четвороугао $BB'MD$ паралелограм (штавише правоугаоник, јер је $BB' \perp B'M$), што значи да је $BB' = DM$. ПК је $DM = h_b$, па је $BB' = h_b$.

Дискусија: Да би троугао $\triangle ADM$ могао да се конструише, мора бити $AD > DM$ (јер је AD хипотенуза, а DM је катета правоуглог троугла $\triangle ADM$), тј. мора бити $2t_a > h_b$. Даље, да би било $\mathcal{B}(A, E, M)$, мора бити $AE < AM$. Из Питагорине теореме следи да је $AD^2 = AM^2 + DM^2$, па је $AM = \sqrt{AD^2 - DM^2} = \sqrt{(2t_a)^2 - h_b^2} = \sqrt{4t_a^2 - h_b^2}$. Дакле, како је $AE = b - c$, добијамо услов $b - c < \sqrt{4t_a^2 - h_b^2}$.

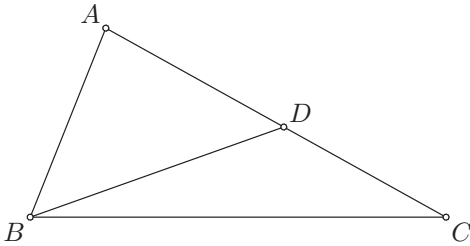


Остаје још да проверимо да ли је испуњено $\mathcal{B}(A, E, C)$. Угао $\angle MED$ је оштар, јер је један од углова правоуглог троугла $\triangle MED$ који није прав ($\angle EMD = \angle AMD = \frac{\pi}{2}$ јер важи $\mathcal{B}(A, E, M)$). Следи да симетрала дужи ED сече крак EM оштрог угла $\angle MED$ у тачки C таквој да важи $M, C \div E$, па како важи $A, M \div E$, следи да важи $A, C \div E$, тј. $\mathcal{B}(A, E, C)$.

Према томе, ако је $2t_a > h_b$ и $b - c < \sqrt{4t_a^2 - h_b^2}$, постоји јединствено решење до на подударност. У свим осталим случајевима, задатак нема решења.

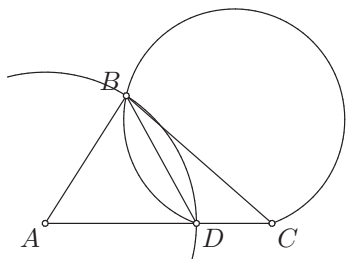
6) $\beta - \gamma, b, c$

Анализа: Нека је $\triangle ABC$ троугао који испуњава услове задатка. Тада је $\angle ABC > \angle ACB$ и важи $AC = b$, $AB = c$ и $\angle ABC - \angle ACB = \beta - \gamma$.



Како је насрам већег угла већа страница, следи да је $AC > AB$, тј. да је $b > c$. Нека је D тачка таква да је $\mathcal{B}(A, D, C)$ и $AD = AB$. Тада је троугао $\triangle ABD$ једнакокрак, па је $\angle ADB = \angle ABD = \frac{\pi - \angle BAC}{2} = \frac{\pi - \alpha}{2} = \frac{\beta + \gamma}{2}$. С друге стране, угао $\angle ADB$ је спољашњи угао троугла $\triangle BCD$, па је једнак збиру унутрашњих несуседних углова $\angle CBD = \varphi$ и $\angle BCD = \angle BCA = \gamma$. Дакле, $\frac{\beta + \gamma}{2} = \varphi + \gamma$, па је $\varphi = \frac{\beta + \gamma}{2} - \gamma = \frac{\beta - \gamma}{2}$. Дакле, $\angle CBD = \frac{\beta - \gamma}{2}$, тј. дуж CD се из тачке B види под углом $\frac{\beta - \gamma}{2}$.

Конструкција:



Конструишимо дуж $AC = b$. Означимо тачку D такву да је $\mathcal{B}(A, D, C)$ и $AD = c$. Конструишимо један од лукова ГМТ из којих се дуж CD види под углом $\frac{\beta - \gamma}{2}$ и означимо га са l . Конструишимо круг $k(A, AD)$. Означимо са B ону пресечну тачку круга k и лука l која није тачка D .

Доказ: Треба доказати да је $\angle ABC > \angle ACB$ и да је $\angle ABC - \angle ACB = \beta - \gamma$, као и да је $AC = b$ и $AB = c$.

ПК је $AC = b$. Тачка B припада кругу $k(A, AD)$ и ПК је $AD = c$, па је $AB = AD = c$. ПК је $\mathcal{B}(A, D, C)$, па је $AC > AD$. Због $AD = AB$ следи да је $AC > AB$, па је и $\angle ABC > \angle ACB$. Тачка B припада луку l ГМТ из којих се дуж CD види под углом $\frac{\beta - \gamma}{2}$, па следи да је $\angle CBD = \frac{\beta - \gamma}{2}$. С друге стране, троугао $\triangle ABD$ је једнакокрак, па је $\angle ADB = \angle ABD = \frac{\pi - \angle BAD}{2}$, а угао $\angle ADB$ је спољашњи угао троугла $\triangle BCD$, па је једнак збиру унутрашњих несуседних углова, тј. $\angle ADB = \angle CBD + \angle BCD$. Због распореда $\mathcal{B}(A, D, C)$ је $\angle BAD = \angle BAC$ и $\angle BCD = \angle BCA$. Следи да је

$$\begin{aligned} \angle CBD &= \angle ADB - \angle BCD = \frac{\pi - \angle BAD}{2} - \angle BCD \\ &= \frac{\pi - \angle BAC}{2} - \angle BCA = \frac{\angle ABC + \angle ACB}{2} - \angle BCA \\ &= \frac{\angle ABC + \angle ACB - 2\angle BCA}{2} = \frac{\angle ABC - \angle ACB}{2}. \end{aligned}$$

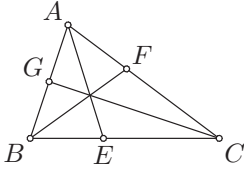
Дакле, важи $\frac{\angle ABC - \angle ACB}{2} = \frac{\beta - \gamma}{2}$, па следи да је $\angle ABC - \angle ACB = \beta - \gamma$.

Дискусија: Ако је $b \leq c$ или $\beta - \gamma \geq \pi$, задатак нема решења.

Нека је $b > c$ и $\beta - \gamma < \pi$. Све што треба проверити јесте да ли круг k и лук l осим тачке D имају још заједничких тачака. Круг k и лук l се секу само у тачки D ако и само ако центар O лука l припада дужи CD или важи $l, O \div CD$, што важи ако и само ако је угао под којим се са лука l види дуж CD прав или туп, односно ако и само ако је $\frac{\beta - \gamma}{2} \geq \frac{\pi}{2}$, тј. $\beta - \gamma \geq \pi$, што није тачно.

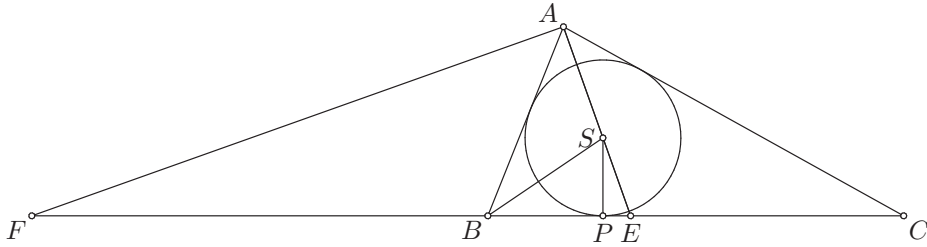
Дакле, ако је $b > c$ и $\beta - \gamma < \pi$, онда задатак има јединствено решење до на подударност, а у осталим случајевима нема решења.

Дефиниција 22. Нека је $\triangle ABC$ троугао и нека су E, F, G редом пресечне тачке бисектриса унутрашњих углова код темена A, B, C и наспрамних страница BC, CA, AB . Дужи AE, BF, CG зову се *одсечци бисектриса унутрашњих углова* и означавају се редом са l_a, l_b, l_c .



7) $\beta - \gamma, l_a, \rho$

Анализа: Нека је $\triangle ABC$ троугао који испуњава услове задатка. Тада је $\angle ABC > \angle ACB$ и $\angle ABC - \angle ACB = \beta - \gamma$. Нека је S центар уписаног круга троугла $\triangle ABC$, нека је E пресечна тачка симетрале угла $\angle BAC$ и странице BC и нека је P подножје нормале из тачке S на страници BC . Следи да је $AE = l_a$ и $SP = \rho$.

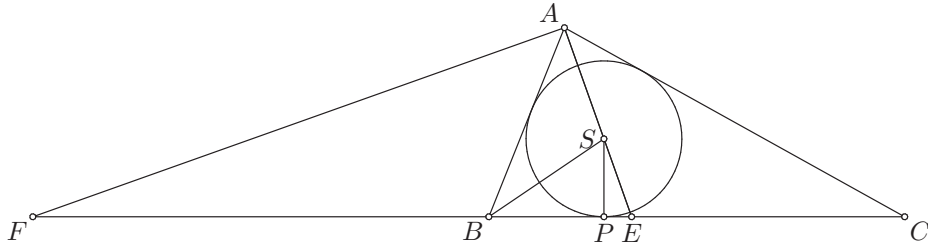


Из $\angle ABC > \angle ACB$ следи да је $AC > AB$, па постоји пресечна тачка симетрале спољашњег угла код темена A и праве BC . Означимо је са F . Тада важи распоред тачака $B(F, B, E, C)$. Угао $\angle ABC$ је спољашњи угао троугла $\triangle AFB$, па је једнак збиру унутрашњих несуседних углова $\angle AFB$ и $\angle FAB$, а угао $\angle FAE$ је прав, јер је то угао између симетрале унутрашњег и спољашњег угла код темена A троугла $\triangle ABC$. Следи да је $\angle FAB = \angle FAE - \angle BAE = \frac{\pi}{2} - \frac{\angle BAC}{2}$, па је $\angle ABC = \angle AFB + \angle FAB = \angle AFB + \frac{\pi}{2} - \frac{\angle BAC}{2}$. Дакле, $\angle AFB = \angle ABC - \frac{\pi}{2} + \frac{\angle BAC}{2} = \frac{2\angle ABC - \angle BAC - \angle ABC - \angle ACB + \angle BAC}{2} = \frac{\angle ABC - \angle ACB}{2} = \frac{\beta - \gamma}{2}$.

У троуглу $\triangle AFE$ је $AE = l_a$, $\angle AFE = \angle AFB = \frac{\beta - \gamma}{2}$ и $\angle FAE = \frac{\pi}{2}$, па тај троугао унемо да конструишемо. Како је P подножје нормале из тачке S на страници BC , тј. на правој FE и важи $SP = \rho$, следи да тачка S припада правој p која је паралелна са FE и налази се на растојању ρ од ње. При томе важи $A, S \ddot{=} BC$, тј. $A, S \ddot{=} FE$, па важи и $A, p \ddot{=} FE$. Уписани круг $k(S, \rho)$ додирује странице AB и AC , па су праве AB и AC тангенте из тачке A на уписаном кругу k троугла $\triangle ABC$. Тачке B, C су у пресеку тих тангенти и праве FE тако да важи распоред тачака $B(F, B, E, C)$.

Конструкција: Конструиримо троугао $\triangle AFE$ такав да је $AE = l_a$, $\angle AFE = \frac{\beta - \gamma}{2}$ и $\angle FAE = \frac{\pi}{2}$. Конструиримо праву p паралелну са FE која се налази на растојању ρ од ње и за коју важи $A, p \perp FE$. У пресеку праве p и дужи AE означимо тачку S (дакле, важи $\mathcal{B}(A, S, E)$). Конструиримо круг $k(S, \rho)$ и конструиримо тангенте из тачке A на кругу k . У пресеку тих тангенти и праве FE означимо тачке B, C тако да важи $\mathcal{B}(F, B, E, C)$.

Доказ: Треба доказати да је $\angle ABC > \angle ACB$ и да је $\angle ABC - \angle ACB = \beta - \gamma$, затим да је одсечак бисектрисе унутрашњег угла код темена A подударан дужи l_a и да је полупречник уписаног круга подударан дужи ρ .



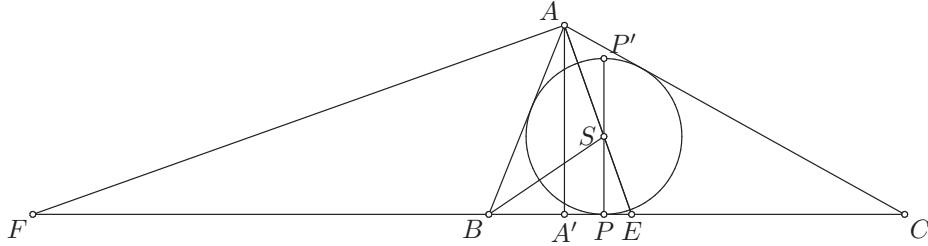
Тачка S је ПК на растојању ρ од праве FE , тј. од праве BC , па како је ПК k круг с центром у S и полупречником ρ , следи да је BC тангента круга k . ПК тачке B, C припадају тангентама круга k из тачке A , па су праве AB, AC тангенте круга k . ПК важи распоред $\mathcal{B}(B, E, C)$, па полуправа AE припада углу $\angle BAC$. При томе, за тачку S са ње важи да је растојање од крака AB тог угла подударно дужи ρ , као и растојање од крака AC тог угла (јер круг $k(S, \rho)$ додирује праве AB и AC), па је полуправа AE бисектриса угла $\angle BAC$. Према томе, круг k је или уписани круг троугла $\triangle ABC$ или је споља уписани круг који додирује страницу BC (у Великом задатку означен са $k_a(S_a, \rho_a)$). Како важи $\mathcal{B}(A, S, E)$, закључујемо да је k уписани круг троугла $\triangle ABC$, па је његов полупречник ρ , што је и требало доказати,

Такође, како је полуправа AE бисектриса унутрашњег угла код темена A троугла $\triangle ABC$, следи да је E тачка у пресеку те бисектрисе и странице BC , па је AE одсечак бисектрисе унутрашњег угла код темена A , а ПК је та дуж подударна дужи l_a .

Како је $\angle FAE = \frac{\pi}{2}$, следи да је AF бисектриса спољашњег угла код темена A троугла $\triangle ABC$ (јер је нормална на бисектриси AE унутрашњег угла код темена A). Угао $\angle AEF$ је оштар (јер је угао правоуглог троугла $\triangle AFE$ који није прав угао) и он је спољашњи угао троугла $\triangle AEC$, па је једнак збиру његових унутрашњих несуседних углова $\angle EAC = \frac{\angle BAC}{2}$ и $\angle ACE = \angle ACB$. Дакле, $\frac{\angle BAC}{2} + \angle ACB < \frac{\pi}{2}$, па следи да је и $\angle BAC + 2\angle ACB < \pi = \angle BAC + \angle ABC + \angle ACB$, тј. $\angle ACB < \angle ABC$.

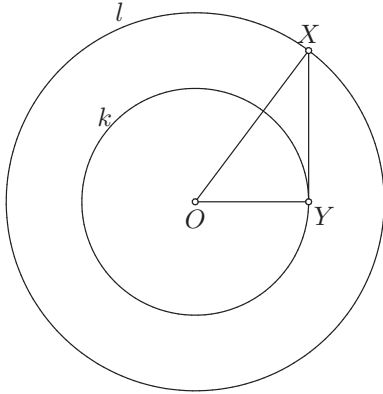
У делу Анализа је доказано да је тада $\angle AFB = \frac{\angle ABC - \angle ACB}{2}$, а како ПК важи $\mathcal{B}(F, B, E)$ и $\angle AFE = \frac{\beta - \gamma}{2}$, следи да је $\angle AFB = \frac{\beta - \gamma}{2}$. Према томе, $\frac{\angle ABC - \angle ACB}{2} = \frac{\beta - \gamma}{2}$, тј. $\angle ABC - \angle ACB = \beta - \gamma$.

Дискусија: Ако је $\beta - \gamma \geq \pi$, задатак нема решења.



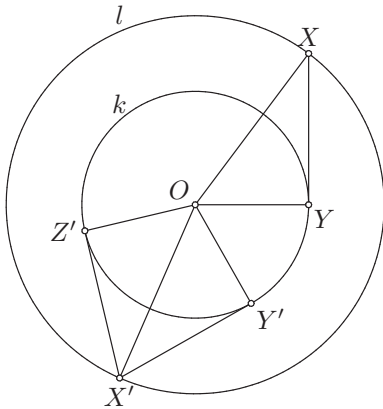
Нека је $\beta - \gamma < \pi$. Тада је $\frac{\beta - \gamma}{2} < \frac{\pi}{2}$, па постоји троугао $\triangle AFE$ и јединствен је до на подударност. Нека је A' подножје висине из темена A у троуглу $\triangle AFE$. Тада углови $\angle A'AE$ и $\angle AFE = \frac{\beta - \gamma}{2}$ имају нормалне краке, па је $\angle A'AE = \frac{\beta - \gamma}{2}$. Да би важило $\mathcal{B}(A, S, E)$, да би се тачка A налазила у спољашњости круга $k(S, \rho)$ и да би тангенте круга k из тачке A секле праву FE у тачкама B, C таквим да важи $\mathcal{B}(F, B, E, C)$, потребно је и довољно да висина AA' буде већа од пречника круга k , тј. да важи $AA' > 2\rho$. Из правоуглог троугла $\triangle AA'E$ имамо $\cos \angle A'AE = \frac{AA'}{AE} = \frac{AA'}{l_a}$, тј. да је $AA' = l_a \cos \angle A'AE = l_a \cos \frac{\beta - \gamma}{2}$. Према томе, услов је $l_a \cos \frac{\beta - \gamma}{2} > 2\rho$. Према томе, ако је $\beta - \gamma < \pi$ и $l_a \cos \frac{\beta - \gamma}{2} > 2\rho$, постоји јединствено решење до на подударност. У осталим случајевима, задатак нема решења.

Конструкција геометријског места тачака (ГМТ) из којих се дати круг види под датим углом



Нека је $k(O, r)$ дати круг и φ дати угао. Нека је $Y \in k$ произвољна и нека је X таква да троугао $\triangle OXY$ задовољава $\angle OYX = \frac{\pi}{2}$ и $\angle OXY = \frac{\varphi}{2}$. Конструирамо затим круг $l(O, OX)$ и то је тражено ГМТ.

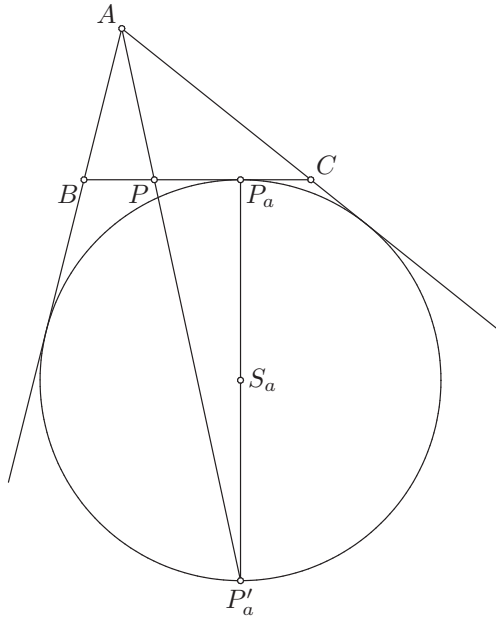
Покажимо да за сваку тачку X' са круга l важи да припада траженом ГМТ. Нека су Y', Z' додирне тачке тангенти круга k из тачке X' . Потребно је доказати да је $\angle Y'X'Z' = \varphi$. Троуглови $\triangle X'OY'$ и $\triangle XOY$ задовољавају да је $X'O = XO$, $OY' = OY$ и $\angle X'OY' = \frac{\pi}{2} = \angle XOY$, а углови $\angle OX'Y'$ и $\angle OXY$ су оба оштра (правоугли троуглови имају по један прав и два оштра угла). На основу става ССУ следи да је $\triangle X'OY' \cong \triangle XOY$, па је $\angle OX'Y' = \angle OXY = \frac{\varphi}{2}$. Слично је и $\triangle X'OZ' \cong \triangle XOY$, па је $\angle OX'Z' = \angle OXY = \frac{\varphi}{2}$. Следи да је $\angle Y'X'Z' = \frac{\varphi}{2} + \frac{\varphi}{2} = \varphi$.



Напомена 9. Ова конструкција је помоћна конструкција и уколико се користи у неком другом задатку, потребно је исписати њене кораке у етапи Конструкција (могу се навести одвојено од осталих корака, с назнаком да се ради о помоћној конструкцији). Није потребно доказивати да се из сваке тачке конструисаног круга дати круг види под датим углом.

8) $\alpha, b - c, \rho_a$

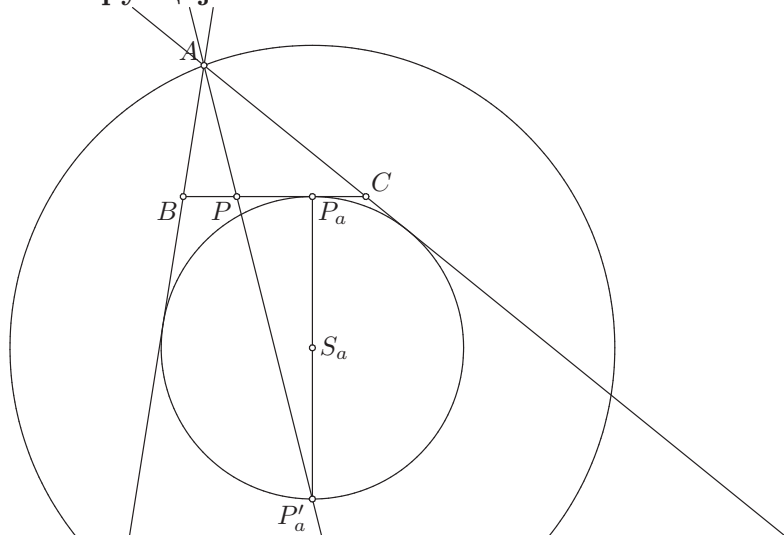
Анализа: Нека је $\triangle ABC$ троугао који испуњава услове задатка. Тада је $AC > AB$, $\angle BAC = \alpha$, $AC - AB = b - c$ и полупречник споља уписаног круга наспрам темена A је подударан дужи ρ_a .



Нека су P, S_a, P_a, P'_a тачке из Великог задатка. На основу Великог задатка следи да важи $\mathcal{B}(A, P, P'_a)$, као и $PP_a = b - c$.

У троуглу $\triangle PP_aP'_a$ је $PP_a = b - c$, $\angle PP_aP'_a = \frac{\pi}{2}$ и $P_aP'_a = 2\rho_a$, па тај троугао уметмо да конструишемо. Тачка S_a је средиште странице $P_aP'_a$ и можемо конструисати круг $k_a(S_a, \rho_a)$. Тачка A припада правој PP'_a тако да важи $\mathcal{B}(A, P, P'_a)$ и из тачке A се круг k_a види под углом α . Тачке B, C су пресечне тачке тангенти круга k_a из тачке A и праве PP_a тако да важи $\mathcal{B}(B, P, P_a, C)$.

Конструкција:

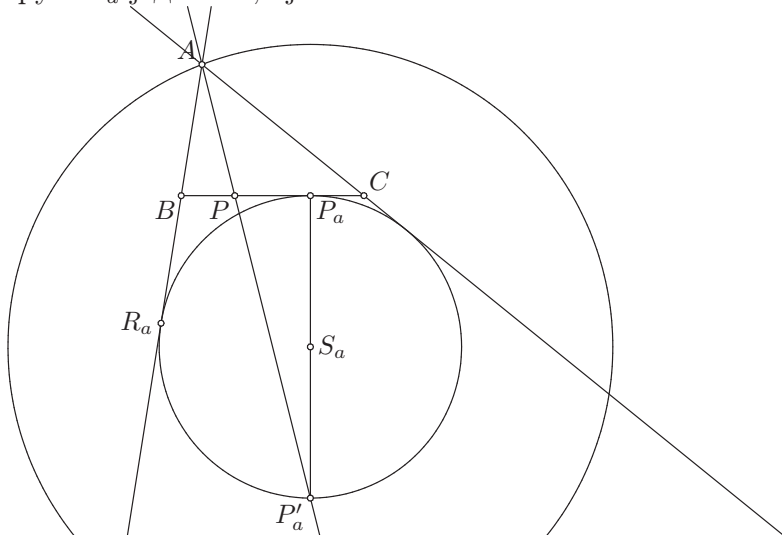


Конструишимо троугао $\triangle PP_aP'_a$ такав да је $PP_a = b - c$, $\angle PP_aP'_a = \frac{\pi}{2}$ и $P_aP'_a = 2\rho_a$. Означимо са S_a средиште странице $P_aP'_a$ и конструишимо круг $k_a(S_a, \rho_a)$. Конструишимо ГМТ l из којих се круг k_a види под углом α . Означимо са A пресечну тачку ГМТ l и праве PP'_a такву да важи $\mathcal{B}(A, P, P'_a)$. Конструишимо тангенте круга k_a из тачке A и означимо са B, C њихове пресеке са правом PP_a тако да важи $\mathcal{B}(B, P, P_a, C)$.

Доказ: Треба доказати да је $\angle BAC = \alpha$, $AC > AB$ и $AC - AB = b - c$, као и да је полупречник споља уписаног круга наспрам темена A подударан дужи ρ_a .

Тачке B, C припадају тангентама круга k_a из тачке A , па су праве AB, AC тангенте круга k_a . ПК је S_a средиште $P_aP'_a$ и $\angle PP_aP'_a = \frac{\pi}{2}$, па следи да је $PP_a \perp P_aS_a$. ПК је $P_aP'_a = 2\rho_a$, па следи да је $S_aP_a = \frac{1}{2}P_aP'_a = \frac{1}{2}2\rho_a = \rho_a$, тј. S_aP_a је полупречник круга $k_a(S_a, \rho_a)$. Дакле, права PP_a је нормална на полупречнику круга k_a , па је она тангента тог круга. Штавише, како је $S_aP_a = \rho_a$, следи да је тачка P_a додирна тачка круга k_a и праве PP_a . Како ПК тачке B, C припадају правој PP_a и важи $\mathcal{B}(B, P, P_a, C)$, следи да је права BC исто што и права PP_a и да тачка P_a припада дужи BC , па круг k_a додирује страницу BC троугла $\triangle ABC$. Дакле, круг k_a је или уписани круг троугла $\triangle ABC$ или је споља уписани круг наспрам темена A . Како ПК важи $\mathcal{B}(A, P, P'_a)$ и $P \in BC$, следи да важи $A, P'_a \div BC$. Такође, S_a је средиште $P_aP'_a$ и $P_a \in BC$, па следи да важи $P'_a, S_a \div BC$. Према томе, важи $A, S_a \div BC$, па је k_a споља уписани круг који додирује страницу BC . Овим смо доказали и да је полупречник споља уписаног круга наспрам темена A троугла $\triangle ABC$ подударан дужи ρ_a .

ПК је l ГМТ из којих се круг $k_a(S_a, \rho_a)$ види под углом α . Како тачка A припада ГМТ l , следи да је угао $\angle BAC$ који граде тангенте AB, AC круга k_a једнак α , тј. $\angle BAC = \alpha$.

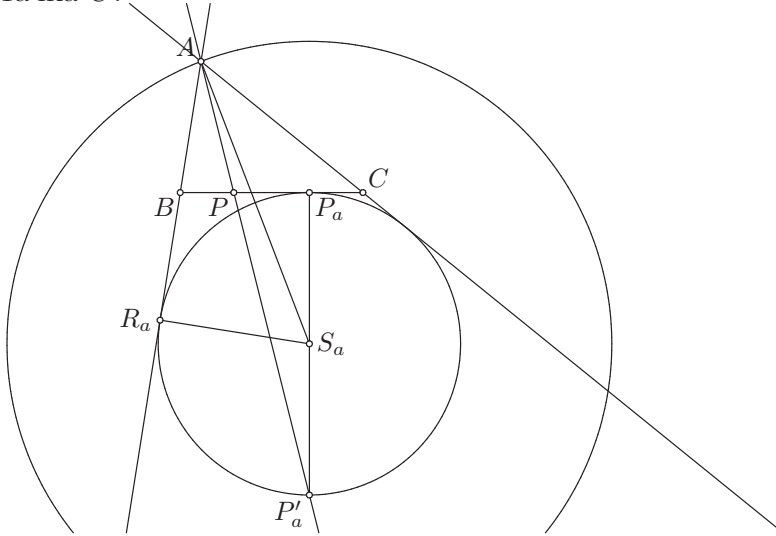


Тачке S_a, P_a су редом центар споља уписаног круга наспрам темена A и додирна тачка тог круга и стране BC . Тачка S_a је средиште дужи $P_a P'_a$, па је тачка P'_a дијаметрално супротна тачки P_a . На основу Великог задатка, став 1), следи да су теме A , додирна тачка уписаног круга и стране BC и тачка P'_a колинеарне и да су тим редом распоређене на правој која их садржи. Како је пресечна тачка праве AP'_a и стране BC тачка P , следи да је тачка P додирна тачка уписаног круга и стране BC . Нека је R_a додирна тачка споља уписаног круга k_a и праве AB . На основу Великог задатка је дуж AR_a подударна полуобиму троугла $\triangle ABC$, $BP_a = BR_a = AR_a - AB$ и $BP = AR_a - AC$. Како важи распоред $\mathcal{B}(B, P, P_a)$ следи да је $BP_a > BP$, па је $AR_a - AB > AR_a - AC$, тј. $AC > AB$. На основу Великог задатка је $PP_a = AC - AB$, а како је ПК $PP_a = b - c$, следи да је $AC - AB = b - c$.

Дискусија: Ако је $\alpha \geq \pi$, не постоји троугао $\triangle ABC$ коме је то унутрашњи угао, па задатак нема решења.

Нека је $\alpha < \pi$. Постоји троугао $\triangle PP_a P'_a$ и јединствен је до на подударност, па постоји и јединствено средиште S_a стране $P_a P'_a$. Полупречник $S_a A$ круга l (ГМТ из којих се круг k_a види под углом α) је већи од ρ_a , па је тачка P'_a у унутрашњости круга l . Следи да права PP'_a сече круг l у двама тачкама, при чему је једна с исте стране тачке P'_a као тачка P , а друга је са супротне стране. Тачка A је она за коју важи $A, P \div P'_a$, а да би важило $\mathcal{B}(A, P, P'_a)$ (пошто може важити и $\mathcal{B}(P, A, P'_a)$), мора важити $S_a A > S_a P$, тј. и тачка P мора бити унутар круга l . Из Питагорине тео-

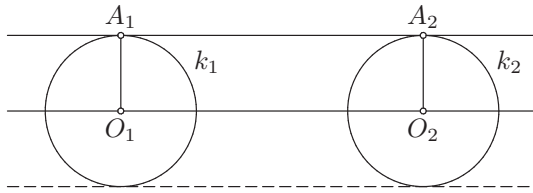
реме је $S_a P^2 = S_a P_a^2 + P_a P^2 = \rho_a^2 + (b - c)^2$, па је $S_a P = \sqrt{\rho_a^2 + (b - c)^2}$. У правоуглом троуглу $\triangle AS_a R_a$ је $S_a A$ хипотенуза, а катета $S_a R_a$ наспрам угла $\angle S_a A R_a = \frac{\alpha}{2}$ је подударна са полупречником ρ_a круга k_a , па је $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\rho_a}{S_a A}$, тј. $S_a A = \frac{\rho_a}{\sin \frac{\alpha}{2}}$. Дакле, имамо услов $\frac{\rho_a}{\sin \frac{\alpha}{2}} > \sqrt{\rho_a^2 + (b - c)^2}$. Тачка A је у спољашњости круга k_a , услов $\mathcal{B}(A, P, P'_a)$ обезбеђује да тангенте круга k_a из тачке A секу праву PP_a тако да се тачке P, P_a налазе између тих пресечних тачака. Према томе, $\mathcal{B}(B, P, P_a, C)$ служи томе да се јединствено одреди која је од тих пресечних тачака тачка B , а која је тачка C .



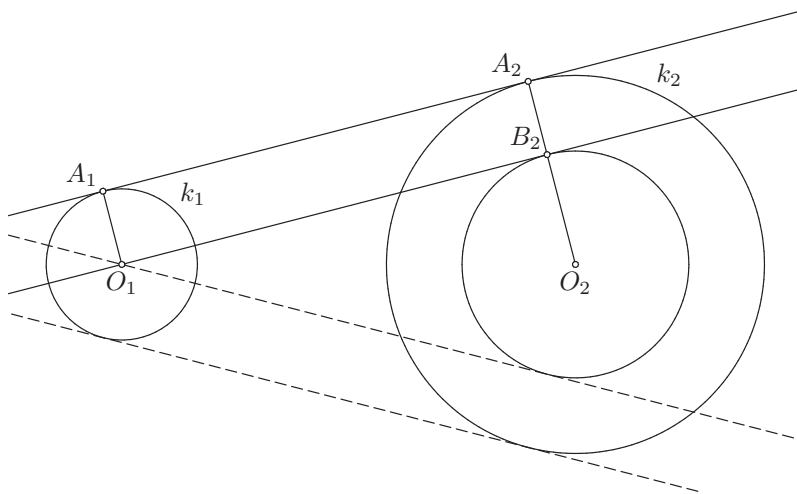
Према томе, ако је $\alpha < \pi$ и $\frac{\rho_a}{\sin \frac{\alpha}{2}} > \sqrt{\rho_a^2 + (b - c)^2}$, постоји јединствено решење до на подударност. У осталим случајевима задатак нема решења.

Конструкција заједничких спољашњих тангенти два круга

Нека су $k_1(O_1, r_1)$ и $k_2(O_2, r_2)$ дати кругови.



Ако је $r_1 = r_2$, конструишимо праву t која је паралелна са правом $O_1 O_2$ и налази се на растојању $r_1 (= r_2)$ од ње.



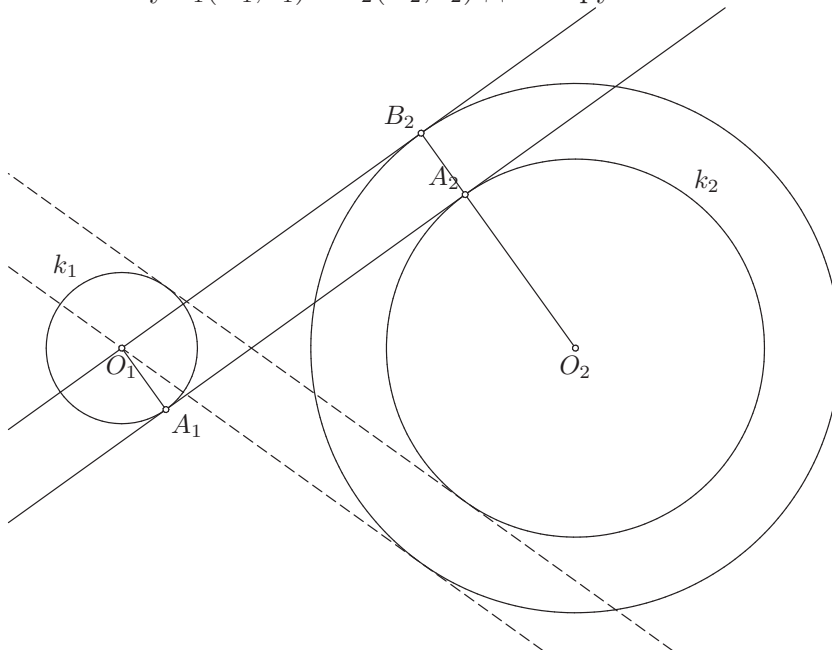
Без умањења општости претпоставимо да је $r_1 < r_2$ (ако није, тј. ако је $r_1 > r_2$, означимо тачку O_1 са O_2 и обратно, круг k_1 са k_2 и обратно и полупречник r_1 са r_2 и обратно). Конструирајмо круг $k'_2(O_2, r_2 - r_1)$. Конструирајмо тангенту t' круга k'_2 из тачке O_1 и конструирајмо праву t која је паралелна са правом t' , налази се на растојању r_1 од ње и за коју важи $t, O_2 \div t'$.

Ако је $r_1 = r_2$ и $O_1 \neq O_2$, онда постоје тачно две праве t које су паралелне са O_1O_2 и налазе се на растојању $r_1 (= r_2)$ од ње, па постоје тачно две заједничке спољашње тангенте кругова k_1, k_2 . Ако је $r_1 = r_2$ и $O_1 = O_2$, онда се кругови k_1 и k_2 поклапају, па је свака тангента круга k_1 уједно и тангента круга k_2 , па постоји бесконачно много заједничких спољашњих тангенти.

Нека је без умањења општости $r_1 < r_2$. Да би постојала тангента круга $k'_2(O_2, r_2 - r_1)$ из тачке O_1 , она мора бити или на кругу k'_2 или у његовој спољашњости, тј. мора важити $O_1O_2 \geq r_2 - r_1$. Ако је $O_1O_2 = r_2 - r_1$, тада постоји јединствена тангента t' , па постоји и јединствена заједничка спољашња тангента кругова k_1, k_2 . Ако је $O_1O_2 > r_2 - r_1$, онда постоје две тангенте t' , па постоје и две заједничке тангенте кругова k_1, k_2 .

Конструкција заједничких унутрашњих тангенти два круга

Нека су $k_1(O_1, r_1)$ и $k_2(O_2, r_2)$ дати кругови.



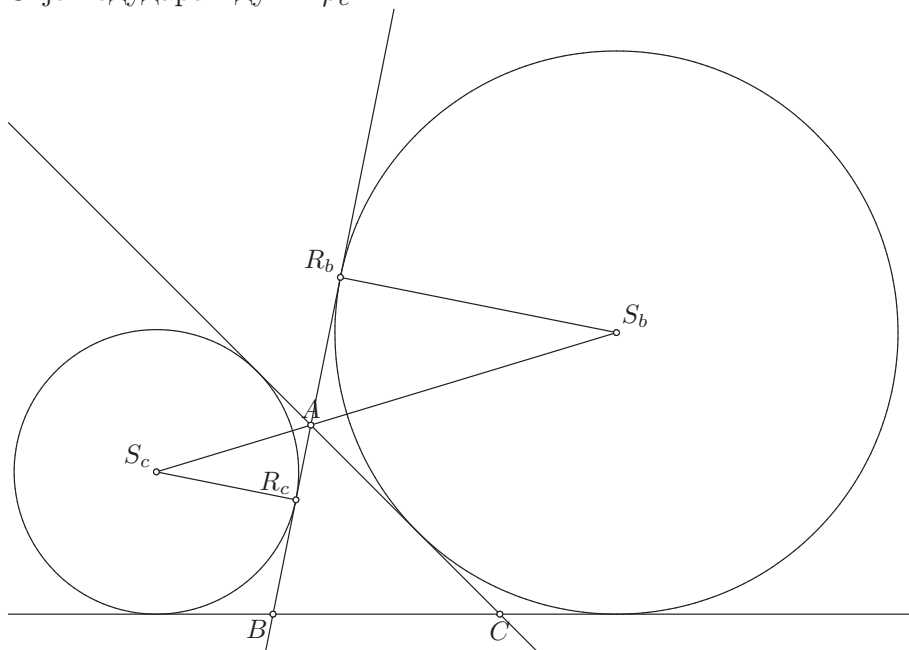
Конструишимо круг $k'_2(O_2, r_2 + r_1)$. Конструишимо тангенту t' круга k'_2 из тачке O_1 и конструишимо праву t која је паралелна са правом t' , налази се на растојању r_1 од ње и за коју важи $t, O_2 \ddot{=} t'$.

Да би постојала тангента t' круга $k'_2(O_2, r_2 + r_1)$ из тачке O_1 , она се мора налазити на кругу k'_2 или у његовој спољашности. Дакле, мора важити $O_1O_2 \geq r_2 + r_1$. Ако је $O_1O_2 = r_2 + r_1$, онда постоји јединствена тангента t' , па постоји и јединствена заједничка унутрашња тангента кругова k_1, k_2 . Ако је $O_1O_2 > r_2 + r_1$, онда постоје две тангенте t' , па постоје и две заједничке унутрашње тангенте кругова k_1, k_2 .

Напомена 10. Ове конструкције су такође помоћне конструкције и уколико се користе у неком другом задатку, потребно је исписати њихове кораке у етапи Конструкција (могу се навести одвојено од осталих корака, с назнаком да се ради о помоћној конструкцији). Услови под којима су ове конструкције могуће и одговарајући број тангенти могу се користити у етапи Дискусија без додатног образложења.

9) a, ρ_b, ρ_c

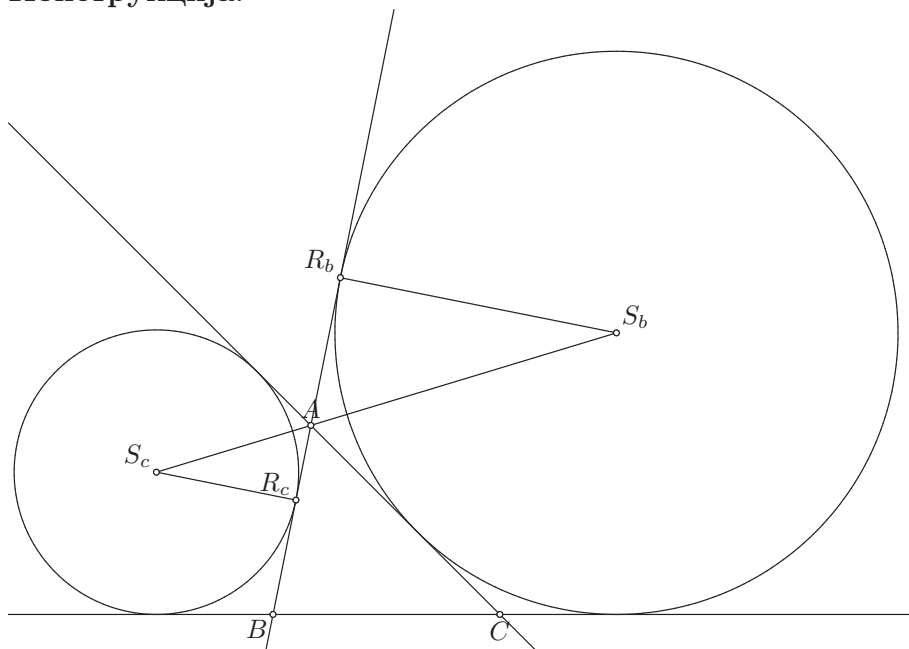
Анализа: Нека је $\triangle ABC$ троугао који испуњава услове задатка. Тада је $BC = a$, полупречник споља уписаног круга наспрам темена B је подударан дужи ρ_b и полупречник споља уписаног круга наспрам темена C је подударан дужи ρ_c .



Нека су S_b, S_c, R_b, R_c тачке из Великог задатка и нека су k_b, k_c редом споља уписани кругови троугла $\triangle ABC$ наспрам темена B, C . Тада је на основу Великог задатка $R_b R_c = a$. За тачке S_b, S_c важи $S_b R_b = \rho_b$, $S_b R_b \perp R_b R_c$, $S_c R_c = \rho_c$, $S_c R_c \perp R_b R_c$ и $S_b, S_c \div R_b R_c$, па је $R_b R_c$ заједничка унутрашња тангента кругова k_b, k_c .

Права BC додирује кругове k_b, k_c , па је она њихова заједничка тангента. Како су $S_b, S_c \doteq BC$, у питању је њихова заједничка спољашња тангента. Према томе, тачка B је у пресеку заједничке спољашње тангенте кругова k_b, k_c и праве $R_b R_c$, при чему важи распоред $\mathcal{B}(B, R_c, R_b)$. Такође, права AC је заједничка унутрашња тангента кругова k_b, k_c , која није $R_b R_c$. Према томе, тачка C се налази у пресеку те тангенте и заједничке спољашње тангенте кругова k_b, k_c која садржи тачку B , а тачка A се налази у пресеку те тангенте и праве $R_b R_c$.

Конструкција:



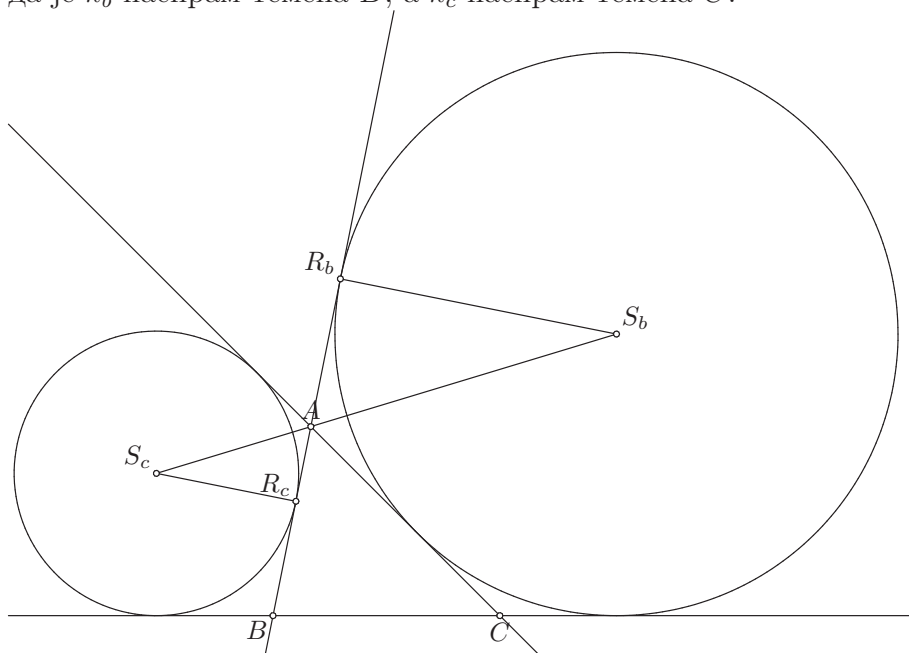
Конструишимо дуж $R_b R_c = a$. Конструишимо нормалу на $R_b R_c$ у тачки R_c и означимо на њој са S_c тачку такву да је $S_c R_c = \rho_c$. Конструишимо нормалу на $R_b R_c$ у тачки R_b и означимо на њој са S_b тачку такву да је $S_b R_b = \rho_b$ и $S_c, S_b \div R_b R_c$. Конструишимо кругове $k_b(S_b, \rho_b), k_c(S_c, \rho_c)$. Конструишимо заједничку спољашњу тангенту t кругова k_b, k_c која сече праву $R_b R_c$ у тачки B таквој да важи $\mathcal{B}(B, R_c, R_b)$. Конструишимо заједничку унутрашњу тангенту t_1 кругова k_b, k_c која није права $R_b R_c$. Означимо са A пресечну тачку правих $R_b R_c, t_1$ и са C пресечну тачку правих t, t_1 .

Доказ: Треба доказати да је $BC = a$, да је полупречник споља уписаног круга наспрам темена B подударан дужи ρ_b и да је полупречник споља уписаног круга наспрам темена C подударан дужи ρ_c .

ПК је $R_b R_c \perp S_b R_b, R_b R_c \perp S_c R_c, S_b R_b = \rho_b$ и $S_c R_c = \rho_c$. ПК су S_b, S_c центри кругова k_b, k_c и $S_b R_b, S_c R_c$ њихови полупречници, па је $R_b R_c$ заједничка тангента кругова k_b, k_c , а због $S_b, S_c \div R_b R_c$ је у питању заједничка унутрашња тангента. ПК се тачке A, B налазе на правој $R_b R_c$, па су праве AB и $R_b R_c$ исте. Такође, ПК се тачке B, C налазе на правој t , која је заједничка спољашња тангента кругова k_b, k_c . ПК је права AC заједничка унутрашња тангента кругова k_b, k_c различита од $R_b R_c$.

Дакле, праве AB, BC, AC јесу заједничке тангете кругова k_b, k_c , па следи да су то уписани или споља уписани кругови троугла $\triangle ABC$. Пошто је BC заједничка спољашња тангента, следи да ниједан он њих није

споља уписани круг наспрам темена A (ово важи зато што се од поменутих кругова с једне стране праве BC налазе три круга, а с друге стране један и то баш споља уписани наспрам темена A). Такође, да је један од k_b, k_c уписани круг троугла $\triangle ABC$, онда би једна од правих AB, AC била заједничка спољашња тангента. Како то није случај, следи да су k_b, k_c споља уписани кругови наспрам темена B, C . Остаје још да се докаже да је k_b наспрам темена B , а k_c наспрам темена C .



Пошто ПК важи $\mathcal{B}(B, R_c, R_b)$, тачка R_c мора бити додирна тачка споља уписаног круга наспрам темена C и странице AB , а тачка R_b додирна тачка споља уписаног круга наспрам темена B и праве AB . Дакле, k_b је сте споља уписани круг наспрам темена B , а k_c јесте споља уписани круг наспрам темена C . ПК су полупречници кругова k_b, k_c подударни редом дужима ρ_b, ρ_c , па су полупречници споља уписаних кругова наспрам темена B, C троугла $\triangle ABC$ редом подударни датим дужима ρ_b, ρ_c .

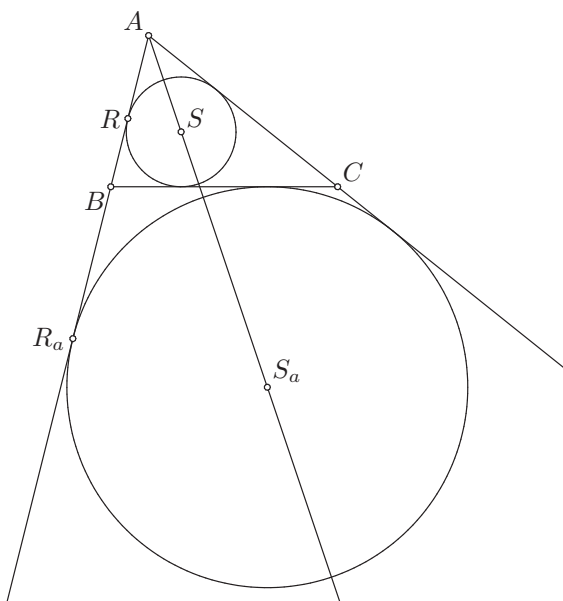
На основу Великог задатка следи да је $R_bR_c = BC$, а како је ПК $R_bR_c = a$, следи да је $BC = a$.

Дискусија: Кругове k_b, k_c је увек могуће конструисати и пошто имају заједничку унутрашњу тангенту R_bR_c која их не додирује у истој тачки, следи да имају и другу заједничку унутрашњу тангенту, као и две заједничке спољашње тангенте. Од њих тачно једна испуњава услов $\mathcal{B}(B, R_c, R_b)$. Дакле, конструкција троугла $\triangle ABC$ је увек могућа.

Према томе, за било које дужи a, ρ_b, ρ_c постоји јединствено решење до на подударност.

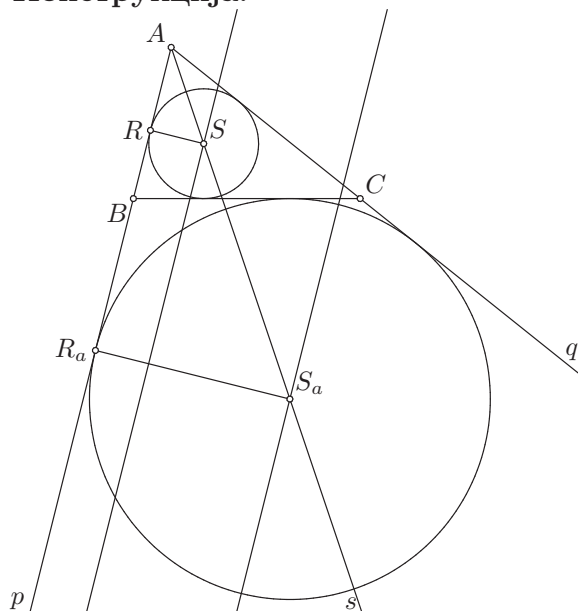
10) α, ρ, ρ_a

Анализа: Нека је $\triangle ABC$ троугао који испуњава услове задатка. Тада је $\angle BAC = \alpha$, полупречник уписаног круга је подударан дужи ρ и полупречник споља уписаног круга наспрам темена A је подударан дужи ρ_a .



Нека су S, S_a редом центар уписаног круга k и центар споља уписаног круга k_a наспрам темена A и нека су R, R_a подножја нормала из тачака S, S_a на правој AB . Тачке S, S_a припадају бисектриси угла $\angle BAC$ (полуправој!), а како су R, R_a редом додирне тачке кругова k, k_a и праве AB , следи да је $SR = \rho$ и $S_a R_a = \rho_a$. Према томе, тачка S се налази на растојању ρ од праве AB , а тачка S_a се налази на растојању ρ_a од праве AB . Права BC је заједничка тангента кругова k, k_a , а како важи $k, k_a \div BC$, у питању је заједничка унутрашња тангента тих кругова.

Конструкција:



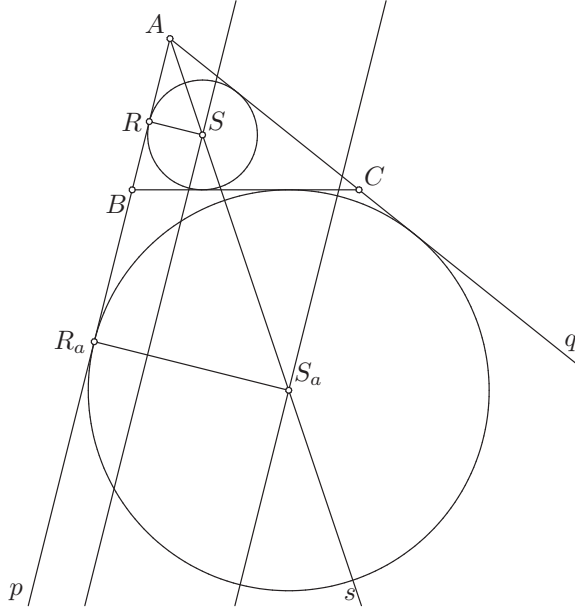
Конструишимо угао $\angle pAq = \alpha$. Конструишимо бисектрису As (полуправу!) угла $\angle pAq$. Конструишимо праву a која је паралелна са краком Ap угла $\angle pAq$, налази се на растојању ρ од њега и налази се с оне стране праве одређене краком Ap с које се налазе крак (полуправа) Aq и бисектриса As угла $\angle pAq$. Пресечну тачку праве a и бисектрисе As означимо са S . Конструишимо праву b која је паралелна са краком Ap угла $\angle pAq$, налази се на растојању ρ_a од њега и налази се с оне стране праве одређене краком Ap с које се налазе крак (полуправа) Aq и бисектриса As угла $\angle pAq$. Пресечну тачку праве b и бисектрисе As означимо са S_a тако да важи $B(A, S, S_a)$. Конструишимо кругове $k(S, \rho)$ и $k_a(S_a, \rho_a)$ и конструишимо њихову заједничку унутрашњу тангенту t . Пресечну тачку тангенте t и крака Ap угла $\angle pAq$ означимо са B , а пресечну тачку тангенте t и крака Aq означимо са C .

Доказ: Треба доказати да је $\angle BAC = \alpha$, да је полупречник уписаног круга троугла $\triangle ABC$ подударан дужи ρ и да је полупречник споља уписаног круга наспрам темена A троугла $\triangle ABC$ подударан дужи ρ_a .

ПК тачка B припада краку Ap , а тачка C краку Aq угла $\angle pAq$ који је ПК подударан углу α , па следи да је $\angle BAC = \angle pAq = \alpha$.

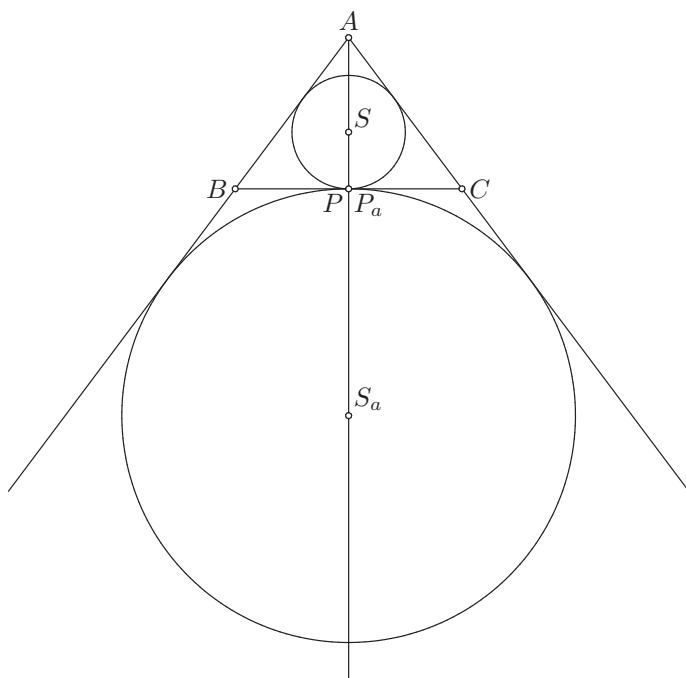
Центри S, S_a кругова k, k_a су на бисектриси As угла $\angle BAC = \angle pAq$ и налазе се редом на растојањима ρ, ρ_a од крака Ap , тј. крака AB , па како су им полупречници редом подударни дужима ρ, ρ_a , следи да они додирују краке Ap, Aq (тј. AB, AC) угла $\angle pAq = \angle BAC$. ПК је права BC заједничка унутрашња тангента кругова k, k_a , па је један од тих

кругова уписани, а други споља уписани круг наспрам темена A троугла $\triangle ABC$. С обзиром на то да ПК важи $\mathcal{B}(A, S, S_a)$, следи да је $k(S, \rho)$ уписани, а $k_a(S_a, \rho_a)$ споља уписани круг наспрам темена A . Коначно следи и да је полупречник уписаног круга троугла $\triangle ABC$ подударан дужи ρ и да је полупречник споља уписаног круга који додирује страницу BC подударан дужи ρ_a .

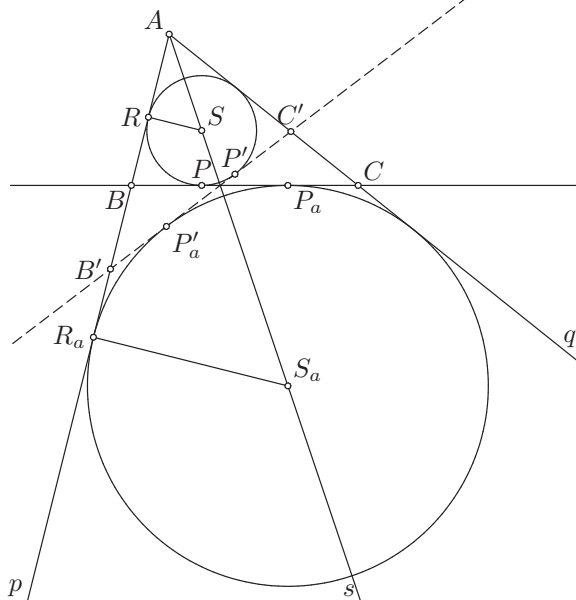


Дискусија: Ако је $\alpha \geq \pi$, не постоји троугао $\triangle ABC$ чији је то унутрашњи угао, па задатак нема решења.

Нека су R, R_a подножја нормала из тачака S, S_a редом на краку Ap . Тада према Талесовој теореме следи $\frac{AS}{AS_a} = \frac{SR}{S_aR_a}$, а како се тачке S, S_a налазе редом на растојањима ρ, ρ_a од крака Ap , следи да је $SR = \rho$ и $S_aR_a = \rho_a$, па је $\frac{AS}{AS_a} = \frac{\rho}{\rho_a}$. Да би важио распоред тачака $\mathcal{B}(A, S, S_a)$, мора важити $AS < AS_a$, тј. $\frac{AS}{AS_a} < 1$, а то важи ако и само ако важи $\frac{\rho}{\rho_a} < 1$, тј. $\rho < \rho_a$. Кругови k, k_a имају заједничких унутрашњих тангенти ако и само ако важи $SS_a \geq \rho + \rho_a$. Из правоуглих троуглова $\triangle ASR$ и $\triangle AS_aR_a$ добијамо да је $\sin \frac{\alpha}{2} = \sin \angle RAS = \frac{RS}{AS}$ и $\sin \frac{\alpha}{2} = \sin \angle R_aAS_a = \frac{R_aS_a}{AS_a}$, па важи $AS = \frac{RS}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{\rho}{\sin \frac{\alpha}{2}}$ и $AS_a = \frac{R_aS_a}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{\rho_a}{\sin \frac{\alpha}{2}}$. Према томе, важи $SS_a = AS_a - AS = \frac{\rho_a}{\sin \frac{\alpha}{2}} - \frac{\rho}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{\rho_a - \rho}{\sin \frac{\alpha}{2}}$, па је $\frac{\rho_a - \rho}{\sin \frac{\alpha}{2}} \geq \rho + \rho_a$ услов постојања заједничких унутрашњих тангенти.



Ако важи $\frac{\rho_a - \rho}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \rho + \rho_a$, онда се кругови k, k_a додирују и постоји јединствена заједничка унутрашња тангента кругова k, k_a , па постоји јединствено решење до на подударност.



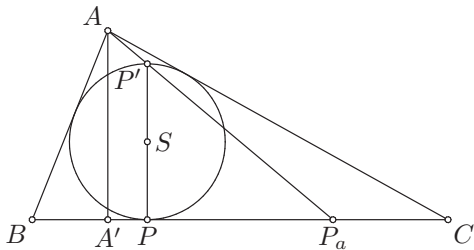
Ако је $\frac{\rho_a - \rho}{\sin \frac{\alpha}{2}} > \rho + \rho_a$, онда се кругови k, k_a не додурују и имају две разне заједничке тангенте, па постоје два неподударна решења.

Дакле, ако је $\alpha < \pi$, $\rho < \rho_a$ и $\frac{\rho_a - \rho}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \rho + \rho_a$, онда постоји јединствено

решење до на подударност. Ако је $\alpha < \pi$, $\rho < \rho_a$ и $\frac{\rho_a - \rho}{\sin \frac{\alpha}{2}} > \rho + \rho_a$, онда постоје два неподударна решења. У осталим случајевима, задатак нема решења.

11) $b - c, h_a, \rho$

Анализа: Нека је $\triangle ABC$ троугао који испуњава услове задатка. Нека је A' подножје висине из темена A , S центар уписаног круга и P додирна тачка уписаног круга и стране BC . Тада важи $AB < AC$ и $AC - AB = b - c$, $AA' = h_a$ и $SP = \rho$.



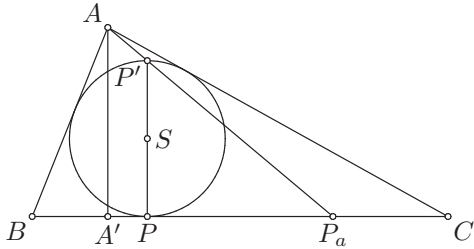
Нека су P', P_a тачке из Великог задатка. На основу Великог задатка важи $\mathcal{B}(B, P, P_a, C)$, $PP_a = b - c$ и тачке A, P', P_a су колинеарне. Тачка S је средиште дужи $P'P$, па је $P'P = P'S + SP = 2SP = 2\rho$. У троуглу $\triangle P'PP_a$ је $P'P = 2\rho$, $\angle P'PP_a = \frac{\pi}{2}$ и $PP_a = b - c$, па тај троугао унемо да конструишемо. Тачка A припада правој $P'P_a$, налази се на растојању h_a од праве BC , тј. од праве PP_a и важи $\mathcal{B}(A, P', P_a)$. Тачке B, C припадају правој PP_a и тангентама уписаног круга $k(S, SP)$ из тачке A , тако да важи распоред $\mathcal{B}(B, P, P_a, C)$.

Конструкција: Конструишимо троугао $\triangle P'PP_a$ такав да је $P'P = 2\rho$, $\angle P'PP_a = \frac{\pi}{2}$ и $PP_a = b - c$. Означимо са S средиште дужи $P'P$ и конструишимо круг $k(S, SP)$. Конструишимо праву p која је паралелна са правом PP_a и налази се на растојању h_a од ње, такву да важи $p, S, P' \div PP_a$. У пресеку правих p и $P'P_a$ означимо тачку A тако да важи $\mathcal{B}(A, P', P_a)$. Конструишимо тангенте круга k из тачке A . У пресеку тих тангенти и праве PP_a означимо тачке B, C тако да важи $\mathcal{B}(B, P, P_a, C)$.

Доказ: Треба доказати да је $AB < AC$ и $AC - AB = b - c$, да је висина из темена A подударна дужи h_a и да је полупречник уписаног круга троугла $\triangle ABC$ подударан дужи ρ .

Тачка S је средиште дужи $P'P$ која је ПК подударна дужи 2ρ , па следи да је $SP = \frac{1}{2}P'P = \frac{1}{2}2\rho = \rho$. Како је по конструкцији $P'P \perp PP_a$, следи да је права PP_a нормална на полупречнику SP круга $k(S, SP)$, па је она тангента круга k у тачки P . ПК важи $\mathcal{B}(B, P, P_a, C)$, па праву PP_a можемо означавати и са BC . Дакле, права BC је тангента круга k и

додирује је у тачки P која ПК припада дужи BC . Такође, праве AB, AC су ПК тангенте круга k , па следи да је круг k или уписани круг или споља уписани круг наспрам темена A троугла $\triangle ABC$. Како ПК важи $A, S \doteq PP_a$, тј. $A, S \doteq BC$, следи да је у питању уписани круг, па је његов полупречник подударан дужи ρ .



Дакле, P је додирна тачка уписаног круга и странице BC , а како је ПК тачка S средиште дужи $P'P$, следи да је тачка P' дијаметрално супротна тачки P . На основу Великог задатка, став 1), следи да су теме A , тачка P' и додирна тачка странице BC и споља уписаног круга троугла $\triangle ABC$ наспрам темена A колинеарне и да су тим редом распоређене на правој која их садржи. Како је пресечна тачка праве AP' и странице BC тачка P_a , следи да је тачка P_a додирна тачка странице BC и споља уписаног круга наспрам темена A . Ако је s полубим троугла $\triangle ABC$, на основу Великог задатка следи да је $BP = s - AC$ и $BP_a = s - AB$, па због распореда $\mathcal{B}(B, P, P_a, C)$ следи да је $BP < BP_a$, односно $s - AC < s - AB$, па је $AB < AC$. На основу Великог задатке је онда $PP_a = AC - AB$, а како је ПК $PP_a = b - c$, следи да је $AC - AB = b - c$.

Тачка A припада правој p која је паралелна са правом PP_a , тј. правом BC и налази се на растојању h_a од ње, па ако означимо са A' подножје висине из темена A троугла $\triangle ABC$, следи да је $AA' = h_a$.

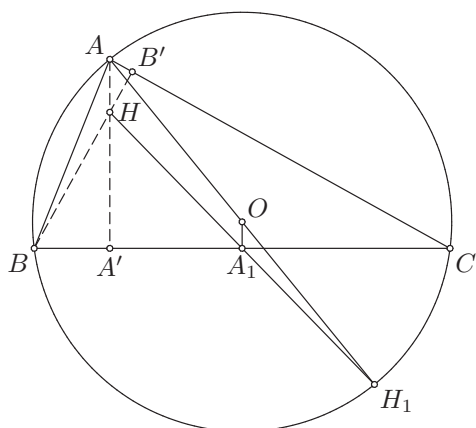
Дискусија: Да би важио услов $\mathcal{B}(A, P', P_a)$, мора бити $h_a > 2\rho$, јер праве које су паралелне са PP_a и налазе се на растојању мањем од 2ρ секу дуж P_aP' , а права која се налази на растојању 2ρ сече праву P_aP' у тачки P' . Ако важи тај услов, важи и да тачка A припада спољашњости круга $k(S, SP)$, јер права p (која је паралелна са PP_a и налази се на растојању $h_a (> 2\rho)$ од ње) нема заједничких тачака са кругом k , па постоје две тангенте круга k из тачке A . Такође, ако важи услов $\mathcal{B}(A, P, P'_a)$, те тангенте секу праву PP_a тако да се тачке P, P_a налазе између тих пресечних тачака, па услов $\mathcal{B}(B, P, P_a, C)$ служи томе да се јединствено одреди која је од тих пресечних тачака тачка B , а која је тачка C .

Дакле, ако важи $h_a > 2\rho$, постоји јединствено решење до на подударност, а ако важи $h_a \leq 2\rho$, задатак нема решења.

2. Конструисати троугао ABC ако су дати теме A , ортоцентар H и центар описаног круга O тог троугла.

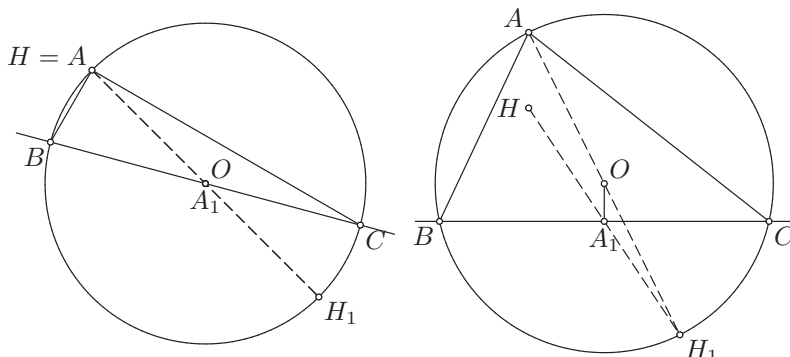
Решење:

Анализа: Нека је $\triangle ABC$ троугао који испуњава услове задатка, тј. нека се његово теме A поклапа с датом тачком A , нека се његов ортоцентар поклапа с датом тачком H и нека се центар његовог описаног круга поклапа са тачком O .



Нека је A_1 средиште странице BC троугла $\triangle ABC$ и нека је H_1 тачка симетрична ортоцентру H у односу на тачку A_1 . У 3. задатку из области Подударност смо доказали да је тада тачка H_1 симетрична темену A у односу на центар O описаног круга троугла $\triangle ABC$. Приметимо да ако се тачке A, H поклапају, тј. ако је $\triangle ABC$ правоугли с правим углом код темена A , онда се поклапају и тачке O, A_1 јер се центар описаног круга налази на средишту хипотенузе BC , а ако се тачке A, H разликују, онда се разликују и тачке O, A_1 и имамо да је права BC нормална на правој OA_1 у тачки A_1 .

Конструкција:



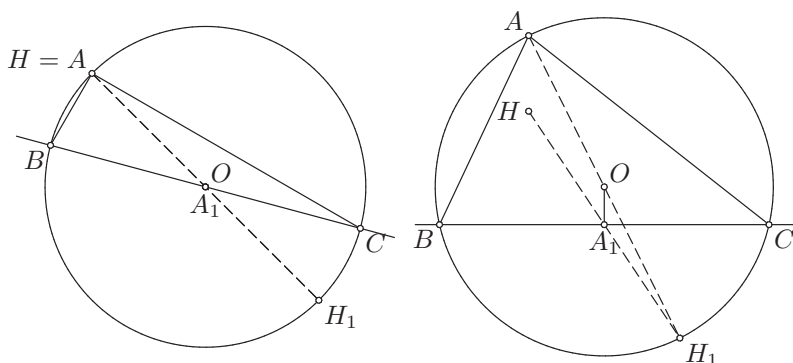
Означимо са H_1 тачку симетричну тачки A у односу на тачку O , а затим са A_1 средиште дужи HH_1 . Конструирајмо круг $l(O, OA)$. Ако се тачке O, A_1 поклапају, онда конструирајмо произвољну праву p која садржи O и различита је од праве OA и означимо са B, C пресечне тачке те праве и круга l , а ако се тачке O, A_1 разликују, онда конструирајмо праву p која је нормална на OA_1 у тачки A_1 и не садржи тачку A и означимо са B, C пресечне тачке те праве и круга l .

Доказ: Треба доказати да је тачка A једно теме троугла $\triangle ABC$, да је тачка H ортоцентар тог троугла и да је тачка O центар његовог описаног круга. Очигледно је испуњено да је тачка A теме троугла $\triangle ABC$.

ПК се тачке B, C разликују и припадају правој p која не садржи тачку A , па су A, B, C три неколинеарне тачке. Такође, оне ПК припадају кругу l , па је l описани круг троугла $\triangle ABC$, а како је O његов центар, следи да је O центар описаног круга троугла $\triangle ABC$.

Из претходног закључка следи да је $OB = OC$. Ако се тачке O, A_1 поклапају, онда тачка O припада страници BC , па због $OB = OC$ закључујемо да је O (тј. A_1) средиште странице BC . Ако се тачке O, A_1 разликују, онда је по конструкцији $OA_1 \perp BC$, па како O припада симетрали странице BC (јер важи $OB = OC$), следи да је OA_1 симетрала странице BC . ПК тачка A_1 припада страници BC , па следи да је она њено средиште. ПК је тачка H_1 симетрична темену A у односу на центар описаног круга, а у 3. задатку из области Подударност доказали смо да је тачка симетрична ортоцентру у односу на средиште странице BC симетрична и темену A у односу на центар описаног круга троугла $\triangle ABC$. Следи да је тачка H_1 симетрична ортоцентру у односу на средиште A_1 дужи BC , а самим тим и да је ортоцентар симетричан тачки H_1 у односу на тачку A_1 . ПК је A_1 средиште дужи HH_1 , па следи да је тачка H симетрична тачки H_1 у односу на средиште A_1 странице BC , што значи да је тачка H ортоцентар троугла $\triangle ABC$.

Дискусија: Ако се тачке A, O поклапају, задатак нема решења, јер се темена сваког троугла разликују од центра његовог описаног круга (а тада такође не постоји круг $l(O, OA)$). Нека су тачке A, O различите. Морамо обезбедити да права p коју конструишемо кроз тачку A_1 сече круг l у двама тачкама и да не садржи тачку A . Ако се тачке O, A_1 поклапају, онда смо ту праву конструисали произвољно тако да се разликује од праве OA . Свака права која пролази кроз тачку O сече круг l у двама тачкама и само права OA садржи тачку A . Дакле, тада постоји бесконачно много решења.



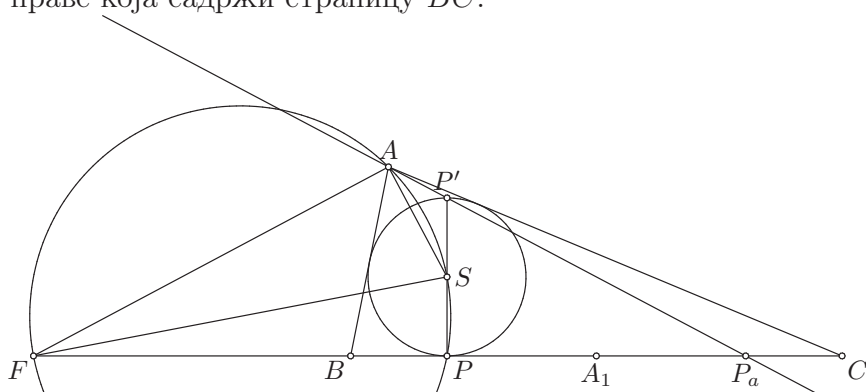
Нека се тачке O, A_1 разликују. Тачка O је средиште дужи AN_1 , а тачка A_1 је средиште дужи HN_1 . Ако су тачке A, H, N_1 неколинеарне (тј. ако постоји троугао $\triangle ANH_1$), онда је OA_1 његова средња линија и важи $OA_1 \parallel AN$ и $OA_1 = \frac{AN}{2}$. Ако су тачке A, H, N_1 колинеарне, онда је $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{ON_1}$ и $\overrightarrow{HA_1} = \overrightarrow{A_1N_1}$ (јер су O, A_1 редом средишта дужи AN_1, HN_1), па следи да је $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{ON_1} + \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1N_1} + \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{HA_1} + \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_1} = 2\overrightarrow{OA_1}$. Следи да је $AN = \|\overrightarrow{AH}\| = \|2\overrightarrow{OA_1}\| = 2\|\overrightarrow{OA_1}\| = 2OA_1$.

Да би права p која садржи A_1 и нормална је на OA_1 секла круг $l(O, OA)$ у двама тачкама, тачка A_1 мора припадати унутрашњости круга l , тј. мора бити $OA_1 < OA$. Дакле, добијамо услов $\frac{1}{2}AN < OA$, тј. $AN < 2OA$. У случају да права p садржи тачку A , нема решења, а у осталим случајевима постоје два решења, јер имамо избор коју ћемо од пресечних тачака праве p и круга l обележити са B , а коју са C . Ако су тачке A, H, O колинеарне, онда је троугао $\triangle ABC$ једнакокраки с врхом A , па заменом ознака теменима B, C добијамо подударна решења, а ако тачке A, H, O нису колинеарне, онда заменом ознака теменима B, C не добијамо подударна решења.

Дакле, ако се тачке O, A разликују, а тачке A, H поклапају, постоји бесконачно много решења. Ако се тачке O, A разликују, као и тачке A, H , ако су A, H, O колинеарне и важи $AN < 2OA$, постоје два међу-

3. Дате су тачке A_1, S, F . Конструисати троугао ABC ако је A_1 средиште BC , S центар уписаног круга, а F пресек симетрале спољашњег угла у темену A и праве BC .

Анализа: Нека је $\triangle ABC$ троугао који испуњава услове задатка, тј. нека је тачка A_1 средиште странице BC , тачка S центар његовог уписаног круга и F пресечна тачка бисектрисе спољашњег угла код темена A и праве која садржи страницу BC .



125

Доказ: Треба доказати да је тачка A_1 средиште странице BC троугла $\triangle ABC$, да је тачка S центар његовог уписаног круга и да је F пресечна тачка бисектрисе спољашњег угла код темена A и праве BC .

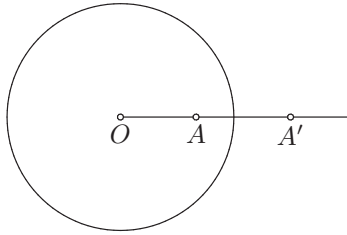
Из чињеница да је тачка P додирна тачка уписаног круга и странице BC , ПК тачка P' симетрична тачки P у односу центар уписаног круга S , $\mathcal{B}(A, P', P_a)$ и да P_a припада правој BC , на основу Великог задатка следи да је тачка P_a додирна тачка споља уписаног круга наспрам темена A и странице BC . Како је на основу Великог задатка средиште дужи BC уједно и средиште дужи PP_a , а ПК је A_1 средиште дужи PP_a , следи да је тачка A_1 средиште дужи BC .

126

127

4 Инверзија

Дефиниција 23. Нека је $k(O, r)$ круг неке равни α . *Инверзија* у односу на круг k је пресликавање $\psi_k : \alpha \setminus \{O\} \longrightarrow \alpha \setminus \{O\}$ које тачку A слика у тачку A' полуправе OA такву да важи $OA \cdot OA' = r^2$.



Важно је нагласити да тачка O не припада ни домену ни кодомену пресликавања ψ_k .

Особине овог пресликавања су:

- ψ_k је инволуција, односно $\psi_k^2 = \text{Id}$;

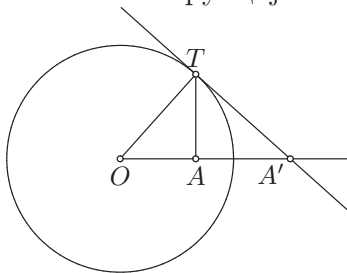
Инверзија је очигледно инволуција, тј. $\psi_k^2 = \text{Id}$, јер ако је A' слика тачке A , онда A' припада полуправој OA и важи $OA \cdot OA' = r^2$, па следи да тачка A припада полуправој OA' и важи $OA' \cdot OA = r^2$, што по дефиницији значи да је $\psi_k(A') = A$. Према томе, инверзија је бијекција и инволуција.

- тачка A се слика у себе ако и само ако припада кругу k ;

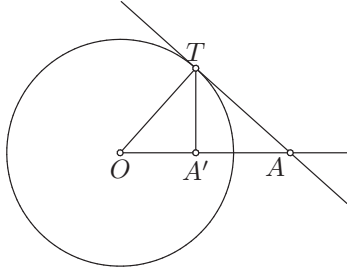
Ако тачка A припада кругу k , онда је $OA \cdot OA = r^2$, па како A припада полуправој OA , следи да је $\psi_k(A) = A$. Обрнуто, ако је $\psi_k(A) = A$, онда је $OA \cdot OA = r^2$, тј. $OA = r$, па A припада кругу k .

- тачке из унутрашњости круга k , различите од тачке O , сликају се у тачке из спољашњости круга k и обрнуто;

Помоћна конструкција слике тачке при инверзији:



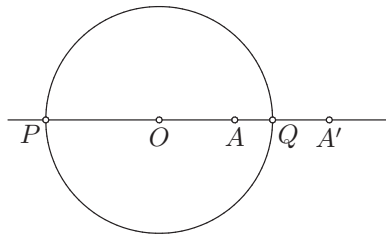
Нека је A тачка у унутрашњости круга k различита од тачке O . Конструирамо полуправу OA и нормалу n на тој полуправој у тачки A . Једну од пресечних тачака нормале n и круга k означимо са T и конструирамо тангенту круга k у тачки T (нормалу на OT у тачки T) и са A' означимо њен пресек с полуправом OA . Троуглови $\triangle OTA$ и $\triangle OA'T$ су слични јер је $\angle TOA = \angle A'OT$ и $\angle OAT = \frac{\pi}{2} = \angle OTA'$, па је $\frac{OA}{OT} = \frac{OT}{OA'}$, односно $OA \cdot OA' = OT \cdot OT = r^2$. Према томе, $\psi_k(A) = A'$.



Ако је A тачка у спољашњости круга k , онда конструирамо произвољну тангенту круга k из те тачке, означимо додирну тачку са T и конструирамо нормалу n на полуправој OA која садржи тачку T и означимо подножје те нормале са A' . На исти начин као малопре се добија да је $\psi_k(A) = A'$.

Према томе, овим смо доказали да се тачке из унутрашњости круга k , различите од O , сликају у његову спољашњост и обрнуто. Такође, тачке круга k се сликају у себе и све тачке које се сликају у себе припадају кругу k .

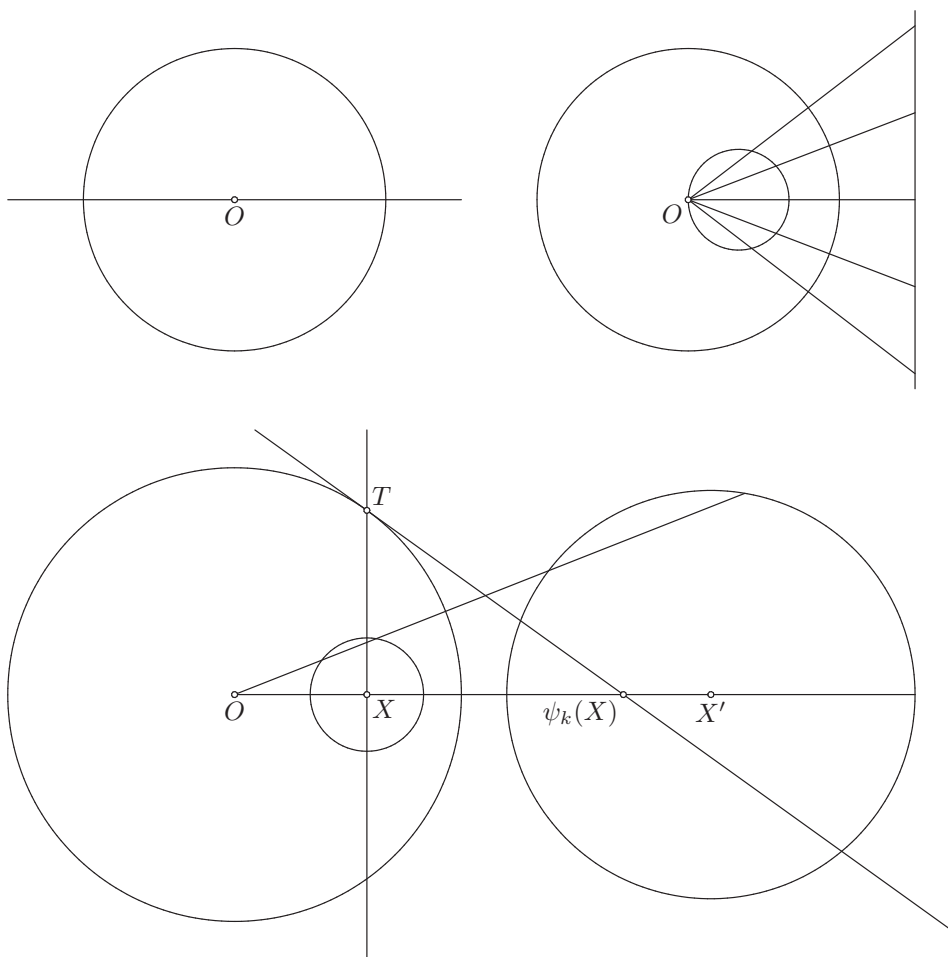
- ако је $\psi_k(A) = A'$ и ако је PQ пречник круга k такав да су P, Q, A, A' колинеарне, онда важи $\mathcal{H}(P, Q; A, A')$;



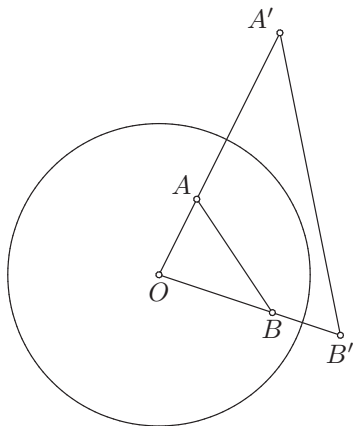
Нека је A произвољна тачка различита од O , $A' = \psi_k(A)$ и нека је PQ пречник круга k такав да су P, Q, A, A' колинеарне. Тада је O средиште дужи PQ , а пошто A' припада полуправој OA , следи да није $\mathcal{B}(A, O, A')$, па по дефиницији 17 следи да је $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA'} = OA \cdot OA' = r^2 = OP^2$. На основу задатка 2.11 следи да важи $\mathcal{H}(P, Q; A, A')$.

- ако права p садржи тачку O , онда се $p \setminus \{O\}$ слика у $p \setminus \{O\}$;
- ако права p не садржи тачку O , онда се p слика у $l \setminus \{O\}$, где је l круг који садржи O ;
- ако круг l садржи тачку O , онда се $l \setminus \{O\}$ слика у праву p која не садржи O ;
- ако круг l не садржи тачку O , онда се l слика у круг l_1 који такође не садржи O , при чему се центар круга l **не слика** у центар круга l_1 ;

На следећим сликама видимо како се инверзијом сликавају праве и кругови у зависности од тога да ли садрже тачку O . Такође, видимо да ако је $\psi_k(l) = l_1$, онда се центар круга l не слика у центар круга l_1 .



- ако је $A' = \psi_k(A)$ и $B' = \psi_k(B)$, онда је $A'B' = \frac{r^2}{OA \cdot OB} AB$;



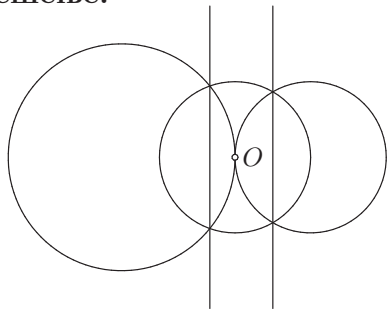
Нека су A, B две разне тачке и $A' = \psi_k(A), B' = \psi_k(B)$. Троуглови $\triangle OAB$ и $\triangle OA'B'$ су слични јер имају заједнички угао код темена O и из $OA \cdot OA' = OB \cdot OB'$ следи да је $OA : OB' = OB : OA'$. Према томе, $OA : OB' = AB : B'A'$, тј. $A'B' = \frac{OB'}{OA} AB = \frac{OB \cdot OB'}{OA \cdot OB} AB = \frac{r^2}{OA \cdot OB} AB$.

- ψ_k чува углове између кривих.

Угао између двеју кривих које се секу је угао између њихових тангенти у пресечној тачки, при чему је права сама себи тангента у произвољној тачки. Пошто инверзија чува углове, угао између тангенти двеју кривих у њиховој пресечној тачки једнак је углу између тангенти слика тих кривих при инверзији ψ_k у њиховој пресечној тачки. Пошто се инверзијом праве и кругови сликају у праве и кругове, инверзија чува углове између правих и кругова. Пресликавања која чувају углове називамо *конформним* пресликавањима.

1. Ако се кругови k_1 и k_2 додирују у центру инверзије, тада се инверзијом сликају у две паралелне праве. Доказати.

Решење:



Нека је $k(O, r)$ круг инверзије (дакле, O је центар инверзије) и нека су k_1, k_2 кругови такви да је $k_1 \cap k_2 = \{O\}$. Пошто садржи центар инверзије, кад кажемо да се круг k_1 слика у праву k'_1 која не садржи центар инверзије, морамо имати у виду да слика тачке O није дефинисана, па се формално скуп $k_1 \setminus \{O\}$ слика у праву k'_1 , тј. важи $\psi_k(k_1 \setminus \{O\}) = k'_1$. Слично и за круг k_2 важи $\psi_k(k_2 \setminus \{O\}) = k'_2$, где је k'_2 права која не садржи центар инверзије. Према томе, како је ψ_k бијекција, важи

$$\begin{aligned} k'_1 \cap k'_2 &= \psi_k(k_1 \setminus \{O\}) \cap \psi_k(k_2 \setminus \{O\}) = \psi_k((k_1 \setminus \{O\}) \cap (k_2 \setminus \{O\})) \\ &= \psi_k((k_1 \cap k_2) \setminus \{O\}) = \emptyset. \end{aligned}$$

Дакле, праве k'_1 и k'_2 немају заједничких тачака, па су паралелне, што је и требало доказати.

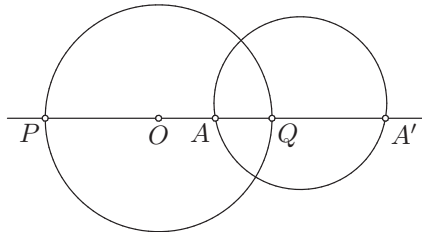
2. Нека се инверзијом ψ_k тачка A која не припада кругу k слика у A' и нека је l произвољан круг који садржи A и A' . Доказати да је $l \perp k$.

У решењу овог задатка користићемо 11. и 14. задатак из области Сличност. Подсетимо се њихових поставки.

11. Ако су A, B, C, D разне колинеарне тачке, а O средиште дужи AB , тада важи $\mathcal{H}(A, B; C, D) \iff AO^2 = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD}$.

14. Нека су A, B, C, D колинеарне тачке такве да важи $\mathcal{B}(A, C, B, D)$ и нека је k круг над пречником AB и l било који круг који садржи тачке C, D . Доказати да важи $\mathcal{H}(A, B; C, D) \iff k \perp l$.

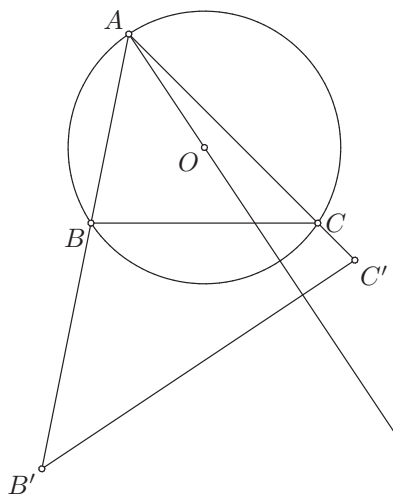
Решење:



Нека је PQ пречник круга k такав да су P, Q, A, A' колинеарне. Тада је O средиште дужи PQ и важи $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA'} = r^2 = PO^2$, па на основу 11. задатка из области Сличност важи $\mathcal{H}(P, Q; A, A')$. Дуж PQ је пречник круга k , круг l садржи тачке A, A' и важи $\mathcal{H}(P, Q; A, A')$, па на основу 14. задатка из области Сличност следи да је $k \perp l$, што је и требало доказати.

3. Нека је O центар описаног круга l троугла ABC . Ако су B' и C' тачке полуправих AB и AC такве да је $AB \cdot AB' = AC \cdot AC'$ доказати да је $OA \perp B'C'$.

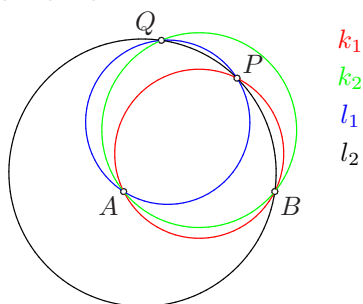
Решење:



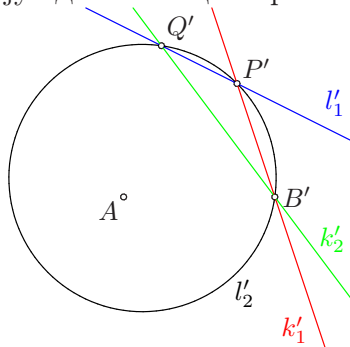
Нека је $k(A, \rho)$ круг с центром у тачки A чији је полупречник ρ једнак $\sqrt{AB \cdot AB'}$. Тада је $B' = \psi_k(B)$ и $C' = \psi_k(C)$. Описани круг l садржи тачку A , па се инверзијом ψ_k слика у праву $B'C'$ (тачније, $\psi_k(l \setminus \{A\}) = B'C'$). Такође, права AO садржи тачку A , па се инверзијом ψ_k слика у себе (тачније, $\psi_k(AO \setminus \{A\}) = AO \setminus \{A\}$). Права AO и круг l су међусобно нормални, јер права AO садржи центар O круга l . Пошто инверзија чува углове, следи да су слике праве AO и круга l међусобно нормални, тј. да је $AO \perp B'C'$, што је и требало доказати.

4. Нека је $ABPQ$ нететивни четвороугао. Доказати да је угао између кругова описаних око троуглова ABP и ABQ једнак углу између кругова описаних око троуглова PQA и PQB .

Решење:



Означимо кругове описане око троуглова $\triangle ABP, \triangle ABQ$ редом са k_1, k_2 , а кругове описане око троуглова $\triangle PQA, \triangle PQB$ редом са l_1, l_2 . Много је лакше наћи угао између правих него између кругова. Инверзија чува углове и одређене кругове слика у праве, па је пожељно применити неку инверзију и пресликати што већи број кругова у праве. Центар инверзије одаберимо тако да припада највећем броју кругова. Пошто све четири тачке A, B, P, Q припадају по трима круговима, одаберимо било коју од њих за центар инверзије, нпр. тачку A .

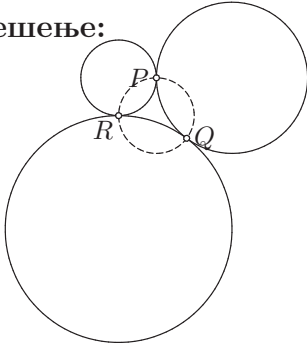


Дакле, нека је $k(A, \rho)$ круг произвољног полупречника $\rho > 0$ и нека су тачке B', P', Q' дате са $B' = \psi_k(B), P' = \psi_k(P), Q' = \psi_k(Q)$, праве k'_1, k'_2, l'_1 дате са $k'_1 = \psi_k(k_1 \setminus \{A\}), k'_2 = \psi_k(k_2 \setminus \{A\}), l'_1 = \psi_k(l_1 \setminus \{A\})$ и нека је круг l'_2 дат са $l'_2 = \psi_k(l_2)$. Знамо да l_2 круг не садржи тачку A (ако би је садржао онда би четвороугао $ABPQ$ био тетиван што је у супротности да претпоставком задатка да је $ABPQ$ нететиван четвороугао), те се он слика у круг l'_2 који не садржи тачку A . Круг k_1 садржи тачке B, P , па је $k'_1 = B'P'$. Слично, $k'_2 = B'Q'$ и $l'_1 = P'Q'$, а како круг l_2 садржи тачке B, P, Q , следи да круг l'_2 садржи тачке B', P', Q' . Угао између праве l'_1 и круга l'_2 једнак је оштром углу између тетиве $P'Q'$ и тангенте круга

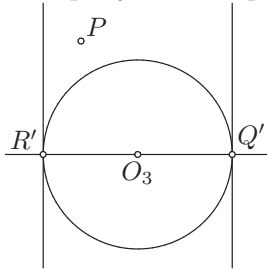
l'_2 у некој од тачака P', Q' (подударни су), а тај угао је подударан периферијском углу над тетивом $P'Q'$, тј. углу $\angle P'B'Q'$, што је угао између правих k'_1, k'_2 . Инверзија чува углове, па следи да је угао између кругова l_1, l_2 подударан углу између кругова k_1, k_2 , што је и требало доказати.

5. Нека се кругови k_1, k_2, k_3 међусобно додирују у тачкама P, Q, R . Доказати да је круг описан око троугла PQR ортогоналан на сва три круга.

Решење:



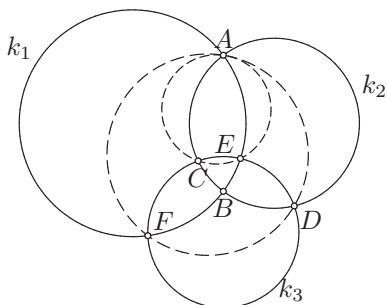
Нека је $k_1 \cap k_2 = \{P\}, k_2 \cap k_3 = \{Q\}, k_3 \cap k_1 = \{R\}$. Означимо круг описан око троугла $\triangle PQR$ са l . Кроз сваку од тачака P, Q, R пролазе по три од четири дата круга, па је свеједно коју ћемо одабрати за центар инверзије. Одаберимо нпр. тачку P .



Нека је $k(P, \rho)$ круг произвољног полупречника $\rho > 0$ и нека су тачке Q', R' дате са $Q' = \psi_k(Q), R' = \psi_k(R)$, нека су праве k'_1, k'_2, l' дате са $k'_1 = \psi_k(k_1 \setminus \{P\}), k'_2 = \psi_k(k_2 \setminus \{P\}), l' = \psi_k(l \setminus \{P\})$ и нека је круг k'_3 дат са $k'_3 = \psi_k(k_3)$. Кругови k_1, k_2 се додирују у центру инверзије P , па на основу 1. задатка следи да је $k'_1 \parallel k'_2$, а такође кругови k_1, k_2 додирују круг k_3 редом у тачкама R, Q , па су k'_1, k'_2 тангенте круга k'_3 редом у тачкама R', Q' . Према томе, ако је O_3 центар круга k'_3 , онда је $O_3R' \perp k'_1$ и $O_3Q' \perp k'_2$. Због $k'_1 \parallel k'_2$, следи да је $O_3R' \parallel O_3Q'$, па следи да су тачке O_3, Q', R' колинеарне. Круг l садржи тачке P, Q, R , па је права $Q'R'$ слика круга l , односно права l' . Дакле, права l' је нормална на k'_1, k'_2 и садржи центар круга k'_3 , па је нормална и на k'_3 . Инверзија чува углове, па следи да је $l \perp k_1, k_2, k_3$, што је и требало доказати.

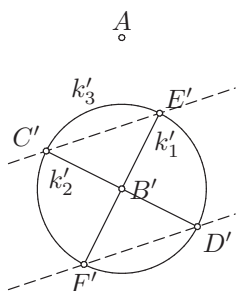
6. Кругови k_1, k_2, k_3 су међусобно ортогонални, при чему се k_1 и k_2 секу у тачкама A и B , k_2 и k_3 у тачкама C и D , k_3 и k_1 у тачкама E и F . Доказати да се кругови описани око троуглова ACE и ADF додирују у тачки A .

Решење:



Нека су l_1, l_2 кругови описани око троуглова $\triangle ACE, \triangle ADF$. Тачка A припада свим круговима осим кругу k_3 , па одаберимо њу за центар инверзије.

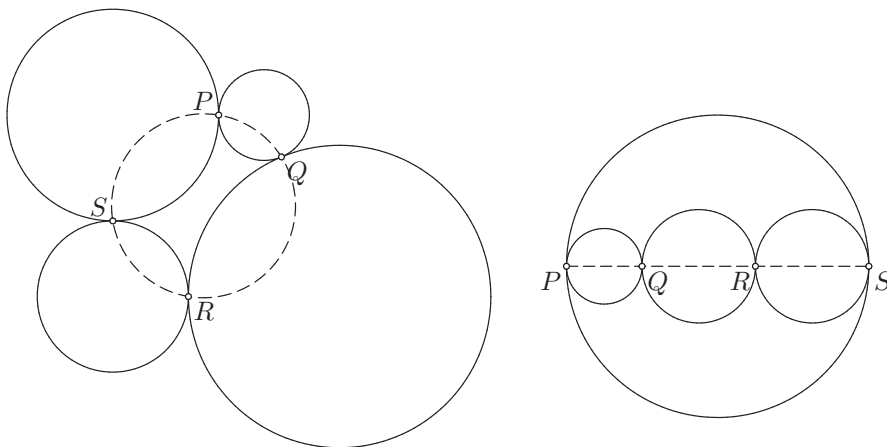
Нека је $k(A, \rho)$ круг произвољног полупречника $\rho > 0$ и нека су тачке B', C', D', E', F' дате са $B' = \psi_k(B)$, $C' = \psi_k(C)$, $D' = \psi_k(D)$, $E' = \psi_k(E)$, $F' = \psi_k(F)$, нека су праве k'_1, k'_2, l'_1, l'_2 дате са $k'_1 = \psi_k(k_1 \setminus \{A\})$, $k'_2 = \psi_k(k_2 \setminus \{A\})$, $l'_1 = \psi_k(l_1 \setminus \{A\})$, $l'_2 = \psi_k(l_2 \setminus \{A\})$ и нека је круг k'_3 дат са $k'_3 = \psi_k(k_3)$. Инверзија чува углове, па следи да су праве k'_1, k'_2 међусобно управне у тачки B' и управне на кругу k'_3 , тј. садрже његов центар. Према томе, тачка B' је центар круга k'_3 . Кругови k_1, k_3 имају заједничке тачке E, F , па следи да се права k'_1 и круг k'_3 секу у тачкама E', F' . Слично, права k'_2 и круг k'_3 се секу у тачкама C', D' . Круг l_1 садржи тачке A, C, E , а круг l_2 тачке A, D, F , па је $l'_1 = C'E'$ и $l'_2 = D'F'$.



Троуглови $\triangle B'C'E'$ и $\triangle B'D'F'$ су једнакокрако правоугли, па следи да су углови $\angle B'C'E'$ и $\angle B'D'F'$ једнаки по 45° , па су и међусобно подударни. Према томе, следи да су праве $C'E'$ и $D'F'$ паралелне, тј. $l'_1 \parallel l'_2$. Како кругови l_1 и l_2 имају заједничку тачку A , следи да им је то једина заједничка тачка, тј. да се додирују у тачки A .

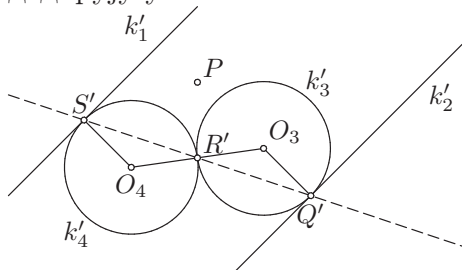
7. У равни су дата четири круга од којих сваки додирује тачно два круга од преосталих. Доказати да су додирне тачке колинеарне или концикличне.

Решење:

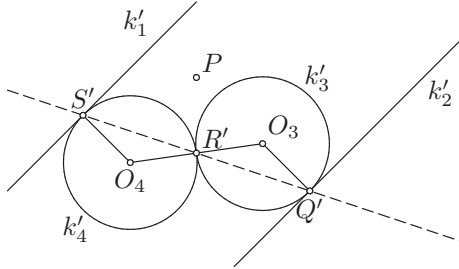


Нека се кругови k_1, k_2 додирују у тачки P , нека се кругови k_2, k_3 додирују у тачки Q , нека се кругови k_3, k_4 додирују у тачки R и нека се кругови k_4, k_1 додирују у тачки S . Треба доказати да су тачке P, Q, R, S колинеарне или концикличне. Свака од тачака P, Q, R, S заједничка је за по два круга, тако да је свеједно коју ћемо одабрати за центар инверзије. Одаберимо нпр. тачку P .

Нека је $k(P, \rho)$ круг произвољног полупречника $\rho > 0$ и нека су тачке Q', R', S' дате са $Q' = \psi_k(Q), R' = \psi_k(R), S' = \psi_k(S)$, праве k'_1, k'_2 дате са $k'_1 = \psi_k(k_1 \setminus \{P\}), k'_2 = \psi_k(k_2 \setminus \{P\})$ и кругови k'_3, k'_4 дати са $k'_3 = \psi_k(k_3), k'_4 = \psi_k(k_4)$. На основу 1. задатка следи да су праве k'_1, k'_2 паралелне, а пошто се k_2, k_3 додирују у тачки Q и k_1, k_4 додирују у тачки S , следи да су праве k'_1, k'_2 редом тангенте кругова k_4, k_3 у тачкама S', Q' . Пошто се кругови k_3, k_4 додирују у тачки R , следи да се кругови k'_3, k'_4 додирују у тачки R' .



Означимо са O_3, O_4 редом центре кругова k'_3, k'_4 . Пошто се они додирују у тачки R' , следи да су тачке O_3, R', O_4 колинеарне. Према томе, довољно је доказати да важи $\angle S'R'O_4 = \angle Q'R'O_3$, јер ће тада то бити унакрсни углови и доказаћемо да су Q', R', S' колинеарне. Пошто су праве k'_1, k'_2 редом тангенте кругова k'_4, k'_3 у тачкама S', Q' , следи да је $S'O_4 \perp k'_1$ и $Q'O_3 \perp k'_2$, а пошто су и паралелне, следи да важи $S'O_4 \parallel Q'O_3$. Према томе, углови $\angle S'O_4R'$ и $\angle Q'O_3R'$ јесу углови с паралелним крацима, па су подударни, тј. важи $\angle S'O_4R' = \angle Q'O_3R'$. Троуглови $\triangle O_4S'R', \triangle O_3Q'R'$ су једнакокрани и имају подударне углове при врху, па следи да имају подударне и остале углове. Специјално, важи $\angle S'R'O_4 = \angle Q'R'O_3$, те су тачке Q', R', S' колинеарне.

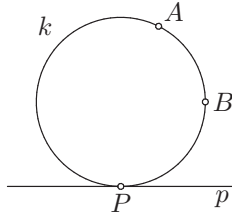


Онда су P, Q, R, S колинеарне или концикличне. Заиста, нека је p права која садржи тачке Q', R', S' . Инверзија је инволуција, па је $Q = \psi_k(Q')$, $R = \psi_k(R')$, $S = \psi_k(S')$. Ако $p \ni P$, онда је $\psi_k(p \setminus \{P\}) = p \setminus \{P\}$, па следи да $Q, R, S \in p$, што значи да су P, Q, R, S колинеарне. Ако $p \not\ni P$, онда је $\psi_k(p) = p' \setminus \{P\}$, где је p' круг који садржи тачку P и $Q, R, S \in p'$, што значи да су P, Q, R, S концикличне.

8. Конструисати круг k који садржи две дате тачке A и B и додирује дату праву p .

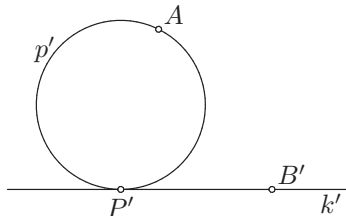
Решење:

Анализа: Нека је k круг који испуњава услове задатка, тј. нека $k \ni A, B$ и нека k додирује p .



Бар једна од тачака A, B не припада правој p , јер се права и круг додирују у тачно једној тачки, а A, B су различите тачке. Без умањења општости, претпоставимо да тачка A не припада правој p и одаберимо њу за центар инверзије.

Нека је $l(A, \rho)$ круг произвољног полупречника $\rho > 0$ и нека је тачка B' дата са $B' = \psi_l(B)$, права k' дата са $k' = \psi_l(k \setminus \{A\})$ и круг p' дат са $p' \setminus \{A\} = \psi_l(p)$, при чему $k' \not\ni A$ и $p' \ni A$.



Круг k садржи тачку B и додирује праву p , па следи да права k' садржи тачку B' и додирује круг p' , тј. да је тангента круга p' из тачке B' .

Конструкција: Нека $p \not\ni A$. Конструиримо круг $l(A, \rho)$ произвољног полупречника $\rho > 0$. Конструиримо круг p' који садржи тачку A такав да важи $p' \setminus \{A\} = \psi_l(p)$. Одредимо тачку $B' = \psi_l(B)$ и конструиримо тангенту k' круга p' из тачке B' такву да $k' \not\ni A$. Конструиримо круг k који садржи тачку A такав да важи $k \setminus \{A\} = \psi_l(k')$.

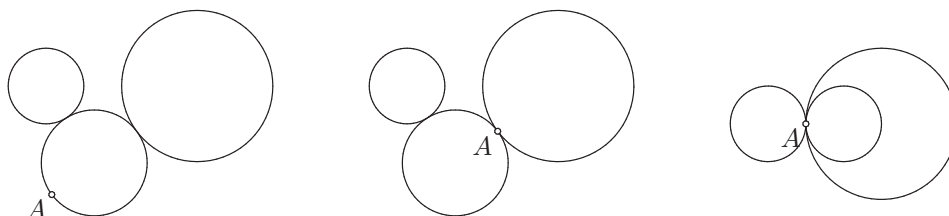
Доказ: По конструкцији, k' је права која не садржи тачку A , тј. центар инверзије, па је k круг који садржи тачку A . Такође, права k' садржи тачку $B' = \psi_l(B)$, па следи да k садржи тачку $B = \psi_l(B')$. По конструкцији, права k' додирује круг p' (у тачки различитој од тачке A , јер је k' не садржи), па следи да круг k додирује праву p .

Дискусија: Ако обе тачке A, B припадају правој p , задатак нема решења. У супротном, број решења је једнак броју тангенти круга p' из тачке B' , које не садрже тачку A , што може бити нула ако B' припада унутрашњости круга p' , један ако $B' \in p'$ или ако B' припада спољашњости круга p' и једна од тангенти је права AB' , односно два у свим осталим случајевима.

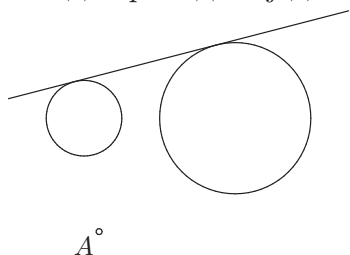
9. Конструисати круг k који садржи дату тачку A и додирује дате кругове k_1 и k_2 .

Решење:

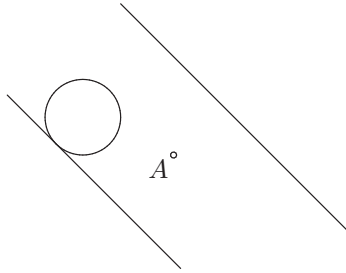
Анализа: Нека је k круг који испуњава услове задатка, тј. нека $k \ni A$ и нека k додирује кругове k_1, k_2 .



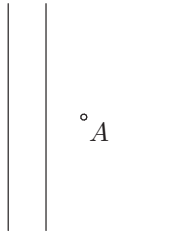
Нека је $l(A, \rho)$ круг произвољног полупречника $\rho > 0$ и нека је права k' дата са $k' = \psi_l(k \setminus \{A\})$. За праву k' важи да не садржи тачку A . Разликујемо три случаја: када тачка A не припада ни кругу k_1 ни кругу k_2 , када припада тачно једном од њих (без умањења општости, кругу k_2) и када припада и једном и другом.



У првом случају су и $k'_1 = \psi_l(k_1)$ и $k'_2 = \psi_l(k_2)$ кругови који не садрже тачку A и додирују праву k' , тј. k' је заједничка тангента кругова k'_1, k'_2 .



У другом случају је $k'_1 = \psi_l(k_1)$ круг који не садржи тачку A и додирује праву k' , тј. k' је тангента круга k'_1 . Такође, $k'_2 = \psi_l(k_2 \setminus \{A\})$ је права, а пошто се кругови k, k_2 додирују у тачки A , следи да је $k' \parallel k'_2$.



У трећем случају се инверзијом у односу на круг l оба круга (строго формално, без тачке A) сликају у праве које не садрже тачку A . Пошто се кругови k_1, k додирују у тачки A , на основу 1. задатка следи да важи $k'_1 \parallel k'$. Исти закључак важи и за праве k'_2, k' , тј. важи $k'_2 \parallel k'$.

Конструкција: Конструирамо круг $l(A, \rho)$ произвољног полупречника $\rho > 0$. У зависности од тога да ли тачка A припада круговима k_1, k_2 или не, конструирамо њихове слике k'_1, k'_2 при инверзији ψ_l . Конструирамо праву k' која не садржи тачку A и испуњава један од следећа три услова:

1. заједничка је тангента кругова k'_1, k'_2 , ако $A \notin k_1, k_2$;
2. паралелна је правој k'_2 и тангента је круга k'_1 , ако $A \notin k_1$ и $A \in k_2$;
3. паралелна је правима k'_1, k'_2 ако $A \in k_1, k_2$;

На крају, конструирамо круг k који садржи тачку A такав да важи $k \setminus \{A\} = \psi_l(k')$.

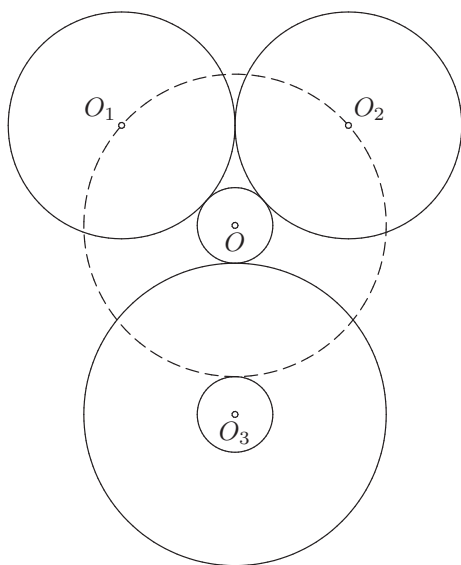
Доказ: По конструкцији је k' права која не садржи тачку A , тј. центар инверзије, па је k круг који садржи тачку A . Права која не садржи тачку A и паралелна је правој k' слика се у круг који додирује круг k у центру инверзије, тј. у тачки A , а круг који не садржи тачку A и додирује праву k' слика се у круг који не садржи тачку A и додирује круг k . Према томе, у свим претходно разматраним случајевима следи да кругови k_1, k_2 додирују круг k .

Дискусија: Број решења једнак је броју правих не садрже тачку A и испуњавају одговарајући услов из дела Конструкција. У првом случају

број таквих правих може бити од нула до четири, у зависности од међусобног положаја кругова k'_1, k'_2 (рачунају се и заједничке спољашње и заједничке унутрашње тангенте). У другом случају број таквих правих може бити један или два, у зависности од тога да ли нека од двеју тангенти круга k'_1 које су паралелне правој k'_2 садржи тачку A или не. У трећем случају има бесконачно много решења ако су праве k'_1, k'_2 паралелне, односно нема решења ако се те праве секу.

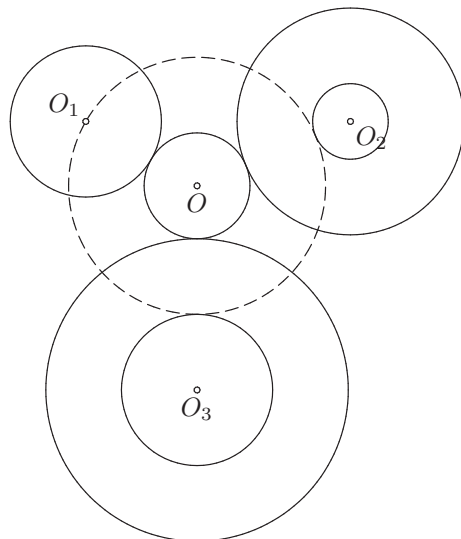
10. Конструисати круг који споља додирује три дата круга k_1, k_2, k_3 .

Решење: Решење овог задатка неће бити дато као решења осталих конструктивних задатака (иако треба исписати све четири етапе, као и у осталим таквим задацима), јер ће се једноставном трансформацијом довести до неког од претходна два задатка, која знамо да решимо. Нека круг $k(O, r)$ додирује кругове $k_1(O_1, r_1), k_2(O_2, r_2), k_3(O_3, r_3)$ споља. Нека је, без умањења општости, $r_1 \leq r_2, r_3$ и нека је $l(O, r + r_1)$ круг. Тада круг l садржи центар O_1 круга k_1 .



Ако важи нека од једнакости $r_1 = r_2, r_1 = r_3$, онда круг l садржи и неку од тачака O_2, O_3 . Ако садржи обе, онда је он описани круг троугла $\triangle O_1 O_2 O_3$. Ако садржи само једну од њих (без умањења општости, тачку O_2), онда он додирује круг $l_3(O_3, r_3 - r_1)$ споља. Дакле, тада круг l садржи тачке O_1, O_2 и додирује круг l_3 споља, па се његова конструкција врши слично као у 8. задатку. Тамо је, додуше, задатак био да се конструише круг који садржи две дате тачке и додирује дату праву, а овде уместо праве треба да додирује круг споља, али се и овај задатак решава на

ИСТИ НАЧИН.



Ако круг l не садржи ниједну од тачака O_2, O_3 , онда додирује и круг $l_2(O_2, r_2 - r_1)$ споља и круг $l_3(O_3, r_3 - r_1)$ споља, па се његова конструкција врши исто као у претходном задатку (круг који садржи дату тачку и додирује два дата круга), с тим што се овде узимају у обзир само заједничке спољашње тангенте и то такве да су O_1, l'_2, l'_3 с исте стране те тангенте, иначе ће круг добијен инверзијом додиривати кругове l_2, l_3 унутра.

5 Изометријске трансформације равни

Дефиниција 24. Нека је α раван. Пресликавање $\mathfrak{I} : \alpha \longrightarrow \alpha$, такво да за сваки пар тачака (A, B) равни α важи $(A, B) \cong (\mathfrak{I}(A), \mathfrak{I}(B))$, називамо *изометријском трансформацијом* (*изометријом*) равни α .

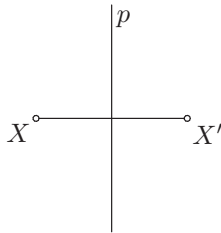
Релација подударности парова тачака је основни појам, тј. не дефинише се. Све изометрије су бијекције, сликају праве у праве (штавише, чувају распоред тачака на правој, тј. ако важи $\mathcal{B}(A, B, C)$, онда важи $\mathcal{B}(\mathfrak{I}(A), \mathfrak{I}(B), \mathfrak{I}(C))$, полуправе у полуправе, дужи у дужи, полуравни у полуравни, угаоне линије у угаоне линије, углове у углове итд. Изометрије које мењају оријентацију равни називамо *индиректним* изометријама, а оне које чувају оријентацију равни називамо *директним* изометријама. За сваке две изометрије $\mathfrak{I}, \mathfrak{J}$, њихова композиција $\mathfrak{J} \circ \mathfrak{I}$ је такође изометрија, и инверз $\mathfrak{I}^{-1}$ изометрије $\mathfrak{I}$ је такође изометрија. Другим речима, изометрије чине групу у односу на операцију композиције пресликавања.

Дефиниција 25. Нека су $\Phi, \Phi' \subseteq \alpha$ фигуре у равни α . Ако постоји изометрија $\mathfrak{I} : \alpha \longrightarrow \alpha$ равни α таква да важи $\Phi' = \mathfrak{I}(\Phi)$, онда кажемо да је фигура Φ *подударна* фигури Φ' и пишемо $\Phi \cong \Phi'$.

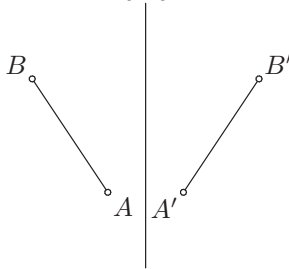
Није тешко доказати да је релација $\cong$ подударности фигура једна релација еквиваленције. Због симетричности релације чешће ћемо говорити да су фигуре *међусобно подударне*. Дужи $AB, A'B'$ су међусобно подударне ако и само ако важи $(A, B) \cong (A', B')$.

Сада ћемо видети које све изометрије равни постоје и у каквим су оне односима.

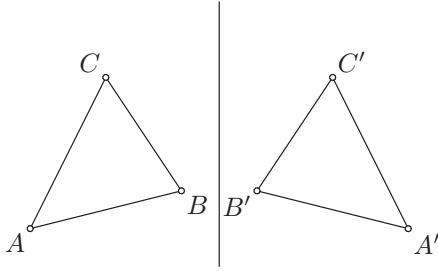
Дефиниција 26. Нека је $p \subset \alpha$ права равни α и нека је пресликавање $\mathcal{S}_p$ дато на следећи начин: ако је $X \in p$, онда је $\mathcal{S}_p(X) = X$, а иначе је $\mathcal{S}_p(X) = X'$, где је X' тачка таква да је p медијатриса дужи XX' у равни α . Онда се пресликавање $\mathcal{S}_p$ назива *осном рефлексijом* (осном симетријом) равни α с осом p .



Није тешко доказати да је овако дефинисано пресликавање изометрија. Слика произвољне дужи AB је дуж $A'B'$ ($A' = \mathcal{S}_p(A)$, $B' = \mathcal{S}_p(B)$) таква да је једна од њих „лик у огледалу” другој и обратно.



Шта се дешава ако двапут применимо осну рефлексiju? По дефиницији се тачке праве p сликају у себе, а ако се X слика у X' такво да је p медијатриса дужи XX' , онда се X' мора сликати у X . Дакле, $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_p = \text{Id}$, што значи да је осна рефлексija сама себи инверз, односно да је инволуција. По дефиницији се тачке осе p сликају у себе, а тачке ван осе p се не сликају у себе (да би постојала дуж чија је p медијатриса), па су једине фиксне тачке (тачке које се сликају у себе) тачке осе p .



Што се промене оријентације тиче, ако је $\triangle ABC$ позитивно оријентисан троугао, тј. ако су A, B, C тачке равни α такве да се од темена A ка темену B па затим ка темену C иде у позитивном смеру, онда је троугао $\triangle A'B'C'$, где су A', B', C' редом слике тачака A, B, C при осној рефлексiji $\mathcal{S}_p$, негативно оријентисан троугао. Према томе, осна рефлексija мења оријентацију равни, па је индиректна изометрија равни.

Теорема 11. *Ако је $\mathcal{I}$ индиректна изометрија равни α која има бар једну фиксну тачку P , онда је $\mathcal{I}$ осна рефлексija $\mathcal{S}_p$ чија оса $p \subset \alpha$ садржи фиксну тачку P .*

Теорема 12 (Теорема о трансмутацији). *Нека је $p \subset \alpha$ права равни α , $\mathcal{S}_p$ осна рефлексija и $\mathcal{I}$ произволна изометрија равни α . Ако је $p' = \mathcal{I}(p)$, онда је $\mathcal{I} \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{I}^{-1} = \mathcal{S}_{p'}$.*

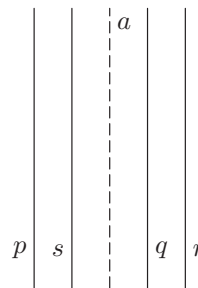
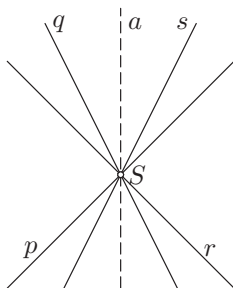
Дефиниција 27. Нека је $\Phi \subseteq \alpha$ фигура равни α . Кажемо да је права p оса симетрије фигуре Φ ако је $\mathcal{S}_p(\Phi) = \Phi$. Ако фигура Φ има бар једну осу симетрије, кажемо да је она *осносиметрична*.

Сваку изометрију равни α можемо изразити преко осних рефлексija. Штавише, увек их можемо одабрати тако да их буде највише три.

Теорема 13. *Нека је $\mathcal{I}$ произволна изометрија равни α . Тада је $\mathcal{I} = \mathcal{S}_p$ за неку праву $p \subset \alpha$, или је $\mathcal{I} = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$ за неке праве $p, q \subset \alpha$, или је $\mathcal{I} = \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$ за неке праве $p, q, r \subset \alpha$.*

У дефиницији 14 увели смо појам прамена правих у равни. Прамен правих је у директној вези с композицијом осних рефлексija. Наиме, важи следећа важна теорема.

Теорема 14. Нека су $p, q, r \subset \alpha$ праве равни α . Онда је композиција $S_r \circ S_q \circ S_p$ осна рефлексја ако и само ако праве p, q, r припадају једном прамену. Штавише, тада оса те рефлексје (означимо је са s) припада том прамену и ако је права a оса симетрије пара правих p, r , тада је права a оса симетрије и пара правих q, s .



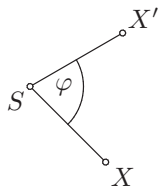
Утврдимо које још изометрије равни постоје.

Дефиниција 28. Пресликавање $\mathcal{E} : \alpha \longrightarrow \alpha$ такво да је $\mathcal{E}(X) = X$ за сваку тачку $X \in \alpha$ називамо *коинциденцијом*.

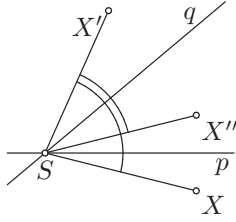
Коинциденција је, у ствари, идентичко пресликавање. Оно је тривијално изометрија, јер је $(A, B) \cong (A, B) = (\mathcal{E}(A), \mathcal{E}(B))$ за сваки пар тачака A, B . С обзиром на то да је $S_p \circ S_p = \text{Id} = \mathcal{E}$, имамо репрезентацију коинциденције преко производа двеју осних рефлексја. Тривијално, коинциденција је директна изометрија равни.

Теорема 15. Ако изометрија $\mathfrak{I}$ равни α има бар три неколинеарне фиксне тачке, онда је $\mathfrak{I} = \mathcal{E}$. Ако директна изометрија $\mathfrak{I}$ равни α има бар две разне фиксне тачке, онда је $\mathfrak{I} = \mathcal{E}$.

Дефиниција 29. Нека је $S \in \alpha$ тачка равни α и φ оријентисани угао у тој равни. Пресликавање $\mathcal{R}_{S,\varphi} : \alpha \longrightarrow \alpha$ такво да је $\mathcal{R}_{S,\varphi}(S) = S$ и $\mathcal{R}_{S,\varphi}(X) = X'$ где је X' таква да важи $SX = SX'$ и $\angle XSX' = \varphi$ (подударни су и имају исту оријентацију), за тачке $X \neq S$, назива се *ротацијом* око центра S за оријентисани угао φ .



Да бисмо разумели како ротација пресликава тачке равни α , замислимо да имамо крути штап чији један крај у центру S и који је фиксиран, а други крај је у произвољној тачки X равни α . Ротацијом штапа за оријентисани угао φ добијемо положај тачке $X' = \mathcal{R}_{S,\varphi}(X)$.



Како видети ротацију као композицију двеју осних рефлексии? Означимо са p произвољну праву равни α која садржи тачку S и са q праву равни α добијену ротацијом праве p око центра S за оријентисани угао $\frac{\varphi}{2}$. Није тешко доказати да у том случају важи $\mathcal{R}_{S,\varphi} = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$. Напоменимо да репрезентација ротације $\mathcal{R}_{S,\varphi}$ као $\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$ није јединствена, јер праве p, q можемо ротирати око центра S за произвољан угао и добити праве p', q' такве да је композиција $\mathcal{S}_{q'} \circ \mathcal{S}_{p'}$ такође једнака полазној ротацији.

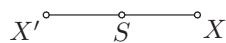
Није тешко доказати да је $\mathcal{R}_{S,\psi} \circ \mathcal{R}_{S,\varphi} = \mathcal{R}_{S,\varphi+\psi}$, $\mathcal{R}_{S,0^\circ} = \mathcal{R}_{S,360^\circ} = \mathcal{E}$ и $\mathcal{R}_{S,\varphi}^{-1} = \mathcal{R}_{S,-\varphi}$, где је $-\varphi$ угао подударан углу φ , супротне оријентације.

Теорема 16. *Ако директна изометрија $\mathcal{I}$ равни α има тачно једну фиксну тачку S , онда је $\mathcal{I} = \mathcal{R}_{S,\varphi}$, за неки оријентисани угао φ различит од 0° или пуног угла.*

Теорема 17 (Теорема о трансмутацији). *Нека је $S \in \alpha$ тачка равни α , φ оријентисани угао у тој равни, $\mathcal{R}_{S,\varphi}$ ротација и $\mathcal{I}$ произвољна изометрија равни α . Ако је $S' = \mathcal{I}(S)$, онда је $\mathcal{I} \circ \mathcal{R}_{S,\varphi} \circ \mathcal{I}^{-1} = \mathcal{R}_{S',\varphi}$, ако је $\mathcal{I}$ директна, односно $\mathcal{I} \circ \mathcal{R}_{S,\varphi} \circ \mathcal{I}^{-1} = \mathcal{R}_{S',-\varphi}$, ако је $\mathcal{I}$ индиректна изометрија.*

Може се доказати да ако је φ конвексан угао различит од 0° или опруженог угла и $p' = \mathcal{R}_{S,\varphi}(p)$, онда праве p, p' заклапају углове φ и $180^\circ - \varphi$.

Специјални случај ротације јесте онај у коме је угао ротације опружени угао. Тада за тачку $X' = \mathcal{S}(X)$, где је $X \neq S$, важи да је $SX' = SX$ и $\angle XSX' = 180^\circ$, тј. $\mathcal{B}(X, S, X')$. Тачка S је онда средиште дужи XX' .

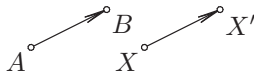


Ово пресликавање се назива *централном симетријом* и означава се са $\mathcal{S}_S$ (не употребљава се термин централна рефлексии; он се користи кад се говори о изометријама једне праве). Јасно је да важи $\mathcal{S}_S^{-1} = \mathcal{S}_S$, јер је $\mathcal{S}_S \circ \mathcal{S}_S = \mathcal{R}_{S,180^\circ} \circ \mathcal{R}_{S,180^\circ} = \mathcal{R}_{S,360^\circ} = \mathcal{E}$. Такође, ако је $\mathcal{S}_S = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$, онда је оријентисани угао од праве p ка правој q подударан углу $\frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$, тј. важи $p \perp q$.

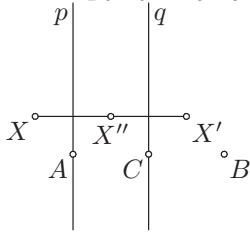
Слично појму осе симетрије неке фигуре, постоји и појам центра симетрије фигуре.

Дефиниција 30. Нека је $\Phi \subseteq \alpha$ фигура равни α . Кажемо да је тачка S *центар симетрије* фигуре Φ ако је $\mathcal{S}_S(\Phi) = \Phi$. Ако фигура Φ има бар један центар симетрије, онда је она *централносиметрична*.

Дефиниција 31. Нека је $\overrightarrow{AB}$ произвољан вектор у равни α . Пресликавање $\mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} : \alpha \rightarrow \alpha$ дато са $\mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}}(X) = X'$, где је X' таква да је $\overrightarrow{XX'} = \overrightarrow{AB}$, назива се *транслацијом* за вектор $\overrightarrow{AB}$.



Транслација не представља ништа друго него праволинијско кретање у одређеном смеру. Није тешко доказати да је $\mathcal{T}_{\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{AC}}$ и $\mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}}^{-1} = \mathcal{T}_{-\overrightarrow{AB}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{BA}}$. Дакле, транслације (заједно са коинциденцијом) чине групу која је подгрупа групе изометрија.



Нека је p права која садржи тачку A и управна је на правој AB и нека је q права која садржи средиште C дужи AB и управна је на правој AB . Јасно, тада је $p \parallel q$. Није тешко доказати да важи $\mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$. Дакле, и транслацију видимо као композицију двеју осних рефлексии. Наравно, ово није једина репрезентација транслације $\mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}}$, тј. уместо правих p, q можемо посматрати праве p', q' које су управне на AB и налазе се на растојању $\frac{AB}{2}$, при чему је смер од праве p' ка правој q' исти као смер вектора $\overrightarrow{AB}$.

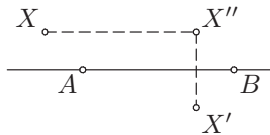
Транслација је директна изометрија. То можемо видети директно из дефиниције (померањем у правцу неког вектора не мења се оријентација равни), а можемо видети и из чињенице да се транслација представља као композиција двеју осних рефлексии. Што се тиче фиксних тачака, важи следеће. Ако је $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$, тј. ако је у питању коинциденција, све тачке равни α су фиксне, а ако је $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$, онда је $X' \neq X$ за сваку тачку X равни α , тј. ниједна тачка није фиксна.

Теорема 18. Ако директна изометрија $\mathcal{I}$ равни α нема фиксних тачака, онда је $\mathcal{I} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}}$, где је $\overrightarrow{AB}$ неки ненула вектор равни α .

Теорема 19 (Теорема о трансмутацији). Нека је $\overrightarrow{AB}$ произвољан вектор у равни α , $\mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}}$ транслација и $\mathfrak{I}$ произвољна изометрија равни α . Ако је $A' = \mathfrak{I}(A)$ и $B' = \mathfrak{I}(B)$, онда је $\mathfrak{I} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} \circ \mathfrak{I}^{-1} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{A'B'}}$.

Испоставља се да постоји само још један тип изометрија равни. Наиме, видели смо како изгледају изометрије равни које су композиције двеју осних рефлексција, у зависности од узајамног положаја оса тих рефлексција. На основу теореме 13 преостаје само још случај кад је изометрија равни композиција трију осних рефлексција. На основу теореме 14, ако су осе тих рефлексција праве једног прамена, композиција је поново рефлексција, а ако нису, онда је у питању следећа изометрија.

Дефиниција 32. Нека је $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ ненула вектор равни α . Пресликавање $\mathcal{G}_{\overrightarrow{AB}} : \alpha \rightarrow \alpha$ дато са $\mathcal{G}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{S}_{AB} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}}$ назива се *клизајућом рефлексijом* за вектор $\overrightarrow{AB}$ у односу на праву AB .



Клизајућа рефлексija је, као што јој само име каже, композиција транслације („клизања“) и осне рефлексije. При томе, вектор $\overrightarrow{AB}$ мора бити паралелан оси рефлексije. Најчешће се узима онај представник вектора чије тачке припадају оси рефлексije, чиме се ознака клизајуће рефлексije значајно олакшава (није неопходно посебно означити осу и вектор). Ово је једна индиректна изометрија равни, јер је композиција директне и индиректне изометрије, те мења оријентацију равни. Такође, клизајућа рефлексija нема фиксних тачака.

Теорема 20. Ако индиректна изометрија $\mathfrak{I}$ равни α нема фиксних тачака, онда је $\mathfrak{I} = \mathcal{G}_{\overrightarrow{AB}}$, где је $\overrightarrow{AB}$ неки ненула вектор равни α .

Теорема 21 (Теорема о трансмутацији). Нека је $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ ненула вектор равни α , $\mathcal{G}_{\overrightarrow{AB}} : \alpha \rightarrow \alpha$ клизајућа рефлексija и $\mathfrak{I}$ произвољна изометрија равни α . Ако је $A' = \mathfrak{I}(A)$ и $B' = \mathfrak{I}(B)$, онда је $\mathfrak{I} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{AB}} \circ \mathfrak{I}^{-1} = \mathcal{G}_{\overrightarrow{A'B'}}$.

Код клизајуће рефлексije транслација и рефлексija комутирају, тј. није битно да ли ћемо прво извршити транслацију, па онда рефлексiju, или обрнуто. Дакле, важи $\mathcal{G}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{S}_{AB} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} \circ \mathcal{S}_{AB}$. Транслација се разбија на две осне рефлексije чије су осе нормалне на AB , па следи да је клизајућа рефлексija композиција трију осних рефлексija чије осе не припадају једном прамену. Тај положај правих је веома специфичан (две

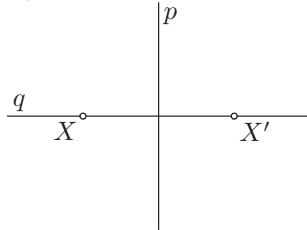
су паралелне, а трећа је управна на њима). Испоставља се да је композиција трију осних рефлексција чије осе не припадају једном прамену увек клизајућа рефлексција, без обзира на међусобни њихов положај.

Што се инверза клизајуће рефлексije тиче, једноставно се види да је $\mathcal{G}_{AB}^{-1} = (\mathcal{S}_{AB} \circ \mathcal{T}_{AB})^{-1} = \mathcal{T}_{AB}^{-1} \circ \mathcal{S}_{AB}^{-1} = \mathcal{T}_{BA} \circ \mathcal{S}_{AB} = \mathcal{G}_{BA}$. Дакле, клизајућа рефлексija није инволуција.

1. Доказати: $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p \Leftrightarrow p = q \vee p \perp q$.

Решење: Почетна једнакост $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$ важи ако и само ако важи једнакост $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_q$. На основу теореме 12 (теореме о трансмутацији), с обзиром на то да је $\mathcal{S}_p^{-1} = \mathcal{S}_p$, следи да је $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_{\mathcal{S}_p(q)}$, па је полазна једнакост еквивалентна с једнакошћу $\mathcal{S}_{\mathcal{S}_p(q)} = \mathcal{S}_q$. Две осне рефлексije су једнаке ако и само ако су им осе исте, према томе, последња једнакост је еквивалентна са $\mathcal{S}_p(q) = q$. Доказаћемо да је $\mathcal{S}_p(q) = q$ еквивалентно са $p = q \vee p \perp q$.

$\Leftarrow$: Нека је $p = q$. Пошто се све тачке праве p сликају у себе, следи да се и права p слика у себе, тј. да је $\mathcal{S}_p(p) = p$. Пошто је $p = q$, следи да је $\mathcal{S}_p(q) = q$.



Нека је $p \perp q$ и нека је $X \in q$ произвољна. Ако је $X \in p$, онда је $\mathcal{S}_p(X) = X \in q$. Нека $X \notin p$. Тада је $\mathcal{S}_p(X) = X'$ и p је медијатриса дужи XX' . Дакле, $p \perp XX'$. Такође, $p \perp q$ и $X \in q$, па следи да се праве XX' и q поклапају. Самим тим, $X' \in q$. Према томе, $\mathcal{S}_p(q) \subseteq q$. Пошто је $\mathcal{S}_p$ инволуција, следи да је $q \subseteq \mathcal{S}_p(q)$, па је $\mathcal{S}_p(q) = q$.

$\Rightarrow$: Нека је $\mathcal{S}_p(q) = q$ и $p \neq q$. Пошто је $p \neq q$, онда постоји тачка X која припада q и не припада p . Нека је $\mathcal{S}_p(X) = X'$. Тада је p медијатриса дужи XX' , па је $p \perp XX'$. Такође, из $\mathcal{S}_p(q) = q$ следи да $X' \in q$, па су праве q и XX' исте. Дакле, следи да је $p \perp q$.

Напомена 11. Претходни задатак нам говори да две осне рефлексije комутирају ако и само ако су им осе идентичне или међусобно нормалне. Како је $(\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p)^{-1} = \mathcal{S}_p^{-1} \circ \mathcal{S}_q^{-1} = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q$, закључујемо да две осне рефлексije комутирају ако и само ако је њихова композиција инволуција. Од директних изометрија, инволуције су само коинциденција и централна симетрија, а оне се добијају управо у случајевима $p = q$ и $p \perp q$ редом.

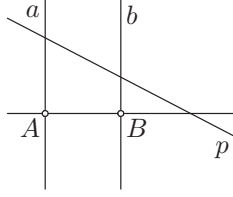
2. Доказати: $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_r = \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$ ако и само ако су p, q, r праве једног прамена.

Решење: $\Leftarrow$: Нека су p, q, r праве једног прамена. Тада је, на основу теореме 14, пресликавање $\mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$ осна рефлексација. Дакле, $\mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_s$. Осна рефлексација је инволуција, па је $\mathcal{S}_s^{-1} = \mathcal{S}_s$. Како је $\mathcal{S}_s^{-1} = (\mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p)^{-1} = \mathcal{S}_p^{-1} \circ \mathcal{S}_q^{-1} \circ \mathcal{S}_r^{-1} = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_r$, следи да важи једнакост $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_r = \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$.

$\Rightarrow$: Нека је $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_r = \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$. Означимо $\mathcal{I} = \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$. Тада је $\mathcal{I}^{-1} = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_r = \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{I}$, тј. $\mathcal{I}$ је инволуција. Такође, $\mathcal{I}$ је индиректна изометрија, па не може бити клизајућа рефлексација, јер клизајућа рефлексација није инволуција. Према томе, $\mathcal{I}$ је осна рефлексација, тј. $\mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$ је осна рефлексација. На основу теореме 14 следи да праве p, q, r припадају једном прамену, што је и требало доказати.

3. Доказати: $\mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_A = \mathcal{S}_A \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_B \Leftrightarrow AB \perp p$.

Решење:



Нека је a права која је нормална на правој AB у тачки A , а нека је b права која је нормална на правој AB у тачки B . Тада је $\mathcal{S}_A = \mathcal{S}_{AB} \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_{AB}$ и $\mathcal{S}_B = \mathcal{S}_{AB} \circ \mathcal{S}_b = \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_{AB}$. Дакле,

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_A &= \mathcal{S}_{AB} \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_{AB} & \text{и} \\ \mathcal{S}_A \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_B &= \mathcal{S}_{AB} \circ \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_{AB}. \end{aligned}$$

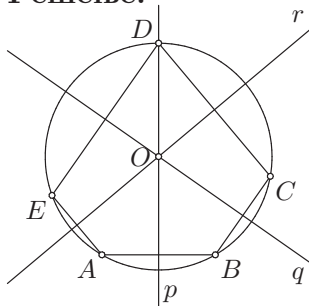
Према томе, једнакост $\mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_A = \mathcal{S}_A \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_B$ важи ако и само ако важи једнакост $\mathcal{S}_{AB} \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_{AB} = \mathcal{S}_{AB} \circ \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_{AB}$, што важи ако и само ако важи $\mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_b$. На основу 2. задатка, ово важи ако и само ако праве a, p, b припадају једном прамену. Пошто су a, b управне на правој AB , следи да тај прамен једино може бити прамен паралелних правих, према томе, важи $\mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_b$ ако и само ако је $p \parallel a \parallel b$. Пошто је $a \perp AB$ и $b \perp AB$, ово је еквивалентно са $AB \perp p$, што је и требало доказати.

4. Ако нека фигура равни има тачно две осе симетрије, доказати да је она и централносиметрична.

Решење: Нека су праве p, q једине осе симетрије фигуре Φ . Тада је $\mathcal{S}_p(\Phi) = \Phi$ и $\mathcal{S}_q(\Phi) = \Phi$. Такође, права $\mathcal{S}_p(q)$ је оса симетрије фигуре Φ , јер је $\mathcal{S}_{\mathcal{S}_p(q)}(\Phi) = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p(\Phi) = \Phi$. Пошто нема других оса симетрије сем правих p, q , следи да је $\mathcal{S}_p(q) = p$ или $\mathcal{S}_p(q) = q$. Прва једнакост не може да важи, јер би тада било $q = \mathcal{S}_p(p) = p$, а праве p, q се разликују. Дакле, $\mathcal{S}_p(q) = q$. На основу првог задатка следи да је $p = q$ или $p \perp q$. Пошто није $p = q$, следи да је $p \perp q$. Нека је O пресечна тачка правих p, q . Тада је $\mathcal{S}_O(\Phi) = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p(\Phi) = \Phi$, па следи да је тачка O центар симетрије фигуре Φ . Дакле, фигура Φ је централносиметрична.

5. Нека је $ABCDE$ петоугао уписан у круг такав да је $BC \parallel DE$ и $CD \parallel EA$. Доказати да D припада медијатриси странице AB .

Решење:



Нека је O центар круга и нека су p, q, r редом медијатрисе странице AB, BC, CD . Како је O једнако удаљена од свих темена петоугла (јер темена петоугла припадају кругу с центром O), следи да O припада медијатрисама p, q, r , па су то праве једног прамена. Такође, како је $q \perp BC$ и $BC \parallel DE$, следи да је $q \perp DE$, а пошто је $OD = OE$ и $O \in q$, следи да је q медијатриса и странице DE . Слично, како је $r \perp CD$ и $CD \parallel EA$, следи да је $r \perp EA$, а пошто је $OE = OA$, следи да је r медијатриса и странице EA .

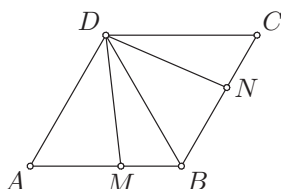
Посматрајмо изометрију $\mathcal{I} = \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q$. Важи да је

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(D) &= \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q(D) \\ &= \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_r(E) \\ &= \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p(A) \\ &= \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q(B) = \mathcal{S}_r(C) = D. \end{aligned}$$

Такође, пошто p, q, r припадају једном прамену, на основу 2. задатка следи да је $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_p$, па је $\mathcal{I} = \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_p$, па је $D = \mathcal{I}(D) = \mathcal{S}_p(D)$. Одавде следи да $D \in p$.

6. Нека је $ABCD$ ромб такав да је $\angle BAD = 60^\circ$ и нека права p сече редом странице AB и BC у тачкама M и N тако да је збир дужи BM и BN једнак страници ромба. Доказати да је троугао DMN правилан.

Решење:

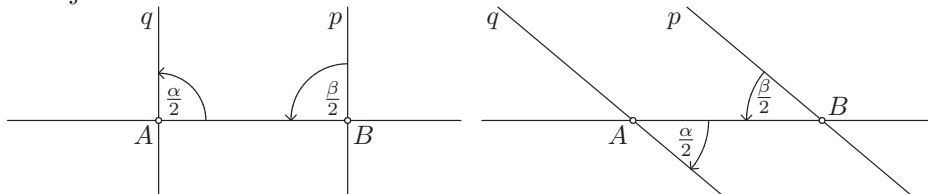


Важи $\mathcal{R}_{D,60^\circ}(A) = B$ и $\mathcal{R}_{D,60^\circ}(B) = C$. Дакле, ротацијом око D за 60° се дуж AB слика у дуж BC . Пошто је $BM + BN = AB$ и $BM = AB - AM$, па је $AB - AM + BN = AB$, следи да је $AM = BN$. Нека је $M' = \mathcal{R}_{D,60^\circ}(M)$. Следи да важи $AM = BM'$, па следи $BN = BM'$. Тачке N, M' су између тачака B, C и на истом растојању од B , па следи да је $M' = N$, тј. да је $\mathcal{R}_{D,60^\circ}(M) = N$. Одавде следи да је троугао $\triangle DMN$ једнакостраничан, јер је $DM = DN$ и $\angle MDN = 60^\circ$.

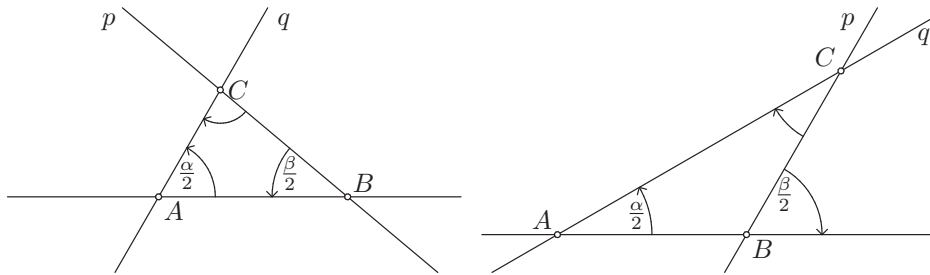
7. Одредити тип и компоненте изометрије $\mathcal{R}_{A,\alpha} \circ \mathcal{R}_{B,\beta}$.

Решење: Нека су $\alpha, \beta \in [-180^\circ, 180^\circ]$. Ако је $A = B$, онда важи да је $\mathcal{R}_{A,\alpha} \circ \mathcal{R}_{B,\beta} = \mathcal{R}_{A,\alpha+\beta}$, ако је $\alpha + \beta \notin \{0^\circ, \pm 360^\circ\}$, односно $\mathcal{R}_{A,\alpha} \circ \mathcal{R}_{B,\beta} = \mathcal{E}$, ако је $\alpha + \beta \in \{0^\circ, \pm 360^\circ\}$. Претпоставимо да је $A \neq B$.

Нека је p права која садржи тачку B таква да је оријентисани угао од p ка AB једнак $\frac{\beta}{2}$ и нека је q права која садржи тачку A таква да је оријентисани угао од AB ка q једнак $\frac{\alpha}{2}$. Тада је $\mathcal{R}_{A,\alpha} = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_{AB}$ и $\mathcal{R}_{B,\beta} = \mathcal{S}_{AB} \circ \mathcal{S}_p$, па је $\mathcal{R}_{A,\alpha} \circ \mathcal{R}_{B,\beta} = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_{AB} \circ \mathcal{S}_{AB} \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$. У зависности од углова α, β , праве p, q могу бити паралелне или се сећи у некој тачки.



Углови $\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}$ су оштри или прави и могу бити произвољне оријентације, односно $\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2} \in [-90^\circ, 90^\circ]$. Ако су углови α, β исте оријентације, онда је $p \parallel q$ ако и само ако су $\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}$ прави углови, тј. $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = \pm 180^\circ$. Ако су α, β супротне оријентације, онда је $p \parallel q$ ако и само ако су $\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}$ подударни, тј. $\frac{\alpha}{2} = -\frac{\beta}{2}$. Дакле, $p \parallel q$ ако и само ако $\alpha + \beta \in \{0^\circ, \pm 360^\circ\}$ и тада је $\mathcal{R}_{A,\alpha} \circ \mathcal{R}_{B,\beta} = \mathcal{T}_{\vec{2BC}}$, где је C подножје управне из B на правој q .



Ако $\alpha + \beta \notin \{0^\circ, \pm 360^\circ\}$, онда се p, q секу у некој тачки C . Оријентисани угао $\angle BCA$ представља оријентисани угао од праве p ка правој q . Ако су α, β исте оријентације, они су унутрашњи углови троугла $\triangle ABC$, тј. $\angle BAC = \frac{\alpha}{2}$ и $\angle CBA = \frac{\beta}{2}$. Угао $\angle BCA$ је супротне оријентације од углова $\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}$, па је $-\angle BCA = 180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}$. Дакле, $\angle BCA = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} - 180^\circ$ и $S_q \circ S_p = \mathcal{R}_{C, 2\angle BCA} = \mathcal{R}_{C, \alpha + \beta - 360^\circ}$. Нека су α, β супротне оријентације и нека су α', β' неоријентисани углови подударни угловима α, β редом. Како се p и q секу, један од њих је већи од другог, јер би иначе било $p \parallel q$. Без умањења општости, нека је $\beta' > \alpha'$. Тада је угао $\frac{\beta}{2}$ спољашњи угао троугла $\triangle ABC$ и исте оријентације као угао $\angle BCA$, па је $\frac{\beta}{2} = -\frac{\alpha}{2} + \angle BCA$. Према томе, $\angle BCA = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$, па је $S_q \circ S_p = \mathcal{R}_{C, 2\angle BCA} = \mathcal{R}_{C, \alpha + \beta}$.

Напомена 12. Није тешко доказати да је $\mathcal{R}_{S, \varphi} = \mathcal{R}_{S, \varphi - 360^\circ}$. Према томе, у решењу претходног задатка, у случају да $\alpha + \beta \notin \{0^\circ, \pm 360^\circ\}$ важи да је $\mathcal{R}_{A, \alpha} \circ \mathcal{R}_{B, \beta} = \mathcal{R}_{C, \alpha + \beta}$ и ако су α, β исте оријентације и ако су α, β супротне оријентације.

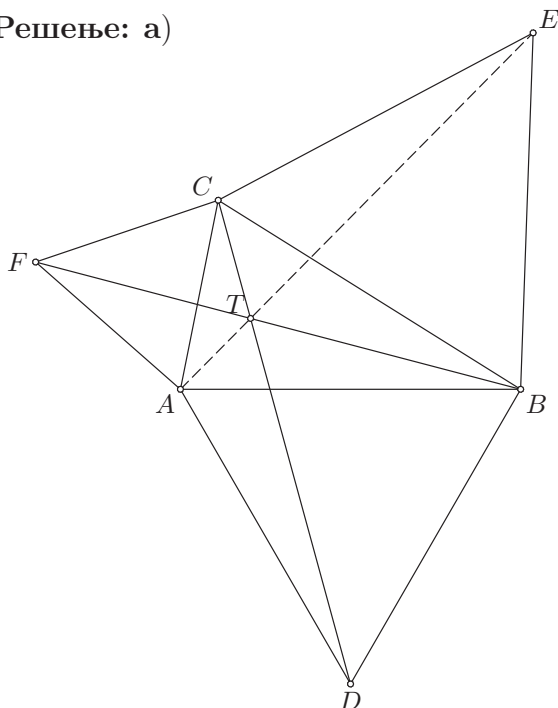
Напомена 13. Дакле, доказали смо да ако важи $\alpha + \beta \notin \{0^\circ, \pm 360^\circ\}$, композиција ротација $\mathcal{R}_{A, \alpha} \circ \mathcal{R}_{B, \beta}$ је ротација за угао $\alpha + \beta$, а ако важи $\alpha + \beta \in \{0^\circ, \pm 360^\circ\}$, онда је композиција ротација $\mathcal{R}_{A, \alpha} \circ \mathcal{R}_{B, \beta}$ транслација ако је $A \neq B$, односно коинциденција ако је $A = B$.

8. Над ивицама оштроуглог троугла ABC у спољашњости конструисани су правилни троуглови ADB , BEC , CFA .

а) (Торичелијева тачка) Доказати да су дужи AE , BF , CD међусобно подударне и да се секу у једној тачки.

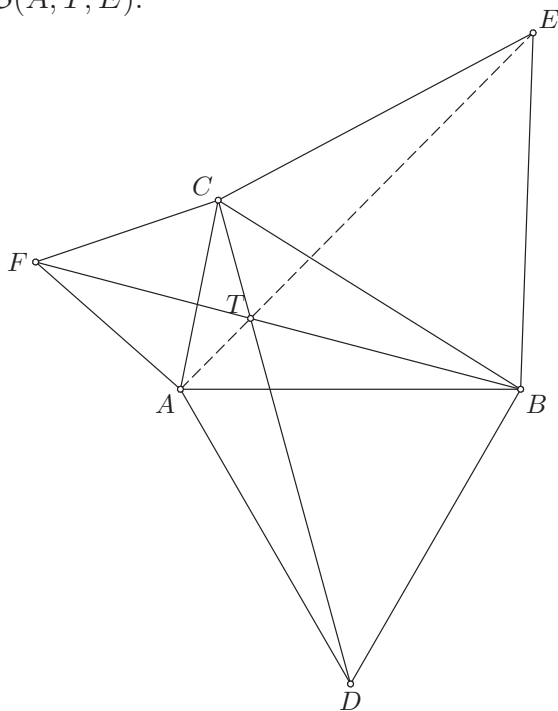
б) (Наполеонов троугао) Доказати да центри конструисаних троуглова чине темена правилног троугла.

Решење: а)



Приметимо да је $\mathcal{R}_{A,60^\circ}(D) = B$ и $\mathcal{R}_{A,60^\circ}(C) = F$. Према томе, следи да је $\mathcal{R}_{A,60^\circ}(DC) = BF$, што значи да се дуж DC слика у дуж BF , па су ове дужи подударне. Такође, права DC се слика у праву BF и угао између њих је 60° (сетимо се да је угао између праве и њене слике при ротацији за угао φ једнак управо φ). Нека је њихов пресек тачка T . Треба доказати да тачка T припада дужима DC , BF . Како је $\angle BAC < 90^\circ$, следи да је $\angle DAC = \angle DAB + \angle BAC < 60^\circ + 90^\circ < 180^\circ$, а како је и $\angle DAB = 60^\circ < 180^\circ$, онда важи $C, B \div DA$. Слично, $\angle DBC < 180^\circ$, а како је и $\angle DBA = 60^\circ < 180^\circ$, онда важи $C, A \div DB$. То значи да тачка C припада углу $\angle ADB$, па следи да полуправа DC сече дуж AB . Другим речима, $A, B \div CD$. То значи и да полуправа CD припада углу $\angle ACB$, па је $\angle DCA < \angle BCA < 90^\circ$ и $\angle DCF < 90^\circ + 60^\circ < 180^\circ$. Следи да важи $A, F \div CD$, а како важи $A, B \div CD$, онда важи $B, F \div CD$, односно права CD сече дуж BF . Сличним поступком се доказује и да важи $C, D \div BF$,

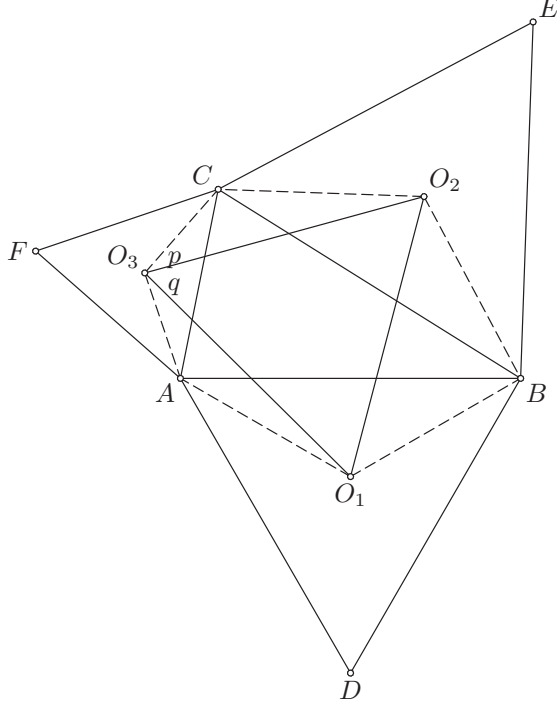
па права BF сече дуж CD . Овим је доказано да је тачка T у пресеку дужи CD, BF . Треба такође доказати да су тачке A, T, E колинеарне и да важи $\mathcal{B}(A, T, E)$. Пошто важи $\mathcal{B}(C, T, D)$, довољно је доказати да је $\angle ATD = \angle ETC$, јер ће тада то бити унакрсни углови, па ће важити $\mathcal{B}(A, T, E)$.



Због ротације важи $\angle DTB = 60^\circ$, па је $\angle BTC = 120^\circ$. Такође, важи $\angle DAB = 60^\circ$, па следи да су $\angle DTB$ и $\angle DAB$ периферијски углови над DB , тј. да је четвороугао $DBTA$ тетиван. Одавде следи да је $\angle ATD = \angle ABD = 60^\circ$. Поред тога, $\angle BEC = 60^\circ$, па је $\angle BTC + \angle BEC = 180^\circ$, па је и четвороугао $BECT$ тетиван. Одавде следи да је $\angle ETC = \angle EBC = 60^\circ$. Дакле, $\angle ATD = \angle ETC$, па следи да су то унакрсни углови, па важи $\mathcal{B}(A, T, E)$, тј. да тачка T припада дужи AE .

Остаје још да се докаже да је $AE = BF = CD$. Већ смо добили $BF = CD$, па остаје да се докаже да је, нпр, $AE = BF$. Међутим, то добијамо на сличан начин као и претходну једнакост. Пошто је $\mathcal{R}_{C,60^\circ}(F) = A$ и $\mathcal{R}_{C,60^\circ}(B) = E$, следи да је $\mathcal{R}_{C,60^\circ}(FB) = AE$, па су и те дужи једнаке, што је и требало доказати.

б)



Означимо центре троуглова $\triangle ADB, \triangle BEC, \triangle CFA$ редом са O_1, O_2, O_3 . Посматрајмо изометрију $\mathfrak{I} = \mathcal{R}_{O_3, 120^\circ} \circ \mathcal{R}_{O_1, 120^\circ} \circ \mathcal{R}_{O_2, 120^\circ}$. Она је директна, јер је композиција трију директних изометрија. На основу напомене 13, важи $\mathcal{R}_{O_1, 120^\circ} \circ \mathcal{R}_{O_2, 120^\circ} = \mathcal{R}_{S, 120^\circ + 120^\circ} = \mathcal{R}_{S, 240^\circ}$, за неку тачку S . На основу напомене 12, важи $\mathcal{R}_{S, 240^\circ} = \mathcal{R}_{S, 240^\circ - 360^\circ} = \mathcal{R}_{S, -120^\circ}$. Према томе, $\mathfrak{I} = \mathcal{R}_{O_3, 120^\circ} \circ \mathcal{R}_{S, -120^\circ}$. Како је $120^\circ + (-120^\circ) = 0^\circ$, изометрија $\mathfrak{I}$ мора бити коинциденција или транслација. Пошто је

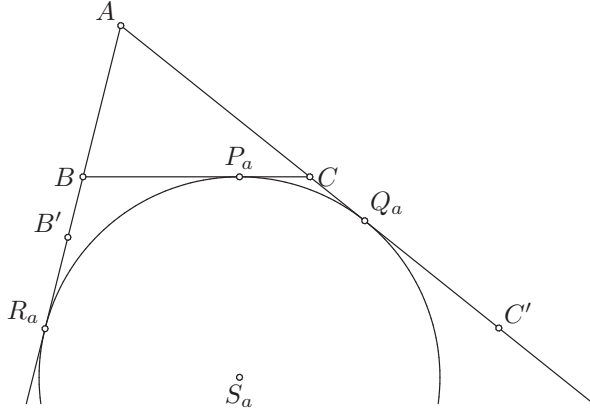
$$\begin{aligned}\mathfrak{I}(C) &= \mathcal{R}_{O_3, 120^\circ} \circ \mathcal{R}_{O_1, 120^\circ} \circ \mathcal{R}_{O_2, 120^\circ}(C) = \mathcal{R}_{O_3, 120^\circ} \circ \mathcal{R}_{O_1, 120^\circ}(B) \\ &= \mathcal{R}_{O_3, 120^\circ}(A) = C,\end{aligned}$$

слиди да изометрија $\mathfrak{I}$ има фиксну тачку, па не може бити транслација. Дакле, $\mathfrak{I} = \mathcal{E}$. То значи да је $\mathcal{R}_{O_1, 120^\circ} \circ \mathcal{R}_{O_2, 120^\circ} = \mathcal{R}_{O_3, 120^\circ}^{-1} = \mathcal{R}_{O_3, -120^\circ}$. Нека је p права која садржи тачку O_2 и гради оријентисани угао $\frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$ с правом O_1O_2 и нека је q права која садржи тачку O_1 таква да права O_1O_2 гради оријентисани угао $\frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$ са правом q . Тада је $\mathcal{R}_{O_3, -120^\circ} = \mathcal{R}_{O_1, 120^\circ} \circ \mathcal{R}_{O_2, 120^\circ} = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$. Следи да тачка O_3 припада правима p, q , па је $\angle O_3O_2O_1 = 60^\circ$ и $\angle O_2O_1O_3 = 60^\circ$. Дакле, троугао $\triangle O_1O_2O_3$ има два угла од 60° , па је он једнакостраничан троугао, што је и требало доказати.

Дефиниција 33. Тачка T из претходног задатка назива се *Торичелијева тачка*. Троугао $\triangle O_1O_2O_3$ назива се *Наполеонов троугао*.

9. Нека је у равни $\mathbb{E}^2$ дат троугао ABC и нека су B', C' тачке правих AB и AC такве да важи $\mathcal{B}(A, B, B')$ и $\mathcal{B}(A, C, C')$. Ако је P_a тачка у којој споља уписани круг који одговара темену A додирује страницу BC тог троугла, доказати да је $\mathcal{R}_{C, \angle C'CB} \circ \mathcal{R}_{A, \angle BAC} \circ \mathcal{R}_{B, \angle CBB'} = \mathcal{S}_{P_a}$.

Решење:



Нека је $\mathfrak{I} = \mathcal{R}_{C, \angle C'CB} \circ \mathcal{R}_{A, \angle BAC} \circ \mathcal{R}_{B, \angle CBB'}$. Видимо да је $\mathfrak{I}$ директна изометрија, јер је композиција трију директних изометрија. Да бисмо доказали да је $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_{P_a}$, докажимо најпре да је P_a фиксна тачка изометрије $\mathfrak{I}$. Нека су Q_a, R_a тачке из Великог задатка. Тангентне дужи BP_a, BR_a су једнаке и важи $\angle P_a B R_a = \angle C B B'$ (оријентисани углови). Слично, важи и $AR_a = AQ_a$ и $\angle R_a A Q_a = \angle B A C$, као и $CQ_a = CP_a$ и $\angle Q_a C P_a = \angle C' C B$. Дакле,

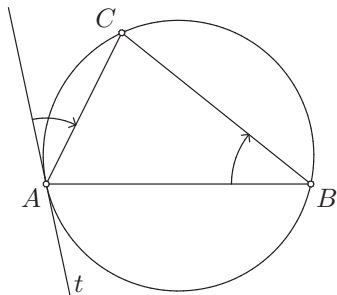
$$\begin{aligned} \mathfrak{I}(P_a) &= \mathcal{R}_{C, \angle C'CB} \circ \mathcal{R}_{A, \angle BAC} \circ \mathcal{R}_{B, \angle CBB'}(P_a) = \mathcal{R}_{C, \angle C'CB} \circ \mathcal{R}_{A, \angle BAC}(R_a) \\ &= \mathcal{R}_{C, \angle C'CB}(Q_a) = P_a, \end{aligned}$$

па следи да је P_a фиксна тачка. Дакле, $\mathfrak{I}$ није транслација, па је коинциденција или ротација око тачке P_a . Означимо $\alpha = \angle BAC, \beta = \angle CBA, \gamma = \angle ACB$ (мисли се на оријентисане углове). Пошто су (оријентисани) углови $\angle CBA$ и $\angle CBB'$ напоредни и супротно оријентисани, следи да је $\angle CBA + (-\angle CBB') = 180^\circ$, тј. да је $\angle CBB' = \angle CBA - 180^\circ = \beta - 180^\circ$. Слично, пошто су (оријентисани) углови $\angle ACB$ и $\angle C'CB$ напоредни и супротно оријентисани, следи да је $\angle ACB + (-\angle C'CB) = 180^\circ$, па је $\angle C'CB = \angle ACB - 180^\circ = \gamma - 180^\circ$.

Како је $\angle BAC + \angle CBB' = \alpha + \beta - 180^\circ \notin \{0^\circ, \pm 360^\circ\}$, на основу напомене 13 следи да је $\mathcal{R}_{A, \angle BAC} \circ \mathcal{R}_{B, \angle CBB'} = \mathcal{R}_{M, \alpha + \beta - 180^\circ}$, за неку тачку M . Оријентисани углови α, β, γ су исте оријентације, па је $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. Како је $\alpha + \beta - 180^\circ + \angle C'CB = \alpha + \beta - 180^\circ + \gamma - 180^\circ = \alpha + \beta + \gamma - 360^\circ = 180^\circ - 360^\circ = -180^\circ \notin \{0^\circ, \pm 360^\circ\}$, на основу напомене 13 следи да је $\mathfrak{I} = \mathcal{R}_{C, \angle C'CB} \circ \mathcal{R}_{M, \alpha + \beta - 180^\circ} = \mathcal{R}_{P_a, -180^\circ} = \mathcal{S}_{P_a}^{-1} = \mathcal{S}_{P_a}$.

10. Нека је t тангента описаног круга троугла ABC у темену A . Доказати да важи $\mathcal{G}_{\overrightarrow{CA}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{S}_t$.

Решење:



Нека је $\mathfrak{I} = \mathcal{G}_{\overrightarrow{CA}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{AB}}$. Како је $\mathcal{G}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} \circ \mathcal{S}_{AB} = \mathcal{S}_{AB} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}}$, $\mathcal{G}_{\overrightarrow{BC}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{S}_{BC} = \mathcal{S}_{BC} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{BC}}$ и $\mathcal{G}_{\overrightarrow{CA}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{CA}} \circ \mathcal{S}_{CA} = \mathcal{S}_{CA} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{CA}}$, следи да је

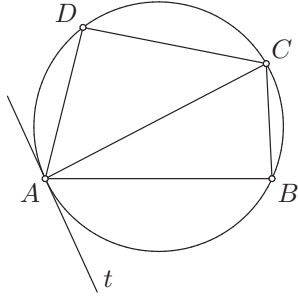
$$\begin{aligned}\mathfrak{I} &= \mathcal{S}_{CA} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{CA}} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{S}_{BC} \circ \mathcal{S}_{AB} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} \\ &= \mathcal{S}_{CA} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{BA}} \circ \mathcal{R}_{B, 2\angle ABC} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{BA}}^{-1}.\end{aligned}$$

Пошто је $\mathcal{T}_{\overrightarrow{BA}}$ директна изометрија и $\mathcal{T}_{\overrightarrow{BA}}(B) = A$, на основу теореме 17 (теореме о трансмутацији), следи да је $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_{CA} \circ \mathcal{R}_{A, 2\angle ABC}$. За тангенту t описаног круга троугла $\triangle ABC$ у тачки A важи да је оријентисани угао од праве t ка тетиви AC подударан периферијском углу над том тетивом, што је угао $\angle ABC$, као и да су исте оријентације. Према томе, важи $\mathcal{R}_{A, 2\angle ABC} = \mathcal{S}_{AC} \circ \mathcal{S}_t$, па је $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_{CA} \circ \mathcal{S}_{AC} \circ \mathcal{S}_t = \mathcal{S}_t$, што је и требало доказати.

11. Доказати да је четвороугао $ABCD$ тетиван ако и само ако важи $\mathcal{G}_{\overrightarrow{DA}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{CD}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{E}$.

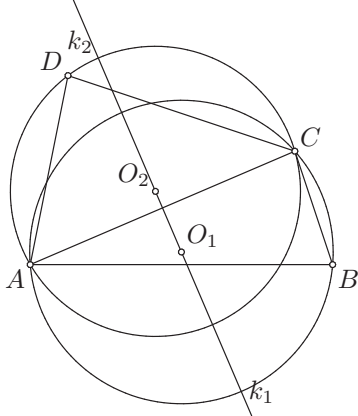
Решење: Нека је $\mathfrak{I} = \mathcal{G}_{\overrightarrow{DA}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{CD}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{AB}}$. Додавање коинциденције $\mathcal{E}$ (идентичког пресликавања) у композицију не мења њену вредност, па је $\mathfrak{I} = \mathcal{G}_{\overrightarrow{DA}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{CD}} \circ \mathcal{E} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{G}_{\overrightarrow{DA}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{CD}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{AC}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{CA}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{AB}}$.

$\Rightarrow$:



Нека је $ABCD$ тетиван четвороугао, k његов описани круг и t тангента круга k у тачки A . Круг k је описани круг троугла $\triangle ABC$, па је, на основу претходног задатка, $\mathcal{G}_{\overrightarrow{CA}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{S}_t$. Такође, круг k је описани круг и троугла $\triangle ACD$, па је, на основу претходног задатка, $\mathcal{G}_{\overrightarrow{DA}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{CD}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{AC}} = \mathcal{S}_t$. Према томе, $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_t \circ \mathcal{S}_t = \mathcal{E}$.

$\Leftarrow$:



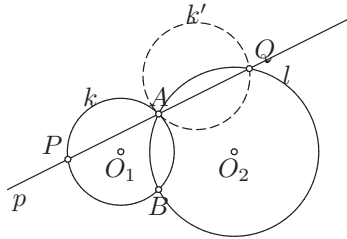
Нека је $\mathfrak{I} = \mathcal{E}$. Нека су k_1, k_2 редом описани кругови троуглова $\triangle ABC, \triangle ACD$, нека су O_1, O_2 редом њихови центри и нека су t_1, t_2 редом тангенте кругова k_1, k_2 у тачки A . Оба круга садрже тачке A, C , па следи да се O_1, O_2 налазе на медијатриси дужи AC . На основу претходног задатка имамо да је $\mathcal{G}_{\overrightarrow{CA}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{S}_{t_1}$ и $\mathcal{G}_{\overrightarrow{DA}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{CD}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{AC}} = \mathcal{S}_{t_2}$. Пошто је $\mathcal{E} = \mathfrak{I} = \mathcal{S}_{t_2} \circ \mathcal{S}_{t_1}$, следи да је $\mathcal{S}_{t_2} = \mathcal{S}_{t_1}^{-1} = \mathcal{S}_{t_1}$, па је $t_1 = t_2$, тј. тангенте t_1, t_2 се поклапају. Следи да се центри ових кругова налазе на правој n која је нормална на t_1 у тачки A . Медијатриса дужи AC и права n се разликују, јер A припада правој n , а не припада медијатриси дужи AC .

Дакле, центри O_1, O_2 се налазе на n и на медијатриси дужи AC , па како две разне праве имају највише једну заједничку тачку, следи да се O_1, O_2 поклапају. Према томе, кругови k_1, k_2 имају исти центар и оба садрже тачку A , па се и они поклапају. Следи да је четвороугао $ABCD$ тетиван.

12. Дата су два круга који имају пресечну тачку A . Конструисати праву која садржи A и на којој дати кругови одсецају подударне дужи.

Решење:

Анализа: Нека је p права која испуњава услове задатка, тј. права која садржи тачку A и на којој дати кругови k, l одсецају подударне дужи.



Нека су P, Q редом пресечне тачке кругова k, l са правом p , различите од тачке A . Тада је $AP = AQ$. Ако се тачке P, Q поклапају, онда оне представљају другу пресечну тачку кругова k, l . Ако се тачке P, Q разликују, онда је A средиште дужи PQ , што значи да је $\mathcal{S}_A(P) = Q$. Посматрајмо круг $k' = \mathcal{S}_A(k)$. Пошто $P \in k$, следи да $Q = \mathcal{S}_A(P) \in k'$, па је Q пресечна тачка кругова k', l , различита од тачке A . Права p је истоветна с правом AQ .

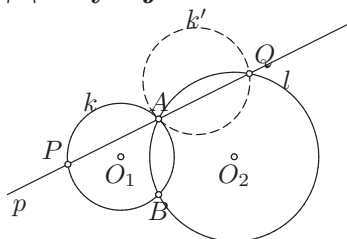
Конструкција: Ако се кругови k, l секу у тачкама A, B , конструишимо праву AB .

Конструишимо круг $k' = \mathcal{S}_A(k)$ и означимо са Q пресечну тачку кругова k', l , различиту од тачке A . Конструишимо праву $p = AQ$.

Доказ: Ако се кругови k, l секу у тачкама A, B , кругови k, l одсецају дуж AB на правој AB , па одсецају подударне дужи на правој AB .

Нека је $P = \mathcal{S}_A(Q)$. Тада је P пресечна тачка праве p и круга k , различита од тачке A . Заиста, тачка P припада правој AQ (тј. правој p) и припада кругу k (јер је ПК $k' = \mathcal{S}_A(k)$, па је $\mathcal{S}_A(k') = k$). Пошто је Q различита од A , онда је и P различита од A , па следи да је P пресечна тачка праве p и круга k , различита од тачке A . Како је $P = \mathcal{S}_A(Q)$, важи $AP = AQ$, па кругови k, l одсецају подударне дужи на правој p .

Дискусија:



Ако се кругови k, l секу у тачкама A, B , онда је права AB једно од решења.

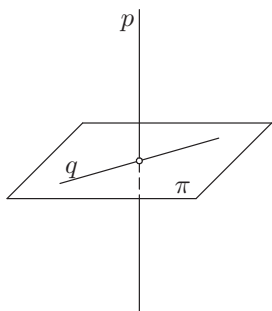
Кругови k', l имају заједничку тачку A . Ако се они поклапају, што се дешава у случају да се k, l додирују споља у тачки A и имају исте полупречнике, постоји бесконачно много решења. Ако се кругови k', l секу у двема тачкама A, Q , постоји јединствена права $p = AQ$. Тада се и кругови k, l секу (у тачкама A, B), па постоје два решења (друго решење је права AB). Ако сем тачке A кругови k', l немају заједничких тачака, задатак нема решења.

Према томе, закључак је следећи. Ако се кругови k, l секу у двема тачкама, постоје два решења. Ако се кругови k, l додирују у тачки A , решење постоји ако и само ако се кругови k, l додирују споља и имају исте полупречнике и онда има бесконачно много решења.

6 Стереометрија

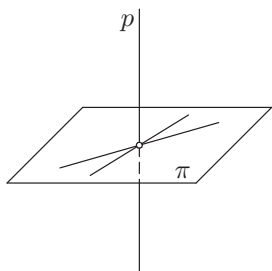
У овој области од интереса нам је еуклидска геометрија у простору. Подсетимо се појмова нормалности правих и равни, диједра, нормалности равни, триедра и мимоилазних правих, као и тврђења везаних за њих.

Дефиниција 34. Нека је π раван и p права која продире ту раван. Кажемо да је права p *управна* (*нормална*, *ортогонална*) на равни π (и обратно), у ознаци $p \perp \pi$ и $\pi \perp p$, ако је управна на свакој правој q равни π која садржи продорну тачку праве p и равни π .



Услов из дефиниције обично није погодан за проверу. Зато користимо следећу теорему.

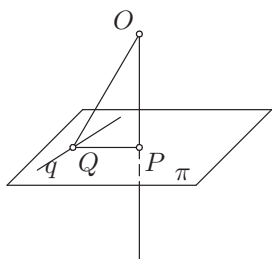
Теорема 22 (Коши). *Нека је π раван и p права која продире кроз раван. Ако је права p управна на два различита права равни π које садрже продорну тачку праве p и равни π , онда је права p управна на равни π .*



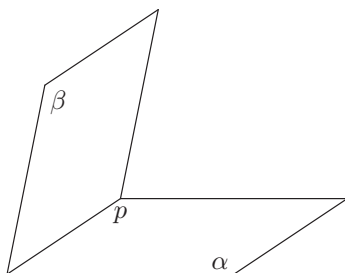
Теорема 23. *Нека је A тачка и π раван. Тада постоји јединствена права n која садржи тачку A и управна је на равни π .*

Теорема 24. *Нека је A тачка и p права. Тада постоји јединствена раван π која садржи тачку A и управна је на правој p .*

Теорема 25 (О трима нормалама). *Ако је права p нормала из тачке O на равни π и продире је у тачки P , а Q погодног нормале из P на правој $q \subset \pi$, тада је $OQ \perp q$.*

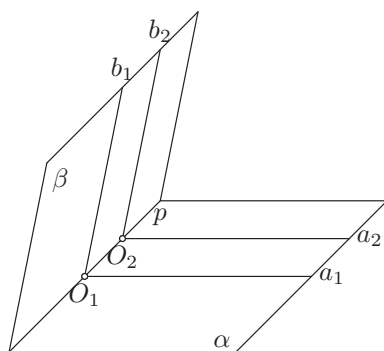


Дефиниција 35. *Диедарска површ $\angle \alpha \beta$ јесте унија полуравни $p\alpha$ и $p\beta$ са заједничким рубом p . Ове полуравни називамо *љоснима* или *сиранима* те диедарске површи, а праву p њеном *ивицом*.*



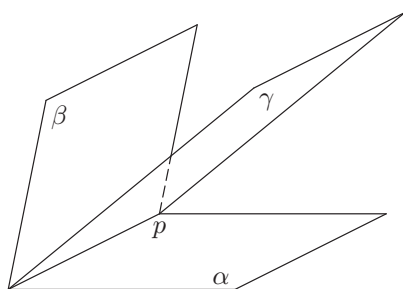
Као што угаона линија разлаже раван којој припада на две области, тако и диедарска површ разлаже простор на две области. Унију диедарске површи и неке од тих области називамо *диедром*. Један од диедара је увек конвексан (представља пресек двају полупростора чији су рубови равни које садрже пљосни диедарске површи) и означавамо га са $\angle \alpha p \beta$.

Теорема 26. Нека је $\angle \alpha p \beta$ диедарска површ и нека су γ_1, γ_2 равни које су управне на ивици p те диедарске површи. Тада те равни секу диедарску површ по угаоним линијама $\angle a_1 O_1 b_1, \angle a_2 O_2 b_2$ таквим да су улови $\angle a_1 O_1 b_1, \angle a_2 O_2 b_2$ међусобно подударни.



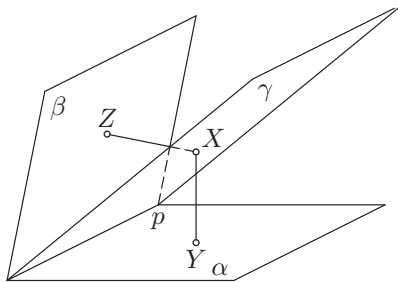
Дефиниција 36. Сваки од углова из претходне теореме назива се *нагибним углом* диедра.

Није тешко приметити да су два диедра међусобно подударна ако и само ако су такви и њихови нагибни углови.



Дефиниција 37. Нека је $\angle \alpha p \beta$ диедар. Полураван $p\gamma$ с рубом p , која припада диедру $\angle \alpha p \beta$ и дели га на два међусобно подударна диедра $\angle \alpha p \gamma, \angle \gamma p \beta$, назива се *симетралном полуравни* диедра $\angle \alpha p \beta$.

Теорема 27. Нека је $\angle \alpha p \beta$ диедар. Тада је симетрална полураван диедра $\angle \alpha p \beta$ скуп свих тачака X простора које припадају диедру $\angle \alpha p \beta$ такве да је $XY = XZ$, где је Y подножје управне из X на полуравни $p\alpha$, а Z подножје управне из X на полуравни $p\beta$.

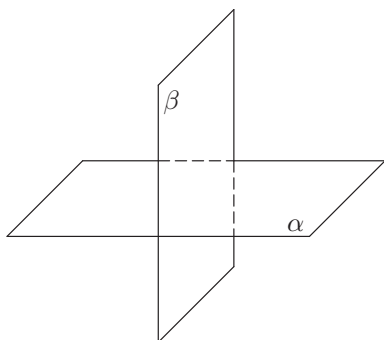


Дакле, симетрална полураван диедра је уопштење бисектрисе угла.

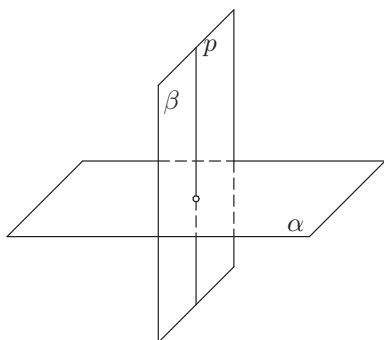
Дефиниција 38. Диедар је *прав* ако је његов нагибни угао прав.

Сличне дефиниције имамо за оштар и туп диедар.

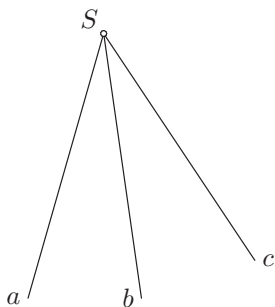
Дефиниција 39. Равни α, β су међусобно *управне* (нормалне, ортогоналне), у ознаци $\alpha \perp \beta$, ако садрже плосни правоугли диедра.



Теорема 28. Нека је α раван и p права управна на равни α . Тада је свака раван β , која садржи праву p , управна на равни α .

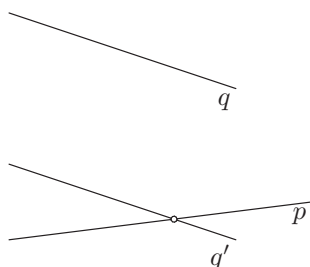


Дефиниција 40. Нека су Sa, Sb, Sc три полуправе у простору са заједничким теменом S , које не припадају истој равни. Тада скуп тачака $\angle aSb \cup \angle bSc \cup \angle cSa$ називамо *триедарском површи*. Тачку S називамо *теменом* тог триедра, полуправе Sa, Sb, Sc његовим *ивицама*, а углове $\angle aSb, \angle bSc, \angle cSa$ његовим *плоснима* или *сјранама*.



Може се доказати да триедарска површ разлаже простор на две области, једна од којих је *унутрашњост*, а друга *свољашњост* триедарске површи. Унија триедарске површи и њене унутрашњости назива се *триедром*.

Дефиниција 41. Праве p, q називамо *мимоилазним* правима ако не постоји раван која их садржи.



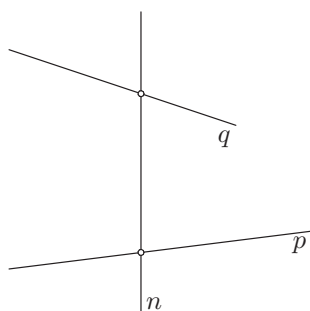
Мимоилазне праве немају заједничких тачака, јер би у супротном постојала раван која их садржи. Мимоилазне праве нису ни паралелне, јер паралелне праве припадају једној равни. Углом између мимоилазних правих p, q сматрамо угао између било којих двеју правих p', q' које се секу, таквих да је $p' \parallel p$ и $q' \parallel q$. Према томе, можемо извести следећи закључак.

Теорема 29. Ако је права n ујавна на равни π , онда је она ујавна на свакој правој те равни.

Теорема 30. Ако је права n ујавна на двема непаралелним правима равни π , онда је права n ујавна на равни π .

Заиста, ако је права n управна на двама непаралелним правима p, q равни π , тада је она управна на правима p', q' равни π , које садрже продорну тачку праве n и равни π и паралелне су правима p, q , а пошто праве p, q нису паралелне, онда су праве p', q' различите, па тврђење следи на основу Кошијеве теореме.

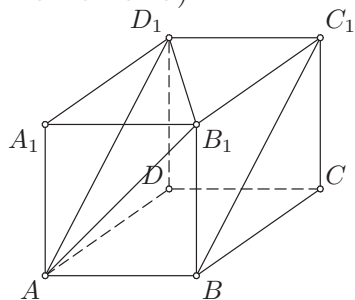
Теорема 31. Нека су p, q мимоилазне праве. Тада постоји јединствена права n која сече праве p, q и управна је на њима.



1. Дата је коцка $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

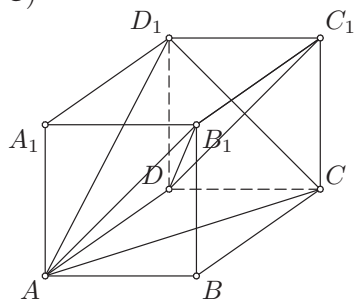
- Одредити угао између правих AB_1 и BC_1 .
- Одредити угао између равни ACD_1 и $AB_1 C_1 D$.
- Доказати да је раван $B_1 C D_1$ нормална на дуж AC_1 и дели је у размери $2 : 1$.

Решење: а)



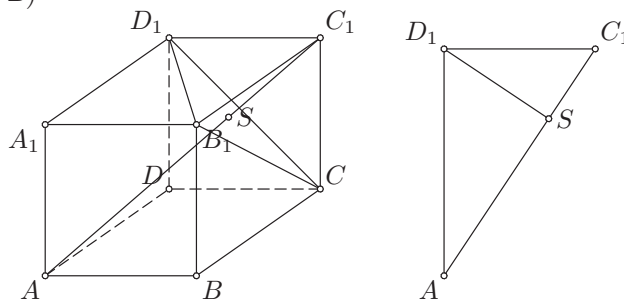
Праве AB_1 и BC_1 су мимоилазне. Како је $AD_1 \parallel BC_1$, следи да је угао између мимоилазних правих AB_1, BC_1 једнак углу између правих AB_1, AD_1 . Троугао $\triangle AB_1 D_1$ је једнакостраничан, јер су његове ивице међусобно подударне (све три су подударне дијагонали квадрата, који представља страну коцке), па је $\angle B_1 A D_1 = 60^\circ$.

б)



Желимо да одредимо угао између равни ACD_1 и AB_1C_1D . Делује да је права CD_1 управна на равни AB_1C_1D . Заиста, права CD_1 је управна на правој C_1D (дијагонала квадрата CC_1D_1D), а права B_1C_1 је управна на равни CC_1D_1D , па је управна на правој CD_1 . Дакле, $CD_1 \perp C_1D$ и $CD_1 \perp B_1C_1$, па је $CD_1 \perp AB_1C_1D$. Одавде следи да је $ACD_1 \perp AB_1C_1D$, јер раван ACD_1 садржи праву CD_1 која је управна на равни AB_1C_1D .

в)



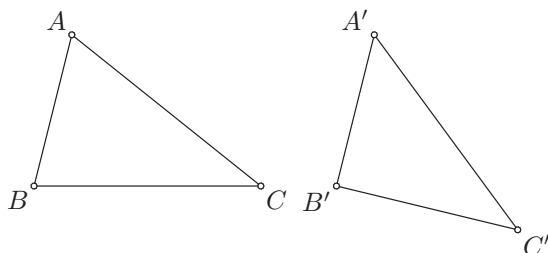
Докажимо прво да је раван B_1CD_1 нормална на дуж AC_1 . Из доказа претходног дела овог задатка следи да је права CD_1 управна на равни AB_1C_1D , па је управна на правој AC_1 . Дакле, $AC_1 \perp CD_1$. Такође, права B_1D_1 је управна на равни ACC_1A_1 . Заиста, $B_1D_1 \perp A_1C_1$ (дијагонала квадрата $A_1B_1C_1D_1$), а пошто је $CC_1 \perp A_1B_1C_1D_1$, следи да је $CC_1 \perp B_1D_1$. Дакле, $B_1D_1 \perp ACC_1A_1$, па следи да је $AC_1 \perp B_1D_1$. Према томе, из $AC_1 \perp CD_1$ и $AC_1 \perp B_1D_1$ следи да је $AC_1 \perp B_1CD_1$.

Означимо продорну тачку праве AC_1 и равни B_1CD_1 са S . Троугао $\triangle AC_1D_1$ је правоугли с правим углом код темена D_1 , јер је права C_1D_1 управна на равни AA_1D_1D , па је управна и на правој AD_1 . Права D_1S припада равни B_1CD_1 , па следи да је $AC_1 \perp D_1S$, тј. да је D_1S висина правоуглог троугла $\triangle AC_1D_1$. Како је $\angle ASD_1 = 90^\circ = \angle D_1SC_1$ и $\angle SAD_1$ и $\angle SD_1C_1$ имају нормалне краке, па су подударни, следи да су троуглови $\triangle ASD_1$ и $\triangle D_1SC_1$ слични. Дакле, $\frac{AS}{D_1S} = \frac{SD_1}{SC_1} = \frac{AD_1}{D_1C_1}$. Ако је a ивица коцке, онда је $AD_1 = a\sqrt{2}$ и $D_1C_1 = a$, па је $\frac{AS}{D_1S} = \frac{SD_1}{SC_1} = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}$. Следи да је $\frac{AS}{SC_1} = \frac{AS}{D_1S} \cdot \frac{SD_1}{SC_1} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$, тј. $AS : SC_1 = 2 : 1$, што је и

требало доказати.

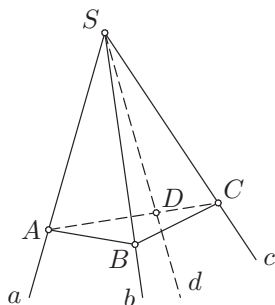
За решавање наредног задатка, потребан је следећи став.

Став 5. Нека су $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$ троуглови такви да је $AB = A'B'$ и $AC = A'C'$. Тада је $BC > B'C'$ ако и само ако је $\angle BAC > \angle B'A'C'$.



2. Збир два угла при врху триедра већи је од трећег. Доказати.

Решење:

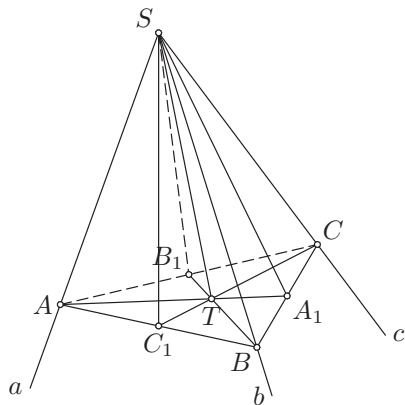


Нека је $Sabc$ триедар. Треба доказати да је $\angle aSb + \angle bSc > \angle aSc$. Ако је $\angle bSc \geq \angle aSc$ неједнакост је тривијално испуњена. Претпоставимо зато да је $\angle bSc < \angle aSc$ и нека је Sd полуправа која припада углу $\angle aSc$ таква да је $\angle dSc = \angle bSc$. Нека су B, C произвољне тачке полуправих Sb, Sc редом, различите од тачке S . Нека је D тачка полуправе Sd таква да је $SD = SB$ и нека је A пресечна тачка полуправе Sa и праве CD . Троуглови $\triangle SCB$ и $\triangle SCD$ су подударни, јер је $SC = SC$, $\angle CSD = \angle CSB$ и $SD = SB$. Следи да је $CD = CB$. Из једнакости $AC = AD + DC$, неједнакости троугла $AC < AB + BC$ и претходно добијене једнакости $DC = BC$ следи да је $AD < AB$. Троуглови $\triangle SAB$ и $\triangle SAD$ имају подударне ивице са заједничким теменом S ($SA = SA$ и $SB = SD$), па пошто је $AB > AD$, на основу става 5 следи да је $\angle ASB > \angle ASD$. Према томе, добијамо да важи

$$\angle aSb + \angle bSc = \angle ASB + \angle BSC > \angle ASD + \angle DSC = \angle ASC = \angle aSc.$$

3. Равни од којих је свака одређена ивицом и симетралом наспрамне стране триедра имају заједничку праву. Доказати.

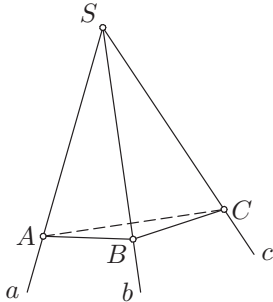
Решење:



Нека је $Sabc$ триедар. Нека A произвољна тачка полуправе Sa , која је различита од тачке S и нека су B, C редом тачке полуправих Sb, Sc такве да је $SB = SC = SA$. Тада су троуглови $\triangle SAB, \triangle SBC, \triangle SAC$ једнакокраки. Ако су C_1, A_1, B_1 редом средишта дужи AB, BC, AC , онда су полуправе SC_1, SA_1, SB_1 бисектрисе углова $\angle ASB, \angle BSC, \angle ASC$, односно страна триедра $Sabc$. Према томе, равни које садрже ивицу триедра и симетралу наспрамне стране јесу равни SAA_1, SBB_1, SCC_1 . С обзиром на то да су AA_1, BB_1, CC_1 тежишне дужи троугла $\triangle ABC$, следи да се секу у једној тачки и означимо ту тачку са T . Према томе, равни SAA_1, SBB_1, SCC_1 садрже тачке S, T , па стога садрже и праву ST . Дакле, права ST је заједничка за све три равни, што је и требало доказати.

4. Нека су углови при врху триедра једнаки редом $60^\circ, 45^\circ, 45^\circ$. Доказати да је диедар наспрам највеће стране прав.

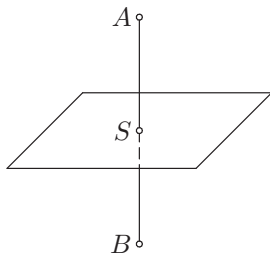
Решење:



Нека је $Sabc$ триедар такав да је $\angle aSb = \angle bSc = 45^\circ$ и $\angle aSc = 60^\circ$. Треба доказати да је диедар овог триедра, чија ивица садржи полуправу Sb и чије су плосни полуравни које садрже стране $\angle aSb$ и $\angle bSc$ тог триедра, прав диедар. Нека је B произвољна тачка полуправе Sb , различита од тачке S и нека су тачке A, C редом пресечне тачке полуправих Sa, Sc са равни која је у тачки B управна на полуправој Sb . Тада је $\angle ABC$ нагибни угао посматраног диедра, па треба доказати да је $\angle ABC = 90^\circ$.

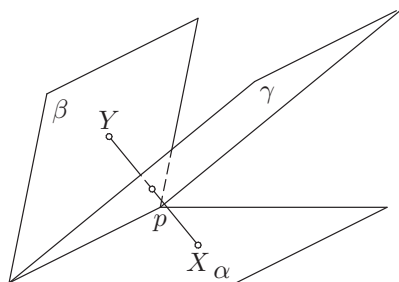
Означимо $SB = x$. Троуглови $\triangle SBA, \triangle SBC$ су једнакокрако правоугли, јер им је један од оштрих углова 45° , па следи да је $BA = BC = x$ и $SA = SC = x\sqrt{2}$. Троугао $\triangle SAC$ је једнакостраничан, јер је $SA = SC$ и $\angle ASC = 60^\circ$. Следи да је и $AC = x\sqrt{2}$, па су стране троугла $\triangle ABC$ редом $AB = x, BC = x, AC = x\sqrt{2}$. Одавде следи да је у питању правоугли троугао, тј. да је $\angle ABC = 90^\circ$.

Дефиниција 42. Нека је AB дуж. Раван која садржи средиште S дужи AB и управна је на правој AB назива се *медијалном равни* или *симетралном равни* дужи AB .



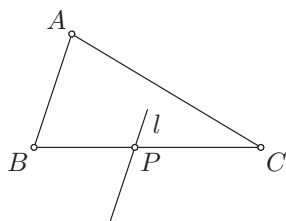
Теорема 32. Нека је AB дуж. Скуп свих тачака X у простору таквих да важи $XA = XB$ јесте медијална раван дужи AB .

Теорема 33. Нека је $\angle \alpha \rho \beta$ диедарска површ и нека је $p\gamma$ полураван с рубом p . Тада полураван $p\gamma$ припада диедру $\angle \alpha \rho \beta$ ако и само ако за сваке две тачке X, Y које припадају пловнима $p\alpha, p\beta$ тог диедра важи да $p\gamma$ сече дуж XY .



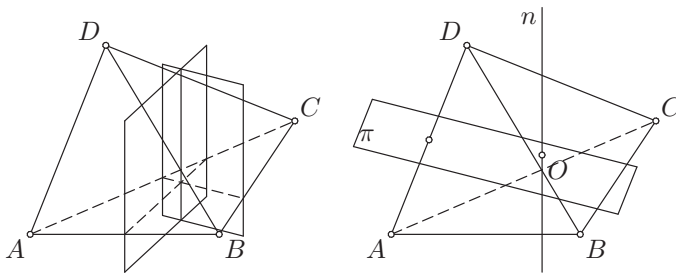
За решење наредног задатка користи се и Папова аксиома.

Аксиома (Паш). Нека су A, B, C три неколинеарне тачке и l права равни ABC која не садржи тачку A и сече праву BC у тачки P таквој да важи $\mathcal{B}(B, P, C)$. Тада она сече праву CA у тачки Q таквој да важи $\mathcal{B}(C, Q, A)$ или сече праву AB у тачки R таквој да важи $\mathcal{B}(A, R, B)$.

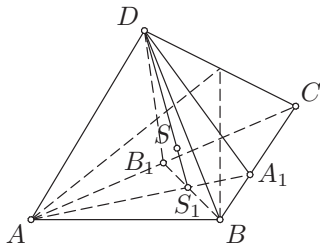


5. Доказати да се око сваког тетраедра може описати сфера, као и да се у сваки тетраедар може уписати сфера.

Решење:



Нека је $ABCD$ тетраедар. Потребно је доказати да постоји тачка O таква да је $OA = OB = OC = OD$. На основу теореме 32, та тачка мора припадати медијалним равнима ивица AB, BC, AC, AD, BD, CD тетраедра $ABCD$. За почетак, докажимо да се медијалне равни ивица AB, AC секу. Ако се оне не би секле, биле би паралелне, па би онда праве AB, AC биле паралелне, јер су управне на паралелним равнима. Тада би тачке A, B, C биле колинеарне, што није могуће. Дакле, медијалне равни ивица AB, AC секу се по правој n . За сваку тачку X праве n важи $XA = XB$ и $XA = XC$, па следи да права n припада и медијалној равни ивице BC . На правој n треба пронаћи тачку O такву да је $OA = OD$, тј. треба проверити да ли се медијална равна π ивице AD и права n секу. Ако то не би био случај, онда би права n и равна π биле паралелне. У равни π би онда постојала права n' паралелна правој n , па пошто је $\pi \perp AD$, било би $n' \perp AD$, па и $n \perp AD$. Све праве које садрже тачку A и управне су на правој n припадају равни која садржи тачку A и управна је на правој n , што је равна ABC . Према томе, следило би да права AD припада равни ABC , тј. да су тачке A, B, C, D компланарне, што није тачно. Дакле, равна π и права n се секу у тачки O . Пошто тачка O припада равни π , следи да је $OA = OD$, а пошто припада правој n , следи да је $OA = OB = OC$, па следи да је тачка O центар описане сфере.



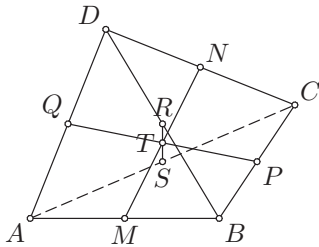
Центар уписане сфере је тачка S таква да је $SA' = SB' = SC' = SD'$, где су A', B', C', D' редом подножја управних из тачке S на странама BCD, ACD, ABD, ABC тетраедра $ABCD$. На основу теореме 27, таква тачка припада симетралним полуравнима диедара које чине стране тог тетраедра, па је довољно доказати да оне имају заједничку тачку. Симетрална полураван диедра чија је ивица AD и симетрална полураван диедра чија је ивица BD имају заједничку тачку D , па се секу по полуправој Dn . За сваку тачку X полуправе Dn важи $XC' = XB'$ и $XC' = XA'$, где су C', B', A' редом подножја управних из X на странама ABD, ACD, BCD тетраедра $ABCD$, па следи да полуправа Dn припада и симетралној полуравни диедра чија је ивица CD . Штавише, полуправа Dn продире раван ABC у тачки која припада унутрашњости троугла $\triangle ABC$. Заиста, на основу теореме 33, симетрална полураван диедра чија је ивица AD сече ивицу BC тетраедра $ABCD$, јер тачка B припада једној пљосни, а тачка C другој пљосни тог диедра. Означимо ту пресечну тачку са A_1 . Слично, симетрална полураван диедра чија је ивица BD сече ивицу AC тетраедра $ABCD$, јер тачка A припада једној пљосни, а тачка C другој пљосни тог диедра. Означимо ту пресечну тачку са B_1 . У равни ABC налазе се троугао $\triangle AA_1C$ и права BB_1 која сече праву AC у тачки B_1 таквој да важи $\mathcal{B}(A, B_1, C)$ и праву CA_1 у тачки B таквој да важи $\mathcal{B}(C, A_1, B)$. На основу Пашове аксиоме следи да се праве BB_1, AA_1 секу у тачки S_1 таквој да важи $\mathcal{B}(A, S_1, A_1)$. Слично, у равни ABC се налазе троугао $\triangle BB_1C$ и права AA_1 која сече праву BC у тачки A_1 таквој да важи $\mathcal{B}(B, A_1, C)$ и сече праву CB_1 у тачки A таквој да важи $\mathcal{B}(C, B_1, A)$. На основу Пашове аксиоме следи да се праве BB_1, AA_1 секу (тачка пресека је S_1) таквој да важи $\mathcal{B}(B, S_1, B_1)$. Дакле, тачка S_1 припада унутрашњости троугла $\triangle ABC$ и припада полуправима AA_1, BB_1 , па припада и симетралним полуравнима диедара чије су ивице AD, BD . Како је полуправа Dn пресек тих симетралних полуравни, следи да $S_1 \in Dn$. Уочимо симетралну раван диедра чија је ивица AB . Тачка D припада једној, а тачка S_1 припада другој пљосни тог диедра, па на основу теореме 33 следи да та симетрална полураван сече дуж DS_1 у тачки S . Пошто тачка S припада симетралној полуравни диедра чија је

ивица AB , следи да је $SD' = SC'$, где су D', C' редом подножја управних из тачке S на странама ABC, ABD , а пошто припада и полуправој Dn , важи $SA' = SB' = SC'$, где су A', B' редом подножја управних из тачке S на странама BCD, ACD , па следи да је тачка S центар уписане сфере тетраедра $ABCD$.

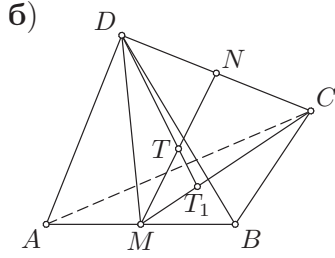
6. а) (Тежиште тетраедра) Дужи одређене средиштима наспрамних ивица тростране пирамиде (тетраедра) секу се у једној тачки која их полови. Доказати.

б) Доказати да тежиште тетраедра дели дужи одређене теменима и тежиштима наспрамних страна у односу $3 : 1$.

Решење: а)



Нека је $ABCD$ тетраедар и нека су M, N, P, Q, R, S редом средишта његових ивица AB, CD, BC, AD, BD, AC . Треба доказати да се дужи MN, PQ, RS секу у једној тачки која их све полови. Дуж MQ је средња линија троугла $\triangle ABD$, па следи да је $MQ \parallel BD$ и $MQ = \frac{1}{2}BD$. Слично, дуж PN је средња линија троугла $\triangle BCD$, па следи да је $PN \parallel BD$ и $PN = \frac{1}{2}BD$. Дакле, $MQ \parallel PN$ и $MQ = PN$, па закључујемо да су тачке M, P, N, Q компланарне и да је четвороугао $MPNQ$ паралелограм. Према томе, његове дијагонале MN, PQ имају заједничко средиште, које ћемо означити са T . Дуж PR је средња линија троугла $\triangle BCD$, па следи да је $PR \parallel CD$ и $PR = \frac{1}{2}CD$. Такође, дуж SQ је средња линија троугла $\triangle ACD$, па следи да је $SQ \parallel CD$ и $SQ = \frac{1}{2}CD$. Дакле, $PR \parallel SQ$ и $PR = SQ$, па закључујемо да су тачке P, R, Q, S компланарне и да је четвороугао $PRQS$ паралелограм. Према томе, његове дијагонале PQ, RS имају заједничко средиште. С обзиром на то да је тачка T средиште дужи PQ , а дуж има јединствено средиште, следи да је тачка T заједничко средиште дужи PQ, RS . Према томе, све три дужи имају заједничку тачку T која их полови, што је и требало доказати.



Нека је T_1 тежиште троугла $\triangle ABC$. Треба доказати да важи распоред $\mathcal{B}(D, T, T_1)$ и $DT : TT_1 = 3 : 1$. Уочимо раван MCD . Та раван садржи тачку N , јер је она средиште дужи CD , па садржи и тачку T , јер је она средиште дужи MN . Такође, та раван садржи тачку T_1 јер она припада тежишној дужи CM троугла $\triangle ABC$. Да бисмо доказали колинеарност тачака D, T, T_1 , применимо Менелајеву теорему на троугао $\triangle MCN$. Пошто је $\frac{\overrightarrow{MT_1}}{\overrightarrow{T_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CN}}{\overrightarrow{DN}} \cdot \frac{\overrightarrow{NT}}{\overrightarrow{TM}} = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{2}{1}\right) \cdot \frac{1}{1} = -1$, следи да су тачке D, T, T_1 колинеарне. Применимо поново Менелајеву теорему, али сада на троугао $\triangle DT_1C$ и колинеарне тачке M, T, N . Следи да је

$$-1 = \frac{\overrightarrow{DT}}{\overrightarrow{TT_1}} \cdot \frac{\overrightarrow{T_1M}}{\overrightarrow{MC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CN}}{\overrightarrow{ND}} = \frac{\overrightarrow{DT}}{\overrightarrow{TT_1}} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{1},$$

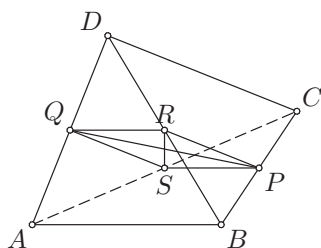
па је $\frac{\overrightarrow{DT}}{\overrightarrow{TT_1}} = 3$. Следи да важи $\mathcal{B}(D, T, T_1)$ и $DT : TT_1 = 3 : 1$, што је и требало доказати.

Дефиниција 43. Тачка T из претходног задатка назива се *тежиштем* тетраедра $ABCD$.

7. а) Две наспрамне ивице неког тетраедра су међусобно подударне ако и само ако су дужи одређене средиштима осталих двају парова наспрамних ивица међусобно нормалне.

б) Две наспрамне ивице тетраедра су нормалне ако и само ако су дужи одређене средиштима осталих двају парова наспрамних ивица међусобно подударне.

Решење:



Нека је $ABCD$ тетраедар и нека су P, Q, R, S редом средишта ивица BC, AD, BD, AC .

а) Треба доказати да важи $AB = CD$ ако и само ако важи $PQ \perp RS$. Дуж SP је средња линија троугла $\triangle ABC$, па је $SP \parallel AB$ и $SP = \frac{1}{2}AB$. Такође, дуж QR је средња линија троугла $\triangle ABD$, па је $QR \parallel AB$ и $QR = \frac{1}{2}AB$. Према томе, $SP \parallel QR$ и $SP = QR$, па су тачке P, R, Q, S компланарне и четвороугао $PRQS$ је паралелограм. Такође, PR је средња линија троугла $\triangle BCD$, па је $PR \parallel CD$ и $PR = \frac{1}{2}CD$.

$\Rightarrow$: Нека је $AB = CD$. Онда је $SP = PR$, па је $PRQS$ ромб. Ромбу су дијагонале међусобно нормалне, па је $PQ \perp RS$.

$\Leftarrow$: Нека је $PQ \perp RS$. Паралелограму $PRQS$ су дијагонале PQ, RS међусобно нормалне, па је $PRQS$ ромб. Следи да је $SP = PR$, па је и $AB = CD$.

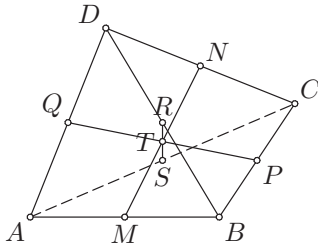
б) Треба доказати да важи $AB \perp CD$ ако и само ако важи $PQ = RS$. Из претходног дела задатка имамо да је $PRQS$ паралелограм, као и да је $SP \parallel AB$ и $PR \parallel CD$.

$\Rightarrow$: Нека је $AB \perp CD$. Онда је $SP \perp PR$, па је $PRQS$ правоугаоник. Правоугаонику су дијагонале међусобно подударне, па је $PQ = RS$.

$\Leftarrow$: Нека је $PQ = RS$. Паралелограму $PRQS$ су дијагонале PQ, RS међусобно подударне, па је $PRQS$ правоугаоник. Следи да је $SP \perp PR$, па је и $AB \perp CD$.

8. Доказати да је права одређена средиштва страница AC и BD тетраедра $ABCD$ уједно и њихова заједничка нормала ако и само ако је $AB = CD$ и $AD = BC$.

Решење:



Нека су M, N, P, Q, R, S редом средишта ивица AB, CD, BC, AD, BD, AC тетраедра $ABCD$.

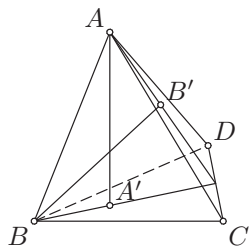
$\Rightarrow$: Претпоставимо да је RS заједничка нормала страница AC и BD . Пошто важи $PN \parallel BD$ и $MP \parallel AC$ (средње линије одговарајућих троуглова), следи да је $RS \perp PN, MP$, па је RS управна на равни паралелограма $MPNQ$. Према томе, RS је управна на MN, PQ , па су паралелограми $MSNR$ и $PRQS$ ромбови. Следи да је $MS = MR$ и $PS = PR$. Пошто је $MS = \frac{1}{2}BC$, $MR = \frac{1}{2}AD$, добијамо $BC = AD$, а пошто је $PS = \frac{1}{2}AB$, $PR = \frac{1}{2}CD$, следи да је $AB = CD$.

$\Leftarrow$: Обрнуто, претпоставимо да је $AB = CD$ и $BC = AD$. Тада је $MS = MR$ и $PS = PR$. Следи да су паралелограми $MSNR$ и $PRQS$ ромбови, па је $MN \perp RS$ и $PQ \perp RS$. Дакле, RS је управна на правима MN, PQ равни $MNPQ$, па је управна на тој равни. Специјално, RS је управна на MP, PN . Пошто је $MP \parallel AC$ и $PN \parallel BD$, следи да је $RS \perp AC$ и $RS \perp BD$, односно да је RS заједничка нормала страница AC, BD .

Дефиниција 44. Тетраедар $ABCD$ је *ортогоналан* ако важи $AB \perp CD$, $BC \perp AD$, $AC \perp BD$.

9. Висине AA' и BB' тетраедра $ABCD$ се секу ако и само ако је $AB \perp CD$. Доказати.

Решење:

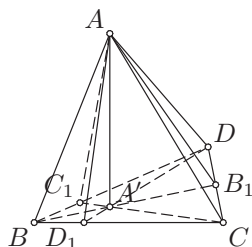


$\Rightarrow$: Нека се висине AA' , BB' секу. Тада постоји раван π која их садржи. Висина AA' је управна на равни BCD , па је $AA' \perp CD$, а висина BB' је управна на равни ACD , па је $BB' \perp CD$. Према томе, $CD \perp \pi$, па је CD управна на свакој правој равни π . Специјално, управна је на правој AB , тј. важи $CD \perp AB$.

$\Leftarrow$: Обратно, нека је $AB \perp CD$. Нека је π раван која садржи тачке A, A', B . Висина AA' је управна на равни BCD , па је управна и на CD . Следи да је CD управна на равни која садржи праве AA', AB , тј. на равни π . Висина BB' је управна на равни ACD , па је управна на правој CD . Пошто је π раван која садржи тачку B и управна је на правој CD , следи да висина BB' мора припадати равни π , јер све праве које садрже тачку B и управне су на правој CD припадају равни π . Према томе, висине AA', BB' припадају равни π . Оне не могу бити паралелне, јер би тада равни BCD, ACD , које су управне на њима, биле паралелне, па би се поклапале, што би значило да су тачке A, B, C, D компланарне, а то није тачно. Према томе, висине AA', BB' припадају једној равни и нису паралелне, па следи да се секу.

10. Доказати да подножја висина из темена тетраедра представљају ортоцентре наспрамних пљосни ако и само ако је тетраедар ортогоналан.

Решење:



Нека је A' подножје висине из темена A на пљосни BCD .

$\Rightarrow$: Нека је A' ортоцентар троугла $\triangle BCD$. Тада је $BA' \perp CD$, а пошто је и $AA' \perp CD$, следи да је права CD управна на равни која садржи тачке A, A', B . Према томе, следи да је CD управна на свакој правој те равни, па специјално и на правој AB . Слично, $DA' \perp BC$, а пошто је и $AA' \perp BC$, следи да је права BC управна на равни која садржи тачке A, A', D . Према томе, следи да је BC управна на свакој правој те равни, па специјално и на правој AD . Такође, $CA' \perp BD$, а пошто је и $AA' \perp BD$, следи да је права BD управна на равни која садржи тачке A, A', C . Према томе, следи да је BD управна на свакој правој те равни, па специјално и на правој AC . Дакле, доказали смо да важи $AB \perp CD, BC \perp AD, AC \perp BD$, па је тетраедар $ABCD$ ортогоналан.

$\Leftarrow$: Обрнуто, претпоставимо да је тетраедар $ABCD$ ортогоналан. Тада је $AB \perp CD, BC \perp AD, AC \perp BD$. Права AA' је управна на равни BCD , па следи да је $AA' \perp BC, CD, BD$. Дакле, имамо да је права BC управна на правима AA', AD па је управна на равни која их садржи и на свакој правој те равни, па специјално на правој DA' . Према томе, права DA' је висина троугла $\triangle BCD$. Слично, права CD управна на правима AA', AB па је управна на равни која их садржи и на свакој правој те равни, па специјално на правој BA' . Према томе, права BA' је висина троугла $\triangle BCD$. Висине DA', BA' троугла $\triangle BCD$ секу се у тачки A' , па следи да је тачка A' ортоцентар тог троугла, што је и требало доказати.

7 Изометријске трансформације простора

Дефиниција 45. Нека је $\mathbf{S}$ простор. Пресликавање $\mathfrak{I} : \mathbf{S} \longrightarrow \mathbf{S}$, такво да за сваки пар тачака (A, B) простора $\mathbf{S}$ важи $(A, B) \cong (\mathfrak{I}(A), \mathfrak{I}(B))$, називамо *изометријском трансформацијом* (*изометријом*) простора $\mathbf{S}$.

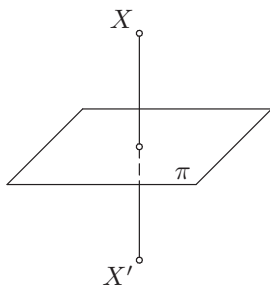
Све изометрије простора су бијекције. Изометрије простора сликају праве у праве и чувају распоред тачака на правој, сликају полуправе у полуправе, дужи у дужи, угаоне линије у угаоне линије, углове у углове, полуравни у полуравни, равни у равни, полупросторе у полупросторе, диједарске површи у диједарске површи, диједре у диједре итд. Изометрије простора које мењају оријентацију простора називамо *индиректним* изометријама, а оне које чувају оријентацију простора називамо *директним* изометријама. За сваке две изометрије $\mathfrak{I}, \mathfrak{J}$, њихова композиција $\mathfrak{J} \circ \mathfrak{I}$ је такође изометрија, и инверз $\mathfrak{I}^{-1}$ изометрије $\mathfrak{I}$ је такође изометрија.

Дефиниција 46. Нека су $\Phi, \Phi' \subseteq \mathbf{S}$ фигуре у простору $\mathbf{S}$. Ако постоји изометрија $\mathfrak{I} : \mathbf{S} \longrightarrow \mathbf{S}$ простора $\mathbf{S}$ таква да важи $\Phi' = \mathfrak{I}(\Phi)$, онда кажемо да је фигура Φ *погодна* фигури Φ' и пишемо $\Phi \cong \Phi'$.

Релација $\cong$ подударности фигура је релација еквиваленције. Због симетричности релације чешће ћемо говорити да су фигуре *међусобно погодне*.

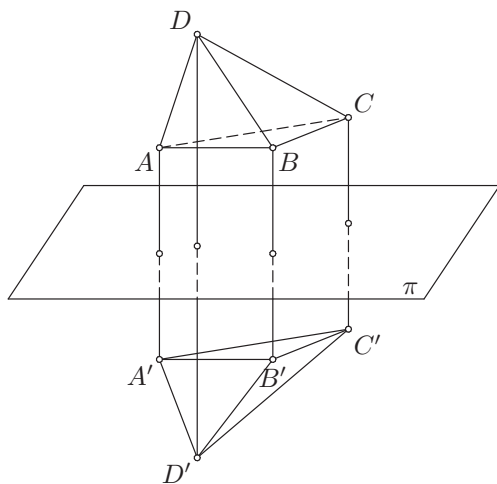
Класификацију изометрија равни започели смо дефинисањем осне рефлексije. Изометрија простора која представља природно уопштење осне рефлексije равни јесте раванска рефлексija.

Дефиниција 47. Нека је $\pi \subset \mathbf{S}$ раван простора $\mathbf{S}$ и нека је пресликавање $\mathcal{S}_\pi$ дато на следећи начин: ако је $X \in \pi$, онда је $\mathcal{S}_\pi(X) = X$, а иначе је $\mathcal{S}_\pi(X) = X'$, где је X' тачка таква да је π медијална раван дужи XX' . Онда се пресликавање $\mathcal{S}_\pi$ назива *раванском рефлексijом* (*раванском симетријом*) простора $\mathbf{S}$ с равни рефлексije (огледалом) π .



Није тешко доказати да $\mathcal{S}_\pi$ јесте изометрија простора. Раванска рефлексija је пресликавање које слика као „лик у огледалу”. Ако двапут

применимо раванску рефлексiju, по дефиницији се тачке равни π сликају у себе, а ако се X слика у X' такво да је π медијална раван дужи XX' , онда се X' мора сликати у X . Дакле, $\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\pi = \text{Id}$, што значи да је раванска рефлексija сама себи инверз, односно да је инволуција. По дефиницији се тачке огледала π сликају у себе, а тачке ван огледала π се не сликају у себе (да би постојала дуж чија је π медијална раван), па су једине фиксне тачке (тачке које се сликају у себе) тачке огледала π .



Нека је $ABCD$ позитивно оријентисан тетраедар, тј. нека су A, B, C, D тачке простора $\mathbf{S}$ такве да када се у равни троугла $\triangle ABC$ прстима десне руке иде од темена A ка темену B па затим ка темену C , палац показује на онај полупростор с рубом ABC у којем се налази теме D . Ако су A', B', C', D' редом слике тачака A, B, C, D при раванској рефлексiji $\mathcal{S}_\pi$, онда је тетраедар $A'B'C'D'$ негативно оријентисан, односно ако се у равни троугла $\triangle A'B'C'$ прстима десне руке иде од темена A' ка темену B' па затим ка темену C' , палац показује на онај полупростор с рубом $A'B'C'$ у којем се не налази теме D' . Према томе, раванска рефлексija мења оријентацију простора, па је она индиректна изометрија простора.

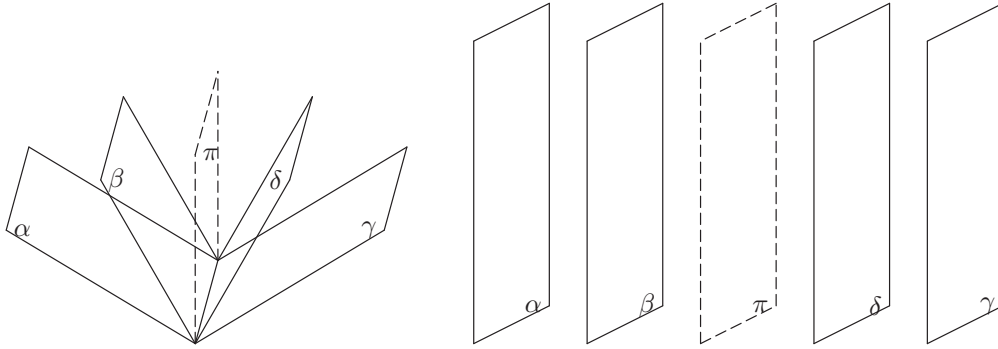
Теорема 34. *Ако је $\mathfrak{I}$ индиректна изометрија простора $\mathbf{S}$ која има бар две разне фиксне тачке P, Q , онда је $\mathfrak{I}$ раванска рефлексija $\mathcal{S}_\pi$ чије огледало $\pi \subset \mathbf{S}$ садржи фиксне тачке P, Q .*

Теорема 35 (Теорема о трансмутацији). *Нека је $\pi \subset \mathbf{S}$ раван простора $\mathbf{S}$, $\mathcal{S}_\pi$ раванска рефлексija и $\mathfrak{I}$ произвољна изометрија простора $\mathbf{S}$. Ако је $\pi' = \mathfrak{I}(\pi)$, онда је $\mathfrak{I} \circ \mathcal{S}_\pi \circ \mathfrak{I}^{-1} = \mathcal{S}_{\pi'}$.*

Сваку изометрију простора $\mathbf{S}$ можемо изразити преко раванских рефлексija. Штавише, увек их можемо одабрати тако да их буде највише четири.

Теорема 36. Нека је $\mathfrak{I}$ произволна изометрија простора $\mathbf{S}$. Тада је $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_\alpha$ за неку равн $\alpha \subset \mathbf{S}$, или је $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha$ за неке равни $\alpha, \beta \subset \mathbf{S}$, или је $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_\gamma \circ \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha$ за неке равни $\alpha, \beta, \gamma \subset \mathbf{S}$, или је $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_\delta \circ \mathcal{S}_\gamma \circ \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha$ за неке равни $\alpha, \beta, \gamma, \delta \subset \mathbf{S}$.

Као што постоји појам прамена правих у равни, тако постоји и појам прамена равни у простору. Постоје две врсте праменова равни у простору. Ако је $p \subset \mathbf{S}$ права у простору, скуп свих равни које садрже праву p чини прамен равни, који се назива *коаксијални прамен равни*. Ако је $\pi \subset \mathbf{S}$ раван у простору, скуп свих равни које су паралелне равни π (укључујући и раван π) чини прамен равни, који се назива *паралелни прамен равни*. Што се везе између праменова равни и раванских рефлексација тиче, важи следећа теорема.



Теорема 37. Нека су $\alpha, \beta, \gamma \subset \mathbf{S}$ равни простора $\mathbf{S}$. Онда је композиција $\mathcal{S}_\gamma \circ \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha$ раванска рефлексација ако и само ако равни α, β, γ припадају једном прамену. Штавише, тада раван те рефлексације (означимо је са δ) припада том прамену и ако је раван π таква да су равни α, γ симетричне у односу на π , тада су и равни β, δ симетричне у односу на π .

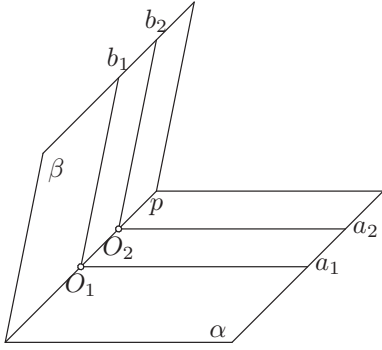
Утврдимо које још изометрије простора постоје.

Дефиниција 48. Пресликавање $\mathcal{E} : \mathbf{S} \longrightarrow \mathbf{S}$ такво да је $\mathcal{E}(X) = X$ за сваку тачку $X \in \mathbf{S}$ називамо *коинциденцијом*.

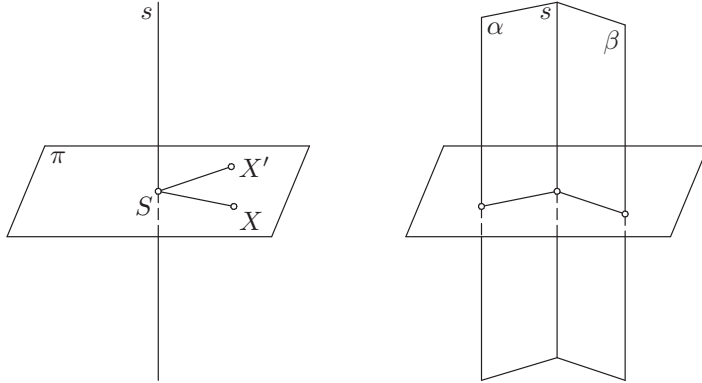
Коинциденција је, наравно, идентичко пресликавање. С обзиром на то да је $\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\pi = \text{Id} = \mathcal{E}$, имамо репрезентацију коинциденције преко производа двеју раванских рефлексација. Коинциденција је директна изометрија простора.

Теорема 38. Ако изометрија $\mathfrak{I}$ простора $\mathbf{S}$ има бар четири некомпланарне фиксне тачке, онда је $\mathfrak{I} = \mathcal{E}$. Ако директна изометрија $\mathfrak{I}$ простора $\mathbf{S}$ има бар три неколинеарне фиксне тачке, онда је $\mathfrak{I} = \mathcal{E}$.

Нека је $\alpha p \beta$ диедар и нека су γ_1, γ_2 равни које су управне на правој p редом у тачкама O_1, O_2 . Нека су $O_1 a_1, O_2 a_2$ редом пресечне полуправе равни γ_1, γ_2 и плосни $p\alpha$ и нека су $O_1 b_1, O_2 b_2$ редом пресечне полуправе равни γ_1, γ_2 и плосни $p\beta$. На основу теореме 26, углови $\angle a_1 O_1 b_1, \angle a_2 O_2 b_2$ су подударни. Ако је диедар $\alpha p \beta$ оријентисан, онда су и углови $\angle a_1 O_1 b_1, \angle a_2 O_2 b_2$ оријентисани и имају исту оријентацију, која је одређена оријентацијом диедра. Сходно томе, за оријентисани угао $\varphi = \angle a_1 O_1 b_1 = \angle a_2 O_2 b_2$ говорићемо да је оријентисани угао у равни нормалној на p .



Дефиниција 49. Нека је $s \subset \mathbf{S}$ права простора $\mathbf{S}$ и φ оријентисани угао у равни нормалној на s . Пресликавање $\mathcal{R}_{s,\varphi} : \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{S}$ такво да је $\mathcal{R}_{s,\varphi}(X) = X$ за $X \in s$ и $\mathcal{R}_{s,\varphi}(X) = X'$ где је X' тачка равни π , која садржи X и нормална је на s у тачки S , таква да важи $SX = SX'$ и $\angle XSX' = \varphi$ (подударни су и имају исту оријентацију), за тачке $X \notin s$, назива се *осном ротацијом* око осе s за оријентисани угао φ .



Осна ротација је уопштење ротације равни. Нека је $\alpha s \beta$ оријентисани диедар, чији је оријентисани нагибни угао једнак половини оријентисаног угла φ . Ако су α', β' редом равни које садрже плосни $s\alpha, s\beta$ тог диедра, онда је $\mathcal{R}_{s,\varphi} = \mathcal{S}_{\beta'} \circ \mathcal{S}_{\alpha'}$. Равни α', β' можемо ротирати око осе s за произвољан угао и добити равни α'', β'' такве да је композиција $\mathcal{S}_{\beta''} \circ \mathcal{S}_{\alpha''}$

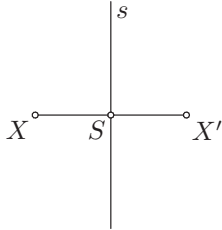
такође једнака полазној осној ротацији. Дакле, ако су α'', β'' произвољне равни такве да је $\alpha'' \cap \beta'' = s$ и $\angle(\alpha'', \beta'') = \frac{\varphi}{2}$ (оријентисани углови), онда је $\mathcal{R}_{s,\varphi} = \mathcal{S}_{\beta''} \circ \mathcal{S}_{\alpha''}$. Пошто је композиција двеју индиректних изометрија простора, осна ротација је директна изометрија простора.

Није тешко доказати да је $\mathcal{R}_{s,\psi} \circ \mathcal{R}_{s,\varphi} = \mathcal{R}_{s,\varphi+\psi}$, $\mathcal{R}_{s,0^\circ} = \mathcal{R}_{s,360^\circ} = \mathcal{E}$ и $\mathcal{R}_{s,\varphi}^{-1} = \mathcal{R}_{s,-\varphi}$, где је $-\varphi$ угао подударан углу φ , супротне оријентације. Ако је $\mathcal{R}_{s,\varphi} \neq \mathcal{E}$, све фиксне тачке осне ротације $\mathcal{R}_{s,\varphi}$ припадају оси s .

Теорема 39. *Ако директна изометрија $\mathfrak{I}$ простора $\mathbf{S}$, која није коинциденција, има бар једну фиксну тачку S , онда је $\mathfrak{I} = \mathcal{R}_{s,\varphi}$, чија оса $s \subset \mathbf{S}$ садржи фиксну тачку S .*

Теорема 40 (Теорема о трансмутацији). *Нека је $s \subset \mathbf{S}$ права простора $\mathbf{S}$, φ оријентисани угао у равни нормалној на s , $\mathcal{R}_{s,\varphi}$ осна ротација и $\mathfrak{I}$ произвољна изометрија простора $\mathbf{S}$. Нека је $s' = \mathfrak{I}(s)$ и $\varphi' = \mathfrak{I}(\varphi)$ оријентисани угао у равни нормалној на s' . Тада је $\mathfrak{I} \circ \mathcal{R}_{s,\varphi} \circ \mathfrak{I}^{-1} = \mathcal{R}_{s',\varphi'}$.*

Ако је угао ротације опружен, онда за тачку $X' = \mathcal{R}_{s,180^\circ}(X)$, где $X \notin s$, важи да је $SX' = SX$ и $\angle XSX' = 180^\circ$, где је S тачка пресека праве s и равни која садржи X и нормална је на s . Другим речима, важи $SX = SX'$ и $\mathcal{B}(X, S, X')$, па је S средиште дужи XX' . Права s је нормална на XX' и садржи S , па је (једна од) симетрала дужи XX' .



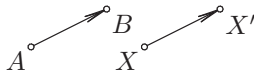
Дефиниција 50. Нека је $s \subset \mathbf{S}$ права у простору $\mathbf{S}$. Пресликавање $\mathcal{S}_s : \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{S}$ такво да је $\mathcal{S}_s(X) = X$ за $X \in s$ и $\mathcal{S}_s(X) = X'$, где је X' таква да је s симетрала дужи XX' , назива се *осном симетријом* простора $\mathbf{S}$ с осом s .

Дакле, $\mathcal{S}_s = \mathcal{R}_{s,180^\circ}$. Јасно је да је $\mathcal{S}_s^{-1} = \mathcal{S}_s$, тј. да је осна симетрија инволуција. Такође, ако је $\mathcal{S}_s = \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha$, онда је оријентисани угао од равни α ка равни β подударан углу $\frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$, тј. важи $\alpha \perp \beta$.

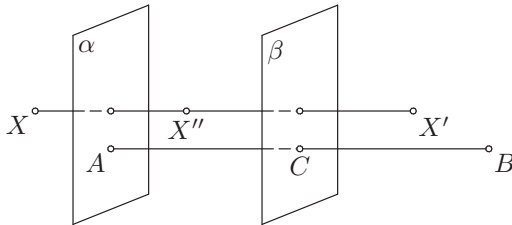
Потребно је на овом месту нагласити да осна симетрија простора и осна симетрија равни не представљају исти тип пресликавања, иако имају сличне дефиниције. Осна симетрија равни је дефинисана само за тачке те равни, а осна симетрија простора је дефинисана за све тачке простора.

Такође, природно уопштење осне симетрије равни јесте раванска симетрија простора, а осна симетрија простора је специјалан случај осне ротације простора, која је природно уопштење ротације равни. Треба имати на уму и то да је осна симетрија простора директна изометрија простора, док је осна симетрија равни индиректна изометрија равни, као и да се оријентација простора одређује помоћу оријентисаних тетраедара, а оријентација равни помоћу оријентисаних троуглова.

Дефиниција 51. Нека је $\overrightarrow{AB}$ вектор. Пресликавање $\mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} : \mathbf{S} \longrightarrow \mathbf{S}$ дато са $\mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}}(X) = X'$, где је X' таква да је $\overrightarrow{XX'} = \overrightarrow{AB}$, назива се *транслацијом* за вектор $\overrightarrow{AB}$.



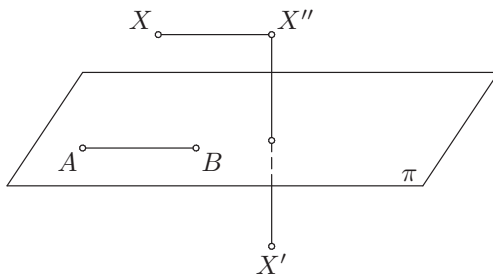
Транслација простора је природно уопштење транслације равни и има исте особине као транслација равни. То је директна изометрија простора која нема фиксних тачака (ако је $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$). Обрнуто не важи, јер у простору постоје директне изометрије које нису транслације и немају фиксних тачака. Композиција транслација за $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ је транслација за $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, а инверз транслације $\mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}}$ је транслација $\mathcal{T}_{\overrightarrow{BA}}$.



Нека је α раван која садржи тачку A и управна је на правој AB и нека је β раван која садржи средиште C дужи AB и управна је на правој AB . Тада важи $\mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha$. Дакле, и транслацију видимо као композицију двеју раванских рефлексција, слично као што смо транслацију у равни видели као композицију осних рефлексција. Наравно, ово није једина репрезентација транслације $\mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}}$ помоћу раванских рефлексција, јер уместо равни α, β можемо посматрати равни α', β' које су управне на AB и налазе се на растојању $\frac{AB}{2}$, при чему је смер од равни α' ка равни β' исти као смер вектора $\overrightarrow{AB}$.

Теорема 41 (Теорема о трансмутацији). Нека су $A, B \in \mathbf{S}$ тачке простора $\mathbf{S}$, $\overrightarrow{AB}$ вектор простора $\mathbf{S}$, $\mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}}$ транслација и $\mathfrak{I}$ произволна изометрија. Ако су $A' = \mathfrak{I}(A), B' = \mathfrak{I}(B)$, онда је $\mathfrak{I} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} \circ \mathfrak{I}^{-1} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{A'B'}}$.

Дефиниција 52. Нека је π раван простора $\mathbf{S}$ и $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ ненула вектор простора $\mathbf{S}$ паралелан равни π . Пресликавање $\mathcal{G}_{\pi, \overrightarrow{AB}} : \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{S}$ дато са $\mathcal{G}_{\pi, \overrightarrow{AB}} = \mathcal{S}_{\pi} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}}$ назива се *клизајућом рефлексijом* за вектор $\overrightarrow{AB}$ у односу на раван π .



Клизајућа рефлексija простора је природно уопштење клизајуће рефлексije равни. Вектор $\overrightarrow{AB}$ мора бити паралелан равни рефлексije. Она је индиректна изометрија простора, јер је композиција директне и индиректне изометрије, те мења оријентацију простора. Такође, клизајућа рефлексija нема фиксних тачака.

Теорема 42. *Ако индиректна изометрија $\mathfrak{I}$ простора $\mathbf{S}$ нема фиксних тачака, онда је $\mathfrak{I} = \mathcal{G}_{\pi, \overrightarrow{AB}}$, где је $\pi \subset \mathbf{S}$ раван простора $\mathbf{S}$ и $\overrightarrow{AB}$ неки ненула вектор простора $\mathbf{S}$ паралелан равни π .*

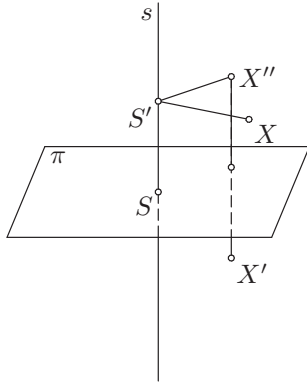
Код клизајуће рефлексije простора транслација и рефлексija комутирају, тј. није битно да ли ћемо прво извршити транслацију, па онда рефлексiju, или обрнуто. Дакле, важи $\mathcal{G}_{\pi, \overrightarrow{AB}} = \mathcal{S}_{\pi} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} \circ \mathcal{S}_{\pi}$. Како се транслација разбија на композицију двеју раванских рефлексija чија су огледала нормална на AB и раван π је паралелна са AB , следи да је клизајућа рефлексija композиција трију раванских рефлексija чија огледала не припадају једном прамену.

Теорема 43 (Теорема о трансмутацији). *Нека је $\pi \subset \mathbf{S}$ раван простора $\mathbf{S}$, $\overrightarrow{AB}$ ненула вектор паралелан равни π , $\mathcal{G}_{\pi, \overrightarrow{AB}}$ клизајућа рефлексija и $\mathfrak{I}$ произвољна изометрија простора $\mathbf{S}$. Ако је $A' = \mathfrak{I}(A)$, $B' = \mathfrak{I}(B)$, $\pi' = \mathfrak{I}(\pi)$, онда је $\mathfrak{I} \circ \mathcal{G}_{\pi, \overrightarrow{AB}} \circ \mathfrak{I}^{-1} = \mathcal{G}_{\pi', \overrightarrow{A'B'}}$.*

Што се инверза клизајуће рефлексije тиче, једноставно се види да је $\mathcal{G}_{\pi, \overrightarrow{AB}}^{-1} = (\mathcal{S}_{\pi} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}})^{-1} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}}^{-1} \circ \mathcal{S}_{\pi}^{-1} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{BA}} \circ \mathcal{S}_{\pi} = \mathcal{G}_{\pi, \overrightarrow{BA}}$. Дакле, клизајућа рефлексija није инволуција.

Поред клизајуће рефлексije, постоји још један тип изометрија простора које се могу разложити на композицију трију раванских рефлексija чија огледала не припадају једном прамену.

Дефиниција 53. Нека је $s \subset \mathbf{S}$ права простора $\mathbf{S}$, $\pi \subset \mathbf{S}$ раван простора $\mathbf{S}$ таква да је $s \perp \pi$ и φ оријентисани угао равни π различит од 0° и пуног угла. Пресликавање $\mathcal{R}_{s,\varphi,\pi} : \mathbf{S} \longrightarrow \mathbf{S}$ дато са $\mathcal{R}_{s,\varphi,\pi} = \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{R}_{s,\varphi}$ назива се *осноротационом рефлексijом*.



Не постоји изометрија равни чије је уопштење осноротациона рефлексija. Како јој само име каже, ова изометрија је композиција осне ротације и раванске рефлексije. Индиректна је, има тачно једну фиксну тачку и то продорну тачку S праве s и равни π .

Теорема 44. Ако индиректна изометрија $\mathfrak{I}$ простора $\mathbf{S}$ има тачно једну фиксну тачку S , онда је $\mathfrak{I} = \mathcal{R}_{s,\varphi,\pi}$, где је $\pi \subset \mathbf{S}$ раван простора $\mathbf{S}$ која садржи фиксну тачку S , $s \subset \mathbf{S}$ права простора $\mathbf{S}$ нормална на равни π у тачки S и φ оријентисани угао равни π различит од 0° и пуног угла.

Код осноротационе рефлексije ротација и рефлексija комутирају, тј. небитно је да ли ћемо прво вршити ротацију па рефлексiju или обрнуто. Дакле, важи $\mathcal{R}_{s,\varphi,\pi} = \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{R}_{s,\varphi} = \mathcal{R}_{s,\varphi} \circ \mathcal{S}_\pi$. Ротација се разбија на композицију двеју раванских рефлексija чија се огледала секу по оси ротације, па како је та оса нормална на равни π , следи да је осноротациона рефлексija композиција трију раванских рефлексija чија огледала не припадају једном прамену.

Теорема 45 (Теорема о трансмутацији). Нека је $s \subset \mathbf{S}$ права простора $\mathbf{S}$, $\pi \subset \mathbf{S}$ раван нормална на правој s , φ оријентисани угао у равни π , $\mathcal{R}_{s,\varphi,\pi}$ осноротациона рефлексija и $\mathfrak{I}$ произвољна изометрија простора $\mathbf{S}$. Нека су $s' = \mathfrak{I}(s)$, $\pi' = \mathfrak{I}(\pi)$ и $\varphi' = \mathfrak{I}(\varphi)$ оријентисани угао у равни π' . Тада је $\mathfrak{I} \circ \mathcal{R}_{s,\varphi,\pi} \circ \mathfrak{I}^{-1} = \mathcal{R}_{s',\varphi',\pi'}$.

Што се инверза осноротационе рефлексije тиче, једноставно се види да важи $\mathcal{R}_{s,\varphi,\pi}^{-1} = (\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{R}_{s,\varphi})^{-1} = \mathcal{R}_{s,\varphi}^{-1} \circ \mathcal{S}_\pi^{-1} = \mathcal{R}_{s,-\varphi} \circ \mathcal{S}_\pi = \mathcal{R}_{s,-\varphi,\pi}$. Посебно је занимљив случај када је угао ротације једнак опруженом углу. Тада је $\mathcal{R}_{s,180^\circ,\pi} = \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_s = \mathcal{S}_s \circ \mathcal{S}_\pi$. Ако је S пресечна тачка праве s и равни π , X

произвольна тачка различита од S и X' њена слика при овој изометрији, није тешко доказати да је тада $SX = SX'$ и $\mathcal{B}(X, S, X')$. Другим речима, S је средиште дужи XX' . Овакво пресликавање назива се *централном симетријом*.

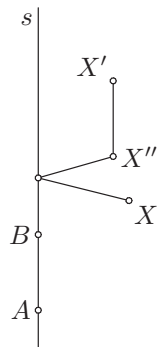
Дефиниција 54. Нека је $S \in \mathbf{S}$ тачка у простору $\mathbf{S}$. Пресликавање $\mathcal{S}_S : \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{S}$ такво да је $\mathcal{S}_S(S) = S$ и $\mathcal{S}_S(X) = X'$, где је $X' \in \mathbf{S}$ тачка таква да је S средиште дужи XX' , за $X \neq S$, назива се *централна симетрија* простора $\mathbf{S}$.

Занимљиво је приметити да се код централне симетрије $\mathcal{S}_S$ за праву s и раван π могу одабрати било која права и раван које су међусобно нормалне у тачки S . Како је $\mathcal{S}_s = \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha$, где је $\alpha \cap \beta = s$ и $\alpha \perp \beta$, следи да је $\mathcal{S}_S = \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha$. Пошто је $s \perp \pi$, а свака раван која садржи s је такође нормална на равни π , следи да је $\alpha \perp \pi$ и $\beta \perp \pi$. Дакле, централна симетрија се може разложити на композицију трију раванских рефлексација чија су огледала три међусобно нормалне равни које садрже центар симетрије. Пошто раванске рефлексације, чија су огледала нормалне равни, комутирају, следи да је поредак рефлексација које чине централну симетрију небитан, јер сваке две комутирају. Централна симетрија простора је индиректна изометрија простора и инволуција је, тј. важи $\mathcal{S}_S^{-1} = \mathcal{S}_S$.

Теорема 46 (Теорема о трансмутацији). Нека је $S \in \mathbf{S}$ тачка у простору $\mathbf{S}$, $\mathcal{S}_S$ централна симетрија и $\mathcal{I}$ произвольна изометрија простора $\mathbf{S}$. Ако је $S' = \mathcal{I}(S)$, онда је $\mathcal{I} \circ \mathcal{S}_S \circ \mathcal{I}^{-1} = \mathcal{S}_{S'}$.

Преостало је још да видимо типове изометрија простора које се могу разложити на композицију четири раванске рефлексације. Испоставља се да постоји само један такав тип изометрија.

Дефиниција 55. Нека је $s \subset \mathbf{S}$ права простора $\mathbf{S}$, φ оријентисани угао у равни нормалној на s , различит од 0° и пуног угла и $\overrightarrow{AB}$ ненула вектор паралелан правој s . Пресликавање $\mathcal{Z}_{s,\varphi,\overrightarrow{AB}} : \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{S}$ које је дато са $\mathcal{Z}_{s,\varphi,\overrightarrow{AB}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} \circ \mathcal{R}_{s,\varphi}$ назива се *завојним кретањем*.



Завојно кретање је директна изометрија, јер је композиција двеју директних изометрија (ротације и транслације). Она нема фиксних тачака. Ротација се може разложити на композицију двеју раванских рефлексиија чија се огледала секу по правој s , а транслација на композицију двеју раванских рефлексиија чија су огледала нормална на $AB \parallel s$, па се завојно кретање може разложити на композицију четири раванске рефлексиије. Код завојног кретања транслација и ротација комутирају, тј. важи $\mathcal{R}_{s,\varphi,\overrightarrow{AB}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} \circ \mathcal{R}_{s,\varphi} = \mathcal{R}_{s,\varphi} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}}$.

Теорема 47 (Теорема о трансмутацији). *Нека је $s \subset \mathbf{S}$ права простора $\mathbf{S}$, φ оријентисани угао у равни нормалној на s различит од 0° и нуног ула, $\overrightarrow{AB}$ ненула вектор паралелан правој s , $\mathcal{Z}_{s,\varphi,\overrightarrow{AB}}$ завојно кретање и $\mathfrak{I}$ произволна изометрија простора $\mathbf{S}$. Нека је $s' = \mathfrak{I}(s)$, $A' = \mathfrak{I}(A)$, $B' = \mathfrak{I}(B)$ и $\varphi' = \mathfrak{I}(\varphi)$ оријентисани угао у равни нормалној на s' . Тада је $\mathfrak{I} \circ \mathcal{Z}_{s,\varphi,\overrightarrow{AB}} \circ \mathfrak{I}^{-1} = \mathcal{Z}_{s',\varphi',\overrightarrow{A'B'}}$.*

Што се инверза завојног кретања тиче, једноставно се види да важи $\mathcal{Z}_{s,\varphi,\overrightarrow{AB}}^{-1} = (\mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} \circ \mathcal{R}_{s,\varphi})^{-1} = \mathcal{R}_{s,\varphi}^{-1} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}}^{-1} = \mathcal{R}_{s,-\varphi} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{BA}} = \mathcal{Z}_{s,-\varphi,\overrightarrow{BA}}$. Посебно је занимљив случај када је угао ротације једнак опруженом углу. Тада је $\mathcal{Z}_{AB,180^\circ,\overrightarrow{AB}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} \circ \mathcal{S}_{AB} = \mathcal{S}_{AB} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}}$. Ово пресликавање назива се *завојним пољубршајем* и означава се са $\mathcal{Z}_{\overrightarrow{AB}}$ (да би се поједноставило означавање, сматра се да је одабран представник вектора $\overrightarrow{AB}$ такав да тачке A, B припадају правој s).

1. Ако су A, B, C три тачке равни π , доказати да важи $\mathcal{G}_{\pi,\overrightarrow{CA}} \circ \mathcal{G}_{\pi,\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{G}_{\pi,\overrightarrow{AB}} = \mathcal{S}_\pi$.

Решење: Како је $\mathcal{G}_{\pi,\overrightarrow{AB}} = \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} \circ \mathcal{S}_\pi$, $\mathcal{G}_{\pi,\overrightarrow{BC}} = \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{BC}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{S}_\pi$, $\mathcal{G}_{\pi,\overrightarrow{CA}} = \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{CA}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{CA}} \circ \mathcal{S}_\pi$, следи да је

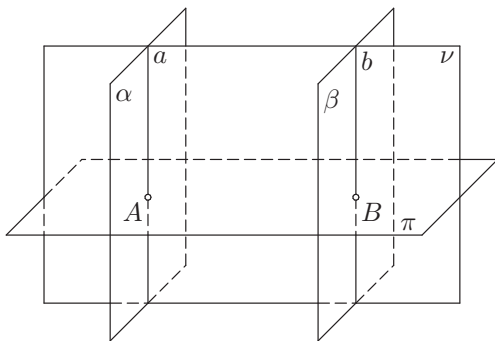
$$\begin{aligned} \mathfrak{I} &= \mathcal{G}_{\pi,\overrightarrow{CA}} \circ \mathcal{G}_{\pi,\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{G}_{\pi,\overrightarrow{AB}} \\ &= \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{CA}} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} \\ &= \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{BA}} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{S}_\pi. \end{aligned}$$

2. Доказати $\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_O = \mathcal{S}_O \circ \mathcal{S}_\pi \Leftrightarrow O \in \pi$.

Решење: Почетна једнакост $\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_O = \mathcal{S}_O \circ \mathcal{S}_\pi$ важи ако и само ако важи једнакост $\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_O \circ \mathcal{S}_\pi^{-1} = \mathcal{S}_O$. На основу теореме о трансмутацији следи да је $\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_O \circ \mathcal{S}_\pi^{-1} = \mathcal{S}_{\mathcal{S}_\pi(O)}$, па је полазна једнакост еквивалентна једнакости $\mathcal{S}_{\mathcal{S}_\pi(O)} = \mathcal{S}_O$. Две централне симетрије су једнаке ако и само ако су им центри исти, према томе, последња једнакост је еквивалентна са $\mathcal{S}_\pi(O) = O$. Све фиксне тачке раванске рефлексиије налазе се на њеном огледалу, па је $\mathcal{S}_\pi(O) = O$ ако и само ако $O \in \pi$, што је и требало доказати.

3. Доказати да је композиција непарног броја централних симетрија простора поново централна симетрија.

Решење: Да бисмо утврдили шта представља композиција непарног броја централних симетрија, одредимо прво шта представља композиција двеју централних симетрија, тј. шта је $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_A$. Претпоставимо најпре да је $A \neq B$.



Нека је AB права која садржи тачке A, B и π нека раван која садржи праву AB . Нека је a права која садржи тачку A и нормална је на равни π и нека је b права која садржи тачку B и нормална је на равни π . Тада је $\mathcal{S}_A = \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_a$ и $\mathcal{S}_B = \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_\pi$, па је $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_A = \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a$. Праве a, b су нормалне на равни π , па су паралелне и постоји раван ν која их садржи. Нека је α раван која садржи праву a и нормална је на равни ν и нека је β раван која садржи праву b и нормална је на равни ν . Тада је $\mathcal{S}_a = \mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{S}_\alpha$ и $\mathcal{S}_b = \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\nu$, па је $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{S}_\nu \circ \mathcal{S}_\alpha = \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha$. Како је по конструкцији права a нормална на равни π , онда је права a нормална и на правој AB те равни π . Ако је a' права нормална на правој a у тачки A која припада равни α , онда је угао између правих a', AB нагибни угао диједра који граде равни α, ν , што је прав угао због нормалности ових равни. Дакле, $AB \perp a, a'$, па је $AB \perp \alpha$. Слично је и $AB \perp \beta$, па је $\alpha \parallel \beta$ и $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha = \mathcal{T}_{\overrightarrow{2AB}}$. Овиме је доказано да је $\mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_A = \mathcal{T}_{\overrightarrow{2AB}}$.

Ако је $A = B$, онда је $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$, па је и $2\overrightarrow{AB} = \vec{0}$. Како је централна симетрија инволуција, тј. важи $\mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_A = \mathcal{S}_A \circ \mathcal{S}_A = \mathcal{E} = \mathcal{T}_{\vec{0}}$, следи да и у случају $A = B$ можемо писати да је $\mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_A = \mathcal{T}_{\overrightarrow{2AB}}$.

Користићемо принцип математичке индукције. Доказујемо тврђење: за сваки природан број n и за произвољне тачке $A_1, A_2, \dots, A_{2n-1}$ простора $\mathbf{S}$ пресликавање $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_{A_{2n-1}} \circ \dots \circ \mathcal{S}_{A_2} \circ \mathcal{S}_{A_1}$ је централна симетрија.

База индукције ($n = 1$): За произвољну тачку A_1 простора $\mathbf{S}$ пресликавање $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_{A_1}$ је централна симетрија, па тврђење важи за $n = 1$.

Индуктивна хипотеза: Претпоставимо да тврђење важи за неки природан број n . То значи да је композиција произвољне $2n - 1$ централне

симетрије поново централна симетрија.

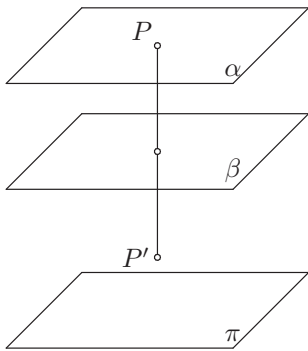
Индуктивни корак: Како је $2(n+1) - 1 = 2n + 2 - 1 = 2n + 1$, треба доказати да је композиција произвољне $2n + 1$ централне симетрије поново централна симетрија. Нека су $A_1, A_2, \dots, A_{2n+1}$ произвољне тачке простора $\mathbf{S}$ и нека је $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_{A_{2n+1}} \circ \mathcal{S}_{A_{2n}} \circ \mathcal{S}_{A_{2n-1}} \circ \dots \circ \mathcal{S}_{A_2} \circ \mathcal{S}_{A_1}$. Потребно је доказати да је $\mathfrak{I}$ централна симетрија. Према индуктивној хипотези, пресликавање $\mathcal{S}_{A_{2n-1}} \circ \dots \circ \mathcal{S}_{A_2} \circ \mathcal{S}_{A_1}$ је централна симетрија, тј. $\mathcal{S}_B$, за неку тачку B . Према томе, $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_{A_{2n+1}} \circ \mathcal{S}_{A_{2n}} \circ \mathcal{S}_B = \mathcal{S}_{A_{2n+1}} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{BA_{2n}}}$. Нека је тачка C таква да је $\overrightarrow{CA_{2n+1}} = \overrightarrow{BA_{2n}}$. Тада је $\mathcal{T}_{\overrightarrow{BA_{2n}}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{CA_{2n+1}}}$, па је $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_{A_{2n+1}} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{CA_{2n+1}}} = \mathcal{S}_{A_{2n+1}} \circ \mathcal{S}_{A_{2n+1}} \circ \mathcal{S}_C = \mathcal{S}_C$, тј. пресликавање $\mathfrak{I}$ је централна симетрија.

На основу принципа математичке индукције, за сваки природан број n и произвољне тачке $A_1, A_2, \dots, A_{2n-1}$ простора $\mathbf{S}$ важи да је пресликавање $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_{A_{2n-1}} \circ \dots \circ \mathcal{S}_{A_2} \circ \mathcal{S}_{A_1}$ централна симетрија. Другим речима, композиција непарног броја централних симетрија је централна симетрија, што је и требало доказати.

4. Одредити тип изометрије $\mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}} \circ \mathcal{S}_\pi$.

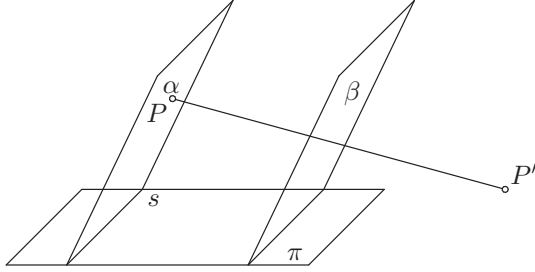
Решење: Нека је α раван која садржи тачку P и нормална је на PP' и нека је β раван која садржи средиште дужи PP' и нормална је на њој. Тада је $\mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}} = \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha$, па је $\mathfrak{I} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}} \circ \mathcal{S}_\pi = \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha \circ \mathcal{S}_\pi$. Разликујемо два случаја:

1° Равни α, β, π припадају једном прамену. Пошто су равни α, β међусобно паралелне (јер су нормалне на PP'), овај случај се остварује ако је $\pi \perp PP'$.

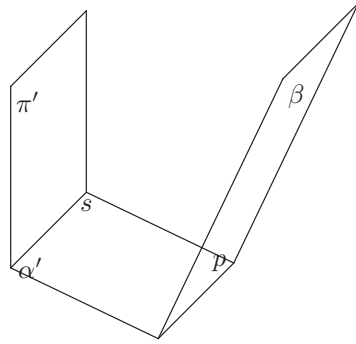


Тада је $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha \circ \mathcal{S}_\pi = \mathcal{S}_\gamma$, за неку раван γ тог прамена, тј. за неку раван γ нормалну на PP' . Дакле, у овом случају је $\mathfrak{I}$ раванска рефлексја.

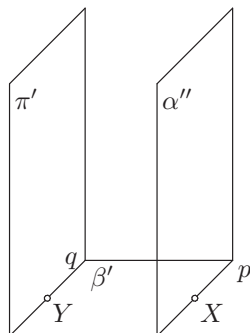
2° Равни α, β, π не припадају једном прамену, тј. $\pi \not\subset PP'$.



Нека је $s = \alpha \cap \pi$ пресечна права равни α, π (она постоји јер ове равни нису паралелне). Тада је $\mathcal{S}_\alpha \circ \mathcal{S}_\pi = \mathcal{R}_{s, 2\angle(\pi, \alpha)}$. Нека су α', π' равни које се секу по правој s и оријентисани угао диедра који граде равни π', α' је исти као оријентисани угао диедра који граде равни π, α , при чему је $\alpha' \perp \beta$. Тада је $\mathcal{R}_{s, 2\angle(\pi, \alpha)} = \mathcal{S}_{\alpha'} \circ \mathcal{S}_{\pi'}$. Одавде следи да је $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_{\alpha'} \circ \mathcal{S}_{\pi'}$.



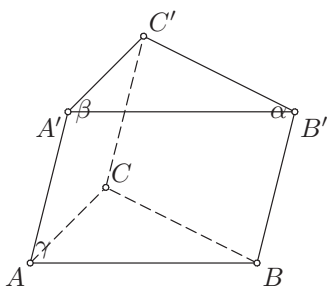
Равни α', β су нормалне, па се секу по правој $p = \alpha' \cap \beta$. Следи да важи $\mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_{\alpha'} = \mathcal{S}_p$. Нека су α'', β' равни које се секу по правој p и међусобно су нормалне, при чему је $\beta' \perp \pi'$. Тада је $\mathcal{S}_p = \mathcal{S}_{\beta'} \circ \mathcal{S}_{\alpha''}$. Према томе, $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_{\beta'} \circ \mathcal{S}_{\alpha''} \circ \mathcal{S}_{\pi'}$. При томе, ниједна тачка праве s не припада равни β (јер су α, β паралелне), па следи да ниједна тачка праве s не припада правој p . Како праве s, p припадају равни α' , а немају заједничких тачака, следи да су оне паралелне, па су паралелне и права p и раван π' .



Нека је q пресечна права равни β', π' . Како ниједна тачка праве p не припада равни π' , онда не припада ни правој q , а пошто праве p, q припадају равни β' , следи да су оне паралелне. Ако је X произвољна тачка са праве p и Y подножје нормале из X на правој q , онда је XY нормална и на правој p . Ако је p' права нормална на p у тачки X која припада равни α'' , онда је угао између правих p', XY нагибни угао диједра који граде равни α'', β' , што је прав угао због нормалности ових равни. Дакле, XY је нормална на правима p, p' равни α'' па је нормална на равни α'' . Слично се добија и да је XY нормална на равни π' . Према томе, $\alpha'' \parallel \pi'$ и $\mathcal{S}_{\alpha''} \circ \mathcal{S}_{\pi'} = \mathcal{T}_{2\overrightarrow{YX}}$. Вектор $\overrightarrow{YX}$ је паралелан равни β' , па је $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_{\beta'} \circ \mathcal{T}_{2\overrightarrow{YX}} = \mathcal{G}_{\beta', 2\overrightarrow{YX}}$, што значи да је $\mathfrak{I}$ клизајућа рефлексја.

5. Доказати да је композиција три раванске рефлексје којима су основе одређене бочним пљоснима троугла $ABCA'B'C'$ клизајућа рефлексја тог простора.

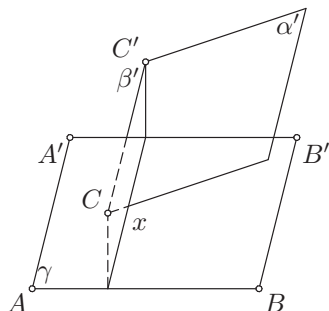
Решење:



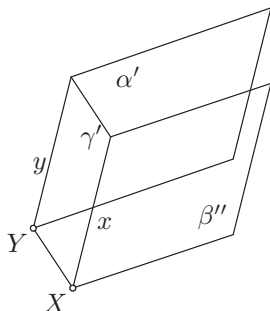
Нека је α раван $BB'C'C$, β раван $AA'C'C$ и γ раван $AA'B'B$. Потребно је доказати да је изометрија $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_{\gamma} \circ \mathcal{S}_{\beta} \circ \mathcal{S}_{\alpha}$ клизајућа рефлексја.

Пошто је $CC' = \alpha \cap \beta$, следи да је $\mathcal{S}_{\beta} \circ \mathcal{S}_{\alpha} = \mathcal{R}_{CC', 2\angle(\alpha, \beta)}$. Нека су α', β' равни такве да је $\alpha' \cap \beta' = CC'$ и оријентисани угао диједра који граде равни α', β' једнак оријентисаном углу диједра који граде равни α, β , при чему је $\beta' \perp \gamma$. Тада је $\mathcal{S}_{\beta} \circ \mathcal{S}_{\alpha} = \mathcal{R}_{CC', 2\angle(\alpha, \beta)} = \mathcal{S}_{\beta'} \circ \mathcal{S}_{\alpha'}$, па је

$$\mathfrak{I} = \mathcal{S}_\gamma \circ \mathcal{S}_{\beta'} \circ \mathcal{S}_{\alpha'}.$$



Равни β', γ су нормалне, па се секу по правој $x = \beta' \cap \gamma$. Следи да је $\mathcal{S}_\gamma \circ \mathcal{S}_{\beta'} = \mathcal{S}_x$. Нека су β'', γ' равни које се секу по правој x и међусобно су нормалне, при чему је $\gamma' \perp \alpha'$. Тада је $\mathcal{S}_x = \mathcal{S}_{\gamma'} \circ \mathcal{S}_{\beta''}$. Према томе, следи да је $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_{\gamma'} \circ \mathcal{S}_{\beta''} \circ \mathcal{S}_{\alpha'}$. Права CC' је паралелна равни γ ($CC' \parallel AA'$ као бочне ивице призме $ABCA'B'C'$, а права AA' припада равни γ), па ниједна тачка са праве CC' не припада равни γ , па самим тим ни правој x . Како праве CC', x припадају равни β' , следи да су оне паралелне, па су паралелне и права x и раван α' .



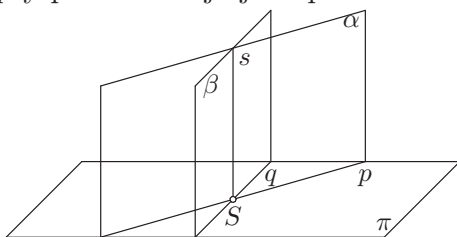
Нека је y пресечна права равни α', γ' . Како ниједна тачка праве x не припада равни α' , онда не припада ни правој y , а пошто праве x, y припадају равни γ' , следи да су оне паралелне. Ако је X произвољна тачка са праве x и Y подножје нормале из X на правој y , онда је XY нормална и на правој x . Ако је p права нормална на x у тачки X која припада равни β'' , онда је угао између правих p, XY нагибни угао диедра који граде равни β'', γ' , што је прав угао због нормалности ових равни. Дакле, XY је нормална на правима x, p равни β'' па је нормална на равни β'' . Слично се добија и да је XY нормална на равни α' . Према томе, $\alpha' \parallel \beta''$ и $\mathcal{S}_{\beta''} \circ \mathcal{S}_{\alpha'} = \mathcal{T}_{2\overrightarrow{YX}}$. Вектор $\overrightarrow{YX}$ је паралелан равни γ' , па закључујемо да је $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_{\gamma'} \circ \mathcal{T}_{2\overrightarrow{YX}} = \mathcal{G}_{\gamma', 2\overrightarrow{YX}}$, што значи да је $\mathfrak{I}$ клизајућа рефлексја.

6. Одредити тип и компоненте изометрије која представља композицију двеју осних рефлексција $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q$ еуклидског простора, у зависности од узајамног положаја правих p и q .

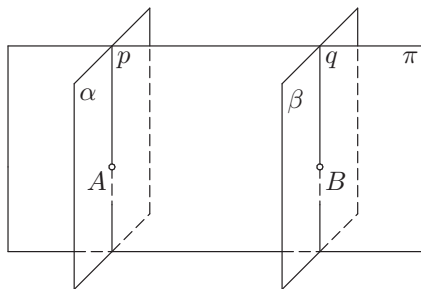
Решење: Нека је $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q$. Две праве у простору могу припадати истој равни и тада се поклапају, секу у једној тачки или су паралелне, а ако не постоји раван која их садржи, онда су оне мимоилазне.

1° Праве p, q се поклапају. Тада је $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{E}$.

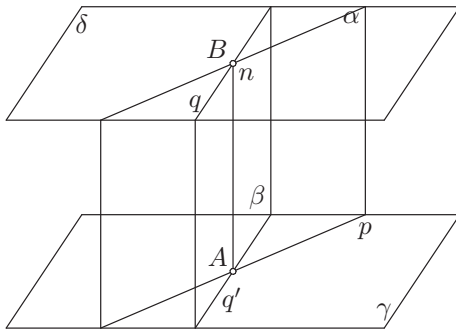
2° Праве p, q се секу у тачки S . Нека је π раван која садржи праве p, q , нека је s права која садржи тачку S и нормална је на равни π , нека је α раван која садржи праве s, p и нека је β раван која садржи праве s, q . За сваку од равни α, β важи да садржи праву s која је нормална на равни π , па важи $\alpha, \beta \perp \pi$. Следи да је $\mathcal{S}_p = \mathcal{S}_\alpha \circ \mathcal{S}_\pi$ и да је $\mathcal{S}_q = \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\beta$, па је $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q = \mathcal{S}_\alpha \circ \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\beta = \mathcal{S}_\alpha \circ \mathcal{S}_\beta = \mathcal{R}_{s, 2\angle(\beta, \alpha)}$. Оријентисани угао диједра чије су плосни β, α једнак је оријентисаном углу између правих q, p у равни π која је нормална на s , па је $\mathfrak{I} = \mathcal{R}_{s, 2\angle(q, p)}$.



3° Праве p, q су паралелне. Нека је π раван која садржи праве p, q , α раван која садржи p и нормална је на равни π и β раван која садржи q и нормална је на равни π . Тада је $\mathcal{S}_p = \mathcal{S}_\alpha \circ \mathcal{S}_\pi$ и $\mathcal{S}_q = \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\beta$, па је $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q = \mathcal{S}_\alpha \circ \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_\beta = \mathcal{S}_\alpha \circ \mathcal{S}_\beta$. Нека је A произвољна тачка праве p и B подножје нормале из тачке A на правој q . Пошто су p, q паралелне, следи да је AB нормална и на правој p . Ако је p' нормала у тачки A на правој p која припада равни α , онда је угао између правих p', AB нагибни угао диједра који граде α, π , што је прав угао због нормалности ових равни. Дакле, $AB \perp \alpha$, а слично је и $AB \perp \beta$, што значи да су равни α, β паралелне и да је $\mathfrak{I} = \mathcal{T}_{2\overrightarrow{BA}}$.

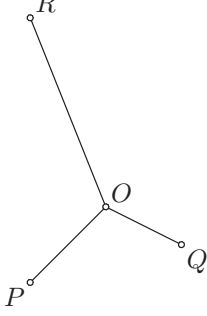


4° Праве p, q су мимоилазне. Тада постоји њихова јединствена заједничка нормала n која их сече редом у тачкама A, B . Нека је α раван која садржи праве p, n , β раван која садржи праве q, n , γ раван која садржи A и нормална је на правој n , а δ раван која садржи B и нормална је на правој n . Равни α, γ се секу по правој p , а пошто раван α садржи праву n која је нормална на равни γ , следи да је $\alpha \perp \gamma$. Према томе, $\mathcal{S}_p = \mathcal{S}_\alpha \circ \mathcal{S}_\gamma$. Слично, равни β, δ се секу по правој q , а пошто раван β садржи праву n која је нормална на равни δ , следи да је $\beta \perp \delta$. Према томе, $\mathcal{S}_q = \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\delta$, па је $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q = \mathcal{S}_\alpha \circ \mathcal{S}_\gamma \circ \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\delta$. Раван β садржи праву n која је нормална на равни γ , па је $\beta \perp \gamma$. Следи да је $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_\alpha \circ \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\gamma \circ \mathcal{S}_\delta$. Нека је q' пресечна права равни β, γ . Тада је $q' \parallel q$ (обе праве припадају равни β , а пошто је $n \perp \gamma$, онда је $n \perp q'$, а важи и $n \perp q$), па је угао између мимоилазних правих q, p исти као угао између правих q', p . Равни α, β се секу по правој n и оријентисани угао диједра чије су пљосни β, α једнак је оријентисаном углу између правих q', p у равни γ која је нормална на n , па је $\mathcal{S}_\alpha \circ \mathcal{S}_\beta = \mathcal{R}_{n, 2\angle(q', p)}$. Можемо рећи да је и оријентисани угао између мимоилазних правих q, p једнак оријентисаном углу између правих q', p . Такође, равни γ, δ су нормалне на правој n , па је $\gamma \parallel \delta$. Следи да је $\mathcal{S}_\gamma \circ \mathcal{S}_\delta = \mathcal{T}_{2\vec{BA}}$. Према томе, $\mathfrak{I} = \mathcal{R}_{n, 2\angle(q, p)} \circ \mathcal{T}_{2\vec{BA}} = \mathcal{Z}_{n, 2\angle(q, p), 2\vec{BA}}$.



7. Нека су OP, OQ, OR три међусобно нормалне дужи простора. Доказати да је композиција $Z_{\overrightarrow{OR}} \circ Z_{\overrightarrow{OQ}} \circ Z_{\overrightarrow{OP}}$ транслација.

Решење:



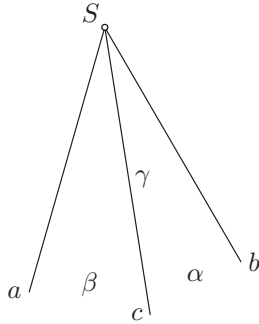
Нека је $\mathfrak{I} = Z_{\overrightarrow{OR}} \circ Z_{\overrightarrow{OQ}} \circ Z_{\overrightarrow{OP}}$. Пошто важи да је $Z_{\overrightarrow{OP}} = S_{OP} \circ T_{\overrightarrow{OP}}$, $Z_{\overrightarrow{OQ}} = T_{\overrightarrow{OQ}} \circ S_{OQ}$ и $Z_{\overrightarrow{OR}} = S_{OR} \circ T_{\overrightarrow{OR}}$, следи да је

$$\mathfrak{I} = S_{OR} \circ T_{\overrightarrow{OR}} \circ T_{\overrightarrow{OQ}} \circ S_{OQ} \circ S_{OP} \circ T_{\overrightarrow{OP}}.$$

Композиција транслација $T_{\overrightarrow{OR}} \circ T_{\overrightarrow{OQ}}$ је транслација $T_{\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}}$, а на основу претходног задатка је $S_{OQ} \circ S_{OP}$ ротација око праве која је у тачки O нормална на OP, OQ , што је права OR , за двоструки угао који заклапају праве OP, OQ , што је опружени угао, јер су праве OP, OQ међусобно нормалне. Дакле, $S_{OQ} \circ S_{OP} = S_{OR}$, па је $\mathfrak{I} = S_{OR} \circ T_{\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}} \circ S_{OR} \circ T_{\overrightarrow{OP}}$. На основу теореме о трансмутацији је $S_{OR} \circ T_{\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}} \circ S_{OR}$ транслација, па је $\mathfrak{I}$ композиција те транслације и транслације $T_{\overrightarrow{OP}}$, што значи да је $\mathfrak{I}$ транслација.

8. Доказати да је у еуклидском простору композиција састављена од три равanske рефлексije којима су основе одређене пљоснима триедра осноротациона рефлексija.

Решење: Нека је α раван која садржи пљосан Sbc , β раван која садржи пљосан Sac и γ раван која садржи пљосан Sab триедра $Sabc$. Потребно је доказати да је изометрија $\mathfrak{I} = \mathcal{S}_\gamma \circ \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha$ осноротациона рефлексija.



Изометрија $\mathfrak{I}$ је индиректна, јер је композиција трију индиректних изометрија. Како тачка S припада свим трина равнима α, β, γ , следи

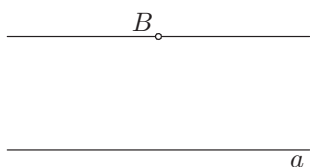
$$\mathfrak{I}(S) = \mathcal{S}_\gamma \circ \mathcal{S}_\beta \circ \mathcal{S}_\alpha(S) = \mathcal{S}_\gamma \circ \mathcal{S}_\beta(S) = \mathcal{S}_\gamma(S) = S,$$

па је S фиксна тачка изометрије $\mathfrak{I}$. Према томе, $\mathfrak{I}$ није клизајућа рефлексija. Претпоставимо да је $\mathfrak{I}$ равanska рефлексija. На основу теореме 37, онда равни α, β, γ припадају једном прамену. Како се равни α, β секу по правој која садржи ивицу Sc триедра $Sabc$, тај прамен мора бити коаксијални прамен равни, те онда раван γ такође садржи ту праву, па и ивицу Sc . Међутим, како раван γ садржи ивице Sa, Sb , следи да све ивице триедра $Sabc$ припадају равни γ , што није могуће. Дакле, $\mathfrak{I}$ не може бити равanska рефлексija, па мора бити осноротациона рефлексija.

8 Хиперболичка геометрија

До сад смо изучавали еуклидску геометрију, која је заснована на 5 група аксиома (инциденције, распореда, подударности, непрекидности и паралелности). Без аксиоме паралелности се може доказати да за сваку праву a и тачку B која јој не припада важи да у њима одређеној равни постоји бар једна права која садржи тачку B , а с правом a нема заједничких тачака. Аксиома паралелности одређује број таквих правих.

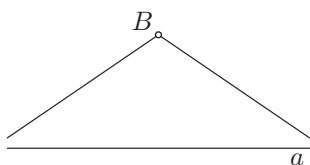
Аксиома (Плејфер). *Постоје права a и тачка B која јој не припада такве да у њима одређеној равни не постоји више од једне праве која садржи тачку B , а с правом a нема заједничких тачака.*



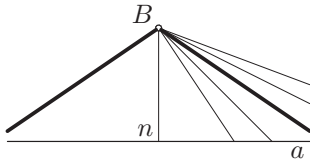
Може се доказати да ако постоје права a и тачка B с овом особином, онда свака права и тачка која јој не припада имају ову особину. Према томе, у еуклидској геометрији за сваку праву a и тачку B која јој не припада важи да у њима одређеној равни постоји јединствена права која садржи B и паралелна је са a .

Ова аксиома је еквивалентна петом постулату из Еуклидових Елемената. Он је скоро две хиљаде година окупирао највеће математичке умове. Еуклидска геометрија је сматрана за једину „исправну” геометрију и многи су покушавали да докажу да је пети Еуклидов постулат последица осталих аксиома и постулата из Елемената. У терминима аксиома на којима се данас заснива еуклидска геометрија, сматрало се да је Плејферова аксиома последица аксиома из осталих група. Међутим, испоставило се да то није тачно и да је Плејферова аксиома независна од осталих. Према томе, сасвим је исправно посматрати геометрију у којој поред аксиома прве четири групе важи и следећа аксиома.

Аксиома (Лобачевски). *Постоје права a и тачка B која јој не припада такве да у њима одређеној равни постоји више од једне праве која садржи тачку B , а с правом a нема заједничких тачака.*



Може се доказати да ако постоје права a и тачка B с овом особином, онда свака права и тачка која јој не припада имају ову особину. Дакле, ако усвојимо ову аксиому, онда за сваку праву a и тачку B која јој не припада важи да у њима одређеној равни постоје бар две праве које садрже тачку B и немају заједничких тачака с правом a . Геометрија заснована на овој аксиоми назива се *хиперболичком геометријом*.



Приметимо да овде није употребљен израз „паралелне”, као што је то био случај у еуклидској геометрији. Разлог томе је што нећемо сваке две дисјунктне праве једне равни звати паралелним, већ само оне које испуњавају одређено својство. Наиме, нека је a права и B тачка која јој не припада. У њима одређеној равни, посматрајмо све полуправе чије је теме тачка B . Неке од тих полуправих секу праву a , а неке је не секу. Нека је n нормала из тачке B на правој a . У свакој од двеју полуравни на које права n дели ту равн могуће је скуп свих полуправих с теменом B поделити на подскуп оних које секу a и подскуп оних које је не секу. При томе, свака полуправа припада тачно једном од тих скупова и не постоји ниједна права из једног подскупа која се налази „између” неких двеју из другог подскупа, односно, не постоји полуправа која не сече a , а припада конвексном углу који граде неке две полуправе које секу праву a , као ни полуправа која сече a , а припада конвексном углу који граде неке две које не секу праву a . На основу аксиома непрекидности и њених последица следи да у свакој од полуравни на које права n дели равн постоји тачно једна полуправа која је **гранична**, тј. која се налази на граници између оних које секу и оних које не секу праву a . Те две граничне полуправе не секу праву a и њих називамо *паралелним* правој a , а тако називамо и праве које садрже те полуправе. Све остале праве које не секу праву a су *хиперпаралелне* правој a .

Оваква дефиниција паралелности уводи се и у еуклидској геометрији, а главну разлику између еуклидске и хиперболичке геометрије чини то што у еуклидској геометрији полуправе које су паралелне правој a припадају **једној правој**, а у хиперболичкој геометрији ове полуправе припадају **двема правима**.

Хиперболичка геометрија има доста сличности с еуклидском геометријом, јер деле четири групе аксиома. Све теореме еуклидске геометрије, које се могу доказати без коришћења Плејферове аксиоме и њених

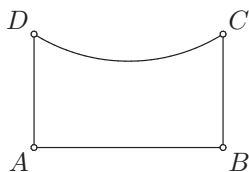
последица, важе и у хиперболичкој геометрији. Примери оваквих теорема су Ставови о подударности троуглова (наведени у глави 1), постојање јединствене праве једне равни која садржи дату тачку и управна је на датој правој, Кошијева теорема о нормалности праве и равни, постојање јединствене праве у простору која садржи дату тачку и управна је на датој равни итд. Исто тако, теореме еуклидске геометрије, које се не могу доказати без коришћења Плејферове аксиоме и њених последица, не важе у хиперболичкој геометрији. Примере оваквих теорема видећемо кроз задатке, а за сада наведимо неке кључне ствари које важе у хиперболичкој геометрији.

1. Збир углова троугла је мањи од 180° .
2. Збир углова простог, равног четвороугла је мањи 360° .
3. Постоји права у равни нормална на једном краку оштрог угла која не сече његов други крак.
4. Централни угао је већи од двоструког одговарајућег периферијског угла.
5. Постоји троугао око којег се не може описати круг.

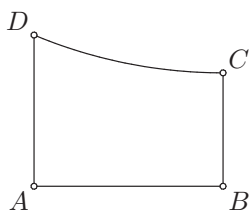
Збир углова у троуглу може бити било који угао мањи од 180° , односно није исти за све троуглове. Исти закључак важи и за просте, равне четвороуглове.

Пошто паралелност нема исти смисао као у еуклидској геометрији, немамо паралелограм, нити тврђења везана за паралелограм. Пошто је збир углова сваког простог, равног четвороугла мањи од 360° , не постоји четвороугао с четири права угла, па не постоји ни правоугаоник. У намери да докажу Плејферову аксиому на основу аксиома осталих група, математичари Ђ. Ђ. Сакери и Ј. Х. Ламберт посматрали су одређене врсте четвороуглова и покушавали су да докажу да они морају бити правоугаоници. Наведимо дефиниције ових четвороуглова.

Дефиниција 56. Нека је $ABCD$ четвороугао у равни такав да важи $\angle DAB = \angle ABC = 90^\circ$ и $AD = BC$. Овакав четвороугао назива се *Сакеријевим четвороуглом*. Страница AB назива се *основицом* Сакеријевог четвороугла, страница CD назива се *противосновицом*, а подударне странице AD, BC називају се *бочним страницама* Сакеријевог четвороугла.



Дефиниција 57. Нека је $ABCD$ четвороугао који има три права угла. Овакав четвороугао назива се *Ламбертовим четвороуглом*. Ако су углови $\angle DAB, \angle ABC, \angle BCD$ прави, онда су странице AB, BC основне странице Ламбертовог четвороугла $ABCD$.



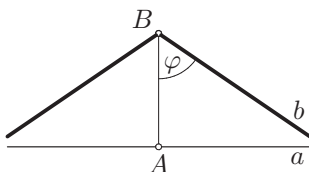
У еуклидској геометрији су Сакеријеви и Ламбертови четвороуглови правоугаоници. У хиперболичкој геометрији не постоје правоугаоници.

У хиперболичкој геометрији важи свих пет ставова о подударности троуглова. Испоставља се да постоји још један став о подударности троуглова.

Став 6 (УУУ). Нека су даћи троуглови $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C'$. Ако важи $\angle BAC = \angle B'A'C', \angle ABC = \angle A'B'C', \angle ACB = \angle A'C'B'$, онда следи да је $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

Последица. У хиперболичкој геометрији сличности је исто што и подударности.

Према томе, у хиперболичкој геометрији не важе ни Талесова теорема ни њене последице.



Вратимо се аксиоми Лобачевског и дефиницији паралелности правих. Нека је a права и B тачка која јој не припада. Нека је A подножје нормале из тачке B на правој a , Bb једна од двеју полуправих с теменом B које су паралелне правој a и $\angle ABb = \varphi$. Пошто је полуправа Bb гранична полуправа, која у полуравни с рубом BA која садржи полуправу Bb раздваја полуправе с теменом B које секу праву a од оних које је не секу, следи да било која полуправа с теменом B , која припада углу $\angle ABb$, сече праву a . Дакле, ако је полуправа Bp таква да је $\angle ABp < \varphi$, онда Bp сече a , а ако је $\varphi < \angle ABp < \pi$, онда Bp не сече a , али није ни паралелна правој a . Угао φ се назива *углом паралелности* тачке B у односу на праву a .

Угао паралелности је, наравно, могуће дефинисати и у еуклидској геометрији. Међутим, у еуклидској геометрији је угао паралелности увек

прав, па није претерано занимљив за разматрање. За разлику од еуклидске геометрије, у хиперболичкој геометрији је угао паралелности увек оштар. Није тешко доказати да угао паралелности зависи само од дужине дужи AB . Зато је могуће дефинисати функцију $\Pi : (0, +\infty) \rightarrow (0, \frac{\pi}{2})$, која слика дужи у одговарајуће углове паралелности. Дакле, $\Pi(AB) = \varphi$. Ова функција назива се *функцијом Лобачевског*. Она је непрекидна, строго опадајућа и важи $\lim_{x \rightarrow 0+} \Pi(x) = \frac{\pi}{2}$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Pi(x) = 0$. Пошто је строго опадајућа, постоји њен инверз Π^{-1} . У задацима ћемо сматрати да су функције Π, Π^{-1} познате.

Што се тиче хиперпаралелности, важи следећа теорема.

Теорема 48. *Две праве у равни су хиперпаралелне ако и само ако постоји права n која је управна на обема. Ако таква права постоји, она је јединствена.*

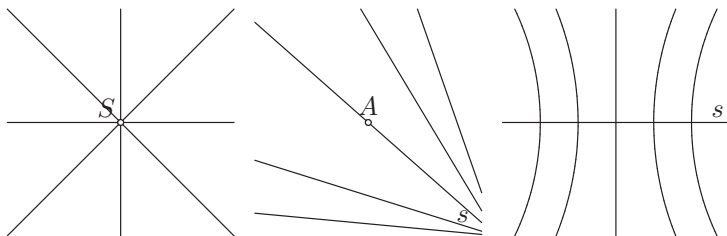
Ако би постојале две заједничке нормале хиперпаралелних правих, њихове пресечне тачке са тим правима биле би темена правоугаоника (четвороугла који има четири права угла), а правоугаоник не постоји у хиперболичкој геометрији.

Споменимо још који типови праменова правих постоје у равни хиперболичке геометрије.

Дефиниција 58. 1. Скуп свих правих једне равни које садрже неку тачку S те равни чине *елиптички прамен*, тј. *прамен конкурентних правих*. Тачка S је *средиште* тог прамена.

2. Скуп свих правих једне равни које су паралелне некој полуправој As те равни, заједно са правом која садржи ту полуправу, чине *параболички прамен*, тј. *прамен паралелних правих* (у истом смеру).

3. Скуп свих правих једне равни које су управне на некој правој s те равни чине *хиперболички прамен*, тј. *прамен хиперпаралелних правих* које имају исту заједничку нормалу s . Права s је *основица* тог прамена.

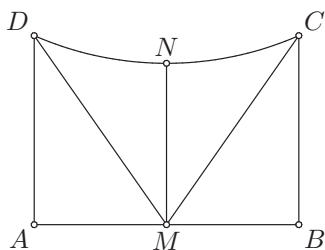


Нека је $\mathcal{X}$ прамен правих у равни и X произвољна тачка те равни која није средиште елиптичког прамена (ако је $\mathcal{X}$ елиптички прамен). *Елицикл* је скуп тачака у равни које су носиметричне тачке X у односу на праве прамена $\mathcal{X}$. Ако је $\mathcal{X}$ елиптички прамен са средиштем S ,

еписикл је *круа* са *средиштем* (центром) S и *полупречником* SX . Ако је $\mathcal{X}$ параболички прамен, еписикл је *орисикл*. Ако је $\mathcal{X}$ хиперболички прамен с основицом s , еписикл је скуп свих тачака Y у полуравни sX таквих да је $YY' = XX'$, где су Y', X' редом подножја нормала из Y, X на правој s . Тај еписикл је *еквидистанција* с основицом s и висином h .

1. Праве одређене основицом и противосновицом Сакеријевог четвороугла су хиперпаралелне. Доказати.

Решење: Нека су M, N редом средишта основице AB и противосновице CD Сакеријевог четвороугла $ABCD$. Докажимо да је MN заједничка нормала правих AB, CD , одакле ће следити да су ове праве хиперпаралелне.

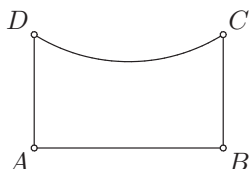


Посматрајмо троуглове $\triangle AMD, \triangle BMC$. Пошто је $AM = MB$ (јер је M средиште AB), $\angle DAM = \angle CBM = 90^\circ$ и $AD = BC$ (јер је $ABCD$ Сакеријев четвороугао), на основу става СУС следи да су ови троуглови подударни. Дакле, следи да је $MD = MC$, $\angle DMA = \angle CMB = \varphi$ и $\angle MDA = \angle MCB = \psi$. Посматрајмо сада троуглове $\triangle DNM, \triangle CNM$. Пошто је $DN = CN$ (јер је N средиште CD), $DM = CM$ (добито из претходне подударности) и $NM = NM$, следи да су ови троуглови подударни. Према томе, одавде следи да је $\angle MDN = \angle MCN = \theta$, $\angle DMN = \angle CMN = \eta$ и $\angle MND = \angle MNC = \alpha$. Даље, следи да је $\angle ADC = \angle ADM + \angle MDN = \psi + \theta = \angle BCM + \angle MCN = \angle BCD$ и да је $\angle AMN = \angle AMD + \angle DMN = \varphi + \eta = \angle BMC + \angle CMN = \angle BMN = \beta$. Пошто је $180^\circ = \angle AMB = \angle AMN + \angle BMN = \beta + \beta = 2\beta$, онда је $\beta = 90^\circ$, па је $MN \perp AB$. Такође, пошто је $180^\circ = \angle DNM + \angle CNM = \alpha + \alpha = 2\alpha$, онда је $\alpha = 90^\circ$, па је $MN \perp CD$. Дакле, MN је заједничка нормала правих AB, CD , што значи да су оне хиперпаралелне.

Теорема 49. *Права која садржи средишта основице и противосновице Сакеријевог четвороугла је њихова заједничка нормала.*

2. Углови на противосновици Сакеријевог четвороугла су подударни и оштри. Доказати.

Решење:



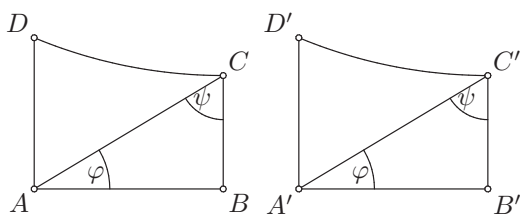
У претходном задатку смо доказали да је $\angle ADC = \angle BCD = \gamma$. Дакле, углови на противосновици су подударни. Претпоставимо супротно, да су ови углови прави или тупи, тј. да је $\gamma \geq 90^\circ$. Тада за збир углова четвороугла $ABCD$ важи $\angle DAB + \angle ABC + \angle BCD + \angle ADC = 90^\circ + 90^\circ + \gamma + \gamma \geq 180^\circ + 2 \cdot 90^\circ = 360^\circ$, што је у контрадикцији с чињеницом да је збир углова простог, равног четвороугла мањи од 360° . Дакле, претпоставка да је $\gamma \geq 90^\circ$ није тачна, па је $\gamma < 90^\circ$, што значи да су углови на противосновици подударни и оштри.

3. Доказати да су два Ламбертова четвороугла $ABCD$ и $A'B'C'D'$ са оштрим угловима D и D' подударна ако је:

- | | |
|-----------------------------|--|
| а) $AB = A'B', BC = B'C'$; | г) $AD = A'D', CD = C'D'$; |
| б) $AB = A'B', AD = A'D'$; | д) $AD = A'D', \angle D = \angle D'$; |
| в) $AD = A'D', BC = B'C'$; | ђ) $AB = A'B', \angle D = \angle D'$. |

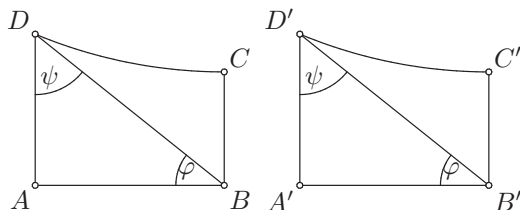
Решење: Нека су $ABCD, A'B'C'D'$ Ламбертови четвороуглови с оштрим угловима код темена D, D' .

а) $AB = A'B', BC = B'C'$



Нека је $AB = A'B', BC = B'C'$. Како је и $\angle ABC = \angle A'B'C'$ (прави углови), према ставу СУС следи да је $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$. Према томе, $AC = A'C', \angle BAC = \angle B'A'C' = \varphi$ и $\angle BCA = \angle B'C'A' = \psi$. Углови $\angle DAB, \angle D'A'B'$ су прави, па следи да је $\angle DAC = 90^\circ - \varphi = \angle D'A'C'$. Слично, $\angle DCA = 90^\circ - \psi = \angle D'C'A'$. Дакле, према ставу УСУ следи да је $\triangle DAC \cong \triangle D'A'C'$, па је $AD = A'D', CD = C'D'$ и $\angle ADC = \angle A'D'C'$. Према томе, четвороуглови $ABCD, A'B'C'D'$ имају подударне странице и углове, па су и они међусобно подударни.

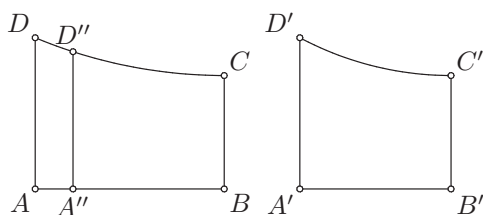
б) $AB = A'B'$, $AD = A'D'$



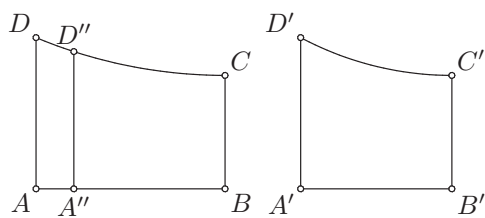
Нека је $AB = A'B'$, $AD = A'D'$. Како је и $\angle BAD = \angle B'A'D'$ (прави углови), према ставу СУС следи да је $\triangle ABD \cong \triangle A'B'D'$. Према томе, $BD = B'D'$, $\angle ABD = \angle A'B'D' = \varphi$ и $\angle ADB = \angle A'D'B' = \psi$. Углови $\angle ABC, \angle A'B'C'$ су прави, па следи да је $\angle DBC = 90^\circ - \varphi = \angle D'B'C'$. Такође, $\angle BCD = \angle B'C'D'$ (прави углови), па према ставу УУС следи $\triangle BCD \cong \triangle B'C'D'$. Дакле, следи да је $BC = B'C'$, $CD = C'D'$ и $\angle BDC = \angle B'D'C' = \theta$. Како је $\angle ADC = \psi + \theta = \angle A'D'C'$, следи да су четвороугловима $ABCD, A'B'C'D'$ подударне све странице и углови, па су и они међусобно подударни.

Напомена 14. Додатно, доказали смо да ако су $ABCD, A'B'C'D'$ Ламбертови четвороуглови с оштрим угловима код темена D, D' такви да је $BC = B'C', CD = C'D'$, онда су они међусобно подударни. Заиста, ако променимо имена тачкама A, B, C, D у P, N, M, Q и A', B', C', D' у P', N', M', Q' , онда су $MNPQ, M'N'P'Q'$ Ламбертови четвороуглови с оштрим угловима код темена Q, Q' такви да је $MN = M'N', MQ = M'Q'$, па је, на основу претходног, $MNPQ \cong M'N'P'Q'$. С обзиром на то да су $MNPQ, M'N'P'Q'$ друга имена за четвороуглове $ABCD, A'B'C'D'$, следи да је $ABCD \cong A'B'C'D'$.

в) $AD = A'D', BC = B'C'$



Претпоставимо да је $AB \neq A'B'$. Без умањења општости, можемо претпоставити да је $AB > A'B'$. Тада на дужи AB постоји тачка A'' таква да је $A''B = A'B'$. Нека је n нормала на AB у тачки A'' . Права n сече дуж CD . Заиста, права n сече дуж AB у тачки A'' и не сече дуж BC , зато што су n и BC хиперпаралелне (AB им је заједничка нормала), па на основу Пашове аксиоме n сече дуж AC . Пошто n не сече ни дуж AD , зато што су n и AD хиперпаралелне (AB им је заједничка нормала), на основу Пашове аксиоме n сече дуж CD у некој тачки D'' .

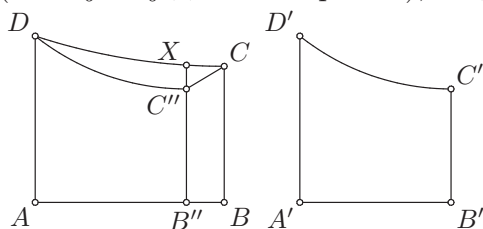


Четвороугао $A''BCD''$ је Ламбертов, с оштрим углом код темена D'' и важи $A''B = A'B'$ и $BC = B'C'$. На основу дела **а)** следи да је $A''BCD'' \cong A'B'C'D'$, па је $A''D'' = A'D' = AD$. Следи да је четвороугао $AA''D''D$ Сакеријев, па су углови $\angle ADD''$, $\angle DD''A''$ на противосновици DD'' оштри. Међутим, и угао $\angle A''D''C$ је оштар, па је $180^\circ = \angle DD''C = \angle DD''A'' + \angle A''D''C < 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, што је немогуће.

Дакле, претпоставка да је $AB \neq A'B'$ је погрешна, па је $AB = A'B'$. Пошто Ламбертови четвороуглови $ABCD$, $A'B'C'D'$ задовољавају да је $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, на основу дела **а)** следи да су они међусобно подударни.

г) $AD = A'D'$, $CD = C'D'$

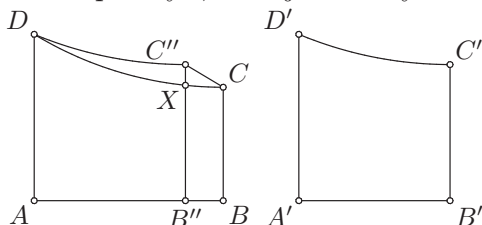
Претпоставимо да је $AB \neq A'B'$. Без умањења општости, можемо претпоставити да је $AB > A'B'$. Тада на дужи AB постоји тачка B'' таква да је $AB'' = A'B'$. Нека је n нормала на AB у тачки B'' и нека је C'' подножје нормале из D на правој n . Како су AB , DC'' хиперпаралелне (n им је заједничка нормала), следи да важи $D, C'' \asymp AB$.



Четвороугао $AB''C''D$ је Ламбертов, с оштрим углом код темена D и важи $AB'' = A'B'$, $AD = A'D'$, па на основу дела **б)** следи да су четвороуглови $AB''C''D$, $A'B'C'D'$ подударни. Дакле, $DC'' = D'C' = DC$. Слично као малопре, на основу Пашове аксиоме права n сече најпре дуж AC , а затим и дуж CD у некој тачки X . Важи $D, X \asymp AB$, па због $D, C'' \asymp AB$, следи да важи $X, C'' \asymp AB$. Тачка X је различита од тачке C'' , јер би у супротном због $DC'' = DC$ тачке C, C'' биле идентичне, што значи да би из тачке C постојале две различите нормале на правој AB (праве n и CB). Према томе, важи $\mathcal{B}(B'', C'', X)$ или $\mathcal{B}(B'', X, C'')$.

Нека је $\mathcal{B}(B'', C'', X)$. Како полуправа $C''X$ сече дуж CD , следи да она припада углу $\angle DC''C$. Угао $\angle DC''X$ је прав, па следи да је угао $\angle DC''C$ туп. Међутим, троугао $\triangle DC''C$ је једнакокрак, па су углови

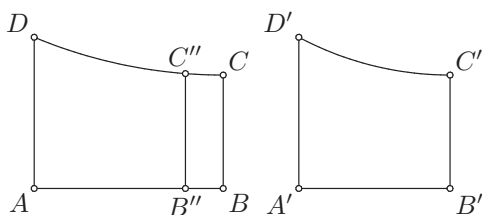
$\angle DC''C, \angle DCC''$ подударни и оштри. Дакле, угао $\angle DC''C$ је истовремено и оштар и туп, што је немогуће.



Нека је $B(B'', X, C'')$. Како полуправа $C''X$ сече дуж CD , следи да она припада углу $\angle DC''C$. Угао $\angle DC''B''$ је прав, па следи да је угао $\angle DC''C$ туп. Међутим, троугао $\triangle DC''C$ је једнакокрак, па су углови $\angle DC''C, \angle DCC''$ подударни и оштри. Дакле, угао $\angle DC''C$ је истовремено и оштар и туп, што је немогуће.

Дакле, претпоставка да је $AB \neq A'B'$ је погрешна, па је $AB = A'B'$. Пошто Ламбертови четвороуглови $ABCD, A'B'C'D'$ задовољавају да је $AB = A'B', AD = A'D'$, на основу дела б) следи да су они међусобно подударни.

д) $AD = A'D', \angle D = \angle D'$

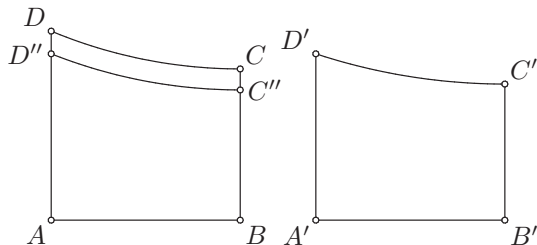


Претпоставимо да је $AB \neq A'B'$. Без умањења општости, можемо претпоставити да је $AB > A'B'$. Тада на дужи AB постоји тачка B'' таква да је $AB'' = A'B'$. Нека је n нормала на AB у тачки B'' и нека је C'' подножје нормале из тачке D на правој n .

Четвороугао $AB''C''D$ је Ламбертов с оштрим углом код темена D и важи $AB'' = A'B', AD = A'D'$. На основу дела б) следи да су четвороуглови $AB''C''D, A'B'C'D'$ подударни, па је $\angle ADC'' = \angle A'D'C'$, а по претпоставци, четвороуглови $ABCD, A'B'C'D'$ имају подударне углове код темена D, D' , па је $\angle ADC'' = \angle ADC$. Према томе, тачка C'' припада правој CD , па четвороугао $B''BCC''$ има четири права угла, што је немогуће.

Дакле, претпоставка да је $AB \neq A'B'$ је погрешна, па је $AB = A'B'$. Пошто Ламбертови четвороуглови $ABCD, A'B'C'D'$ задовољавају да је $AB = A'B', AD = A'D'$, на основу дела б) следи да су они међусобно подударни.

ђ) $AB = A'B'$, $\angle D = \angle D'$



Претпоставимо да је $AD \neq A'D'$. Без умањења општости, можемо претпоставити да је $AD > A'D'$. На дужи AD постоји тачка D'' таква да је $AD'' = A'D'$. Нека је C'' подножје нормале из D'' на правој BC .

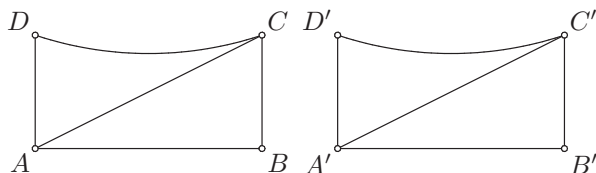
Четвороугао $ABC''D''$ је Ламбертов, с оштрим углом код темена D'' и важи $AB = A'B'$, $AD'' = A'D'$. На основу дела б) следи да су четвороуглови $ABC''D''$, $A'B'C'D'$ подударни, па је $\angle AD''C'' = \angle A'D'C' = \varphi$, па је $\angle C''D''D = 180^\circ - \varphi$. По претпоставци, четвороуглови $ABCD$, $A'B'C'D'$ имају подударне углове код темена D, D' , па је $\angle D''DC = \varphi$. Дакле, збир углова четвороугла $D''C''CD$ је $180^\circ - \varphi + 90^\circ + 90^\circ + \varphi = 360^\circ$, што је немогуће.

Дакле, претпоставка да је $AD \neq A'D'$ је погрешна, па је $AD = A'D'$. Пошто Ламбертови четвороуглови $ABCD$, $A'B'C'D'$ задовољавају да је $AB = A'B'$, $AD = A'D'$, на основу дела б) следи да су они међусобно подударни.

4. Доказати да су два Сакеријева четвороугла $ABCD$ и $A'B'C'D'$ са основама AB и $A'B'$ подударна ако је:

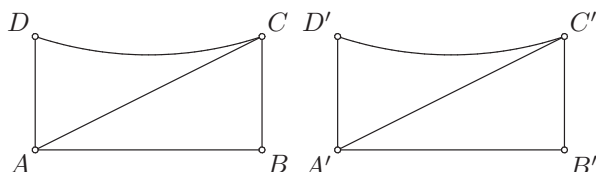
- | | |
|--------------------------------|---|
| а) $AB = A'B'$, $BC = B'C'$; | г) $AB = A'B'$, $\angle C = \angle C'$; |
| б) $AB = A'B'$, $CD = C'D'$; | д) $BC = B'C'$, $\angle C = \angle C'$; |
| в) $BC = B'C'$, $CD = C'D'$; | ђ) $CD = C'D'$, $\angle C = \angle C'$. |

Решење: а) $AB = A'B'$, $BC = B'C'$



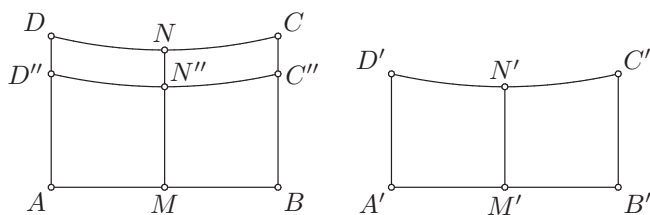
Нека је $AB = A'B'$, $BC = B'C'$. Како је и $\angle ABC = \angle A'B'C'$ (прави углови), према ставу СУС следи да је $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$. Према томе, $AC = A'C'$, $\angle BAC = \angle B'A'C' = \varphi$ и $\angle BCA = \angle B'C'A' = \psi$. Углови $\angle DAB$, $\angle D'A'B'$ су прави, па следи да је $\angle DAC = 90^\circ - \varphi = \angle D'A'C'$. Такође, четвороуглови $ABCD$, $A'B'C'D'$ су Сакеријеви, па је $AD = BC$

и $A'D' = B'C'$, па важи $AD = A'D'$. Дакле, према ставу СУС следи да је $\triangle DAC \cong \triangle D'A'C'$, па следи да је $CD = C'D'$, $\angle ADC = \angle A'D'C'$ и $\angle ACD = \angle A'C'D' = \theta$. Према томе, $\angle BCD = \psi + \theta = \angle B'C'D'$, па четвороуглови $ABCD, A'B'C'D'$ имају подударне странице и углове. Следи да су они међусобно подударни.



б) $AB = A'B', CD = C'D'$

Претпоставимо да је $BC \neq B'C'$. Без умањења општости, можемо претпоставити да је $BC > B'C'$. Тада на дужи BC постоји тачка C'' таква да је $BC'' = B'C'$. Пошто је $AD = BC$ и $A'D' = B'C'$, на дужи AD постоји тачка D'' таква да је $AD'' = A'D'$.

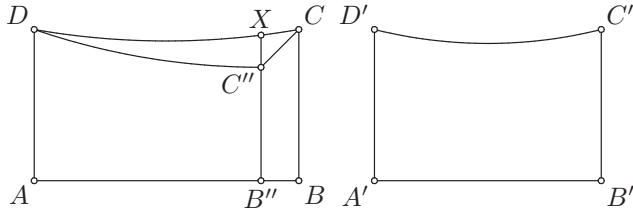


Четвороуглови $ABC''D'', A'B'C'D'$ су Сакеријеви чије су основице $AB, A'B'$ такви да је $AB = A'B', BC'' = B'C'$, па су на основу дела а) ови четвороуглови подударни. Следи да је $C''D'' = C'D' = CD$. Нека су M, N, N'' редом средишта страница $AB, CD, C''D''$. Права MN је заједничка нормала правих AB, CD , а права MN'' је заједничка нормала правих $AB, C''D''$. Пошто у тачки M постоји јединствена нормала на правој AB , следи да су тачке M, N, N'' колинеарне, па је NN'' заједничка нормала правих $CD, C''D''$. Четвороугао $N''NDD''$ је Сакеријев, јер је $N''D'' = \frac{1}{2}C''D'' = \frac{1}{2}CD = ND$ и $D''N'', DN \perp NN''$, па су углови $\angle NDD'', \angle N''D''D$ подударни и оштри. Међутим, и угао $\angle AD''N''$ је оштар, па је $180^\circ = \angle AD''N'' + \angle N''D''D < 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, што је немогуће.

Дакле, претпоставка да је $BC \neq B'C'$ је погрешна, па је $BC = B'C'$. Пошто Сакеријеви четвороуглови $ABCD, A'B'C'D'$ задовољавају да је $AB = A'B', BC = B'C'$, на основу дела а) следи да су они међусобно подударни.

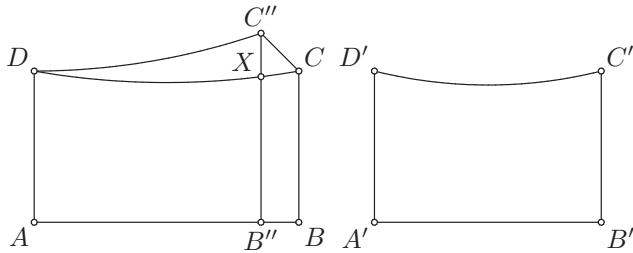
в) $BC = B'C'$, $CD = C'D'$

Претпоставимо да је $AB \neq A'B'$. Без умањења општости, можемо претпоставити да је $AB > A'B'$. Тада на дужи AB постоји тачка B'' таква да је $AB'' = A'B'$. Нека је n права која је у тачки B'' нормална на AB и нека је C'' тачка праве n таква да је $D, C'' \asymp AB$ и $B''C'' = B'C'$.



Четвороуглови $AB''C''D$, $A'B'C'D'$ су Сакеријеви чије су основице AB'' , $A'B'$, такви да је $AB'' = A'B'$, $B''C'' = B'C'$, па су на основу дела а) ови четвороуглови подударни. Следи да је $C''D = C'D' = CD$. Права n сече дуж CD . Заиста, права n сече дуж AB у тачки B'' и не сече BC (јер су n, BC хиперпаралелне), па на основу Пашове аксиоме, права n сече дуж AC . Пошто n не сече ни дуж AD (јер су n, AD хиперпаралелне), на основу Пашове аксиоме n сече дуж CD у некој тачки X . Дакле, важи $D, X \asymp AB$, па пошто важи $D, C'' \asymp AB$, следи да важи $X, C'' \asymp AB$. Тачка X се разликује од тачке C'' , јер би се у супротном због $DC'' = DC$ тачке C'', C поклапале, па би из те тачке постојале две различите нормале на правој AB . Према томе, важи $\mathcal{B}(B'', C'', X)$ или $\mathcal{B}(B'', X, C'')$.

Нека важи $\mathcal{B}(B'', C'', X)$. Троугао $\triangle DC''C$ је једнакокрак, па су углови $\angle DC''C$ и $\angle DCC''$ подударни и оштри. Четвороуглови $B''BCC''$ и $AB''C''D$ су Сакеријеви, јер су $AD, B''C'', BC \perp AB$ и $AD = BC = B'C' = B''C''$, па су углови $\angle B''C''C$, $\angle B''C''D$ оштри. Следи да је $360^\circ = \angle DC''C + \angle CC''B'' + \angle B''C''D < 90^\circ + 90^\circ + 90^\circ = 270^\circ$, што је немогуће.

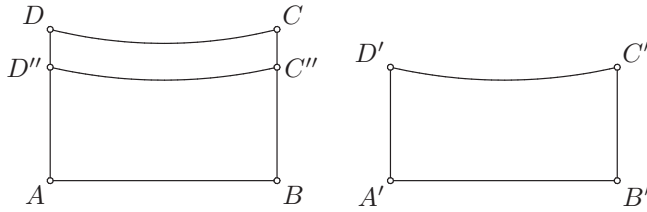


Нека важи $\mathcal{B}(B'', X, C'')$. Троугао $\triangle DC''C$ је једнакокрак, па су углови $\angle DC''C$ и $\angle DCC''$ подударни и оштри. Четвороугао $B''BCC''$ је Сакеријев, јер је $B''C'' = B'C' = BC$ и $B''C'', BC \perp B''B$, па су углови $\angle B''C''C$ и $\angle BCC''$ подударни и оштри. Међутим, онда следи да је $\angle DC''C > \angle B''C''C = \angle BCC'' > \angle DCC'' = \angle DC''C$, што је немогуће.

Дакле, претпоставка да је $AB \neq A'B'$ је погрешна, па је $AB = A'B'$. Пошто Сакеријеви четвороуглови $ABCD, A'B'C'D'$ задовољавају да је $AB = A'B', BC = B'C'$, на основу дела **а)** следи да су они међусобно подударни.

г) $AB = A'B', \angle C = \angle C'$

Претпоставимо да је $BC \neq B'C'$. Без умањења општости, можемо претпоставити да је $BC > B'C'$. Тада на дужи BC постоји тачка C'' таква да је $BC'' = B'C'$ и на дужи AD постоји тачка D'' таква да је $AD'' = A'D' = B'C'$.

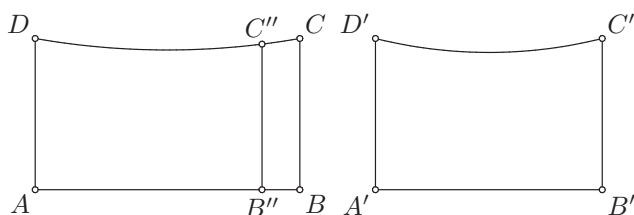


Четвороуглови $ABC''D'', A'B'C'D'$ су Сакеријеви чије су основице $AB, A'B'$ такви да је $AB = A'B', BC'' = B'C'$, па су на основу дела **а)** ови четвороуглови подударни. Следи да је $\angle D''C''B = \angle D'C'B' = \angle DCB$, па је $\angle D''C''C = \pi - \angle DCB$. Слично је и $\angle C''D''D = \pi - \angle DCB$. Међутим, збир углова четвороугла $D''C''CD$ је $\angle DD''C'' + \angle D''C''C + \angle C''CD + \angle CDD'' = 2(\pi - \angle DCB) + 2\angle DCB = 2\pi$, што је немогуће.

Дакле, претпоставка да је $BC \neq B'C'$ је погрешна, па је $BC = B'C'$. Пошто Сакеријеви четвороуглови $ABCD, A'B'C'D'$ задовољавају да је $AB = A'B', BC = B'C'$, на основу дела **а)** следи да су они међусобно подударни.

д) $BC = B'C'$, $\angle C = \angle C'$

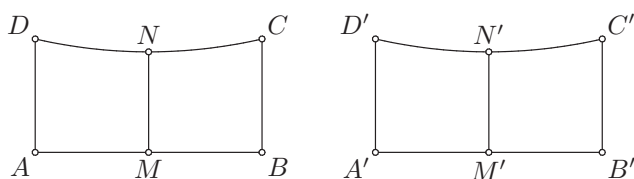
Претпоставимо да је $AB \neq A'B'$. Без умањења општости, можемо претпоставити да је $AB > A'B'$. Тада на дужи AB постоји тачка B'' таква да је $AB'' = A'B'$. Нека је n нормала на AB у тачки B'' и нека је C'' тачка нормале n таква да је $C, C'' \in AB$ и $B''C'' = B'C' = BC$.



Четвороуглови $AB''C''D$, $A'B'C'D'$ су Сакеријеви чије су основице AB'' , $A'B'$ такви да је $AB'' = A'B'$, $B''C'' = B'C'$, па су на основу дела а) ови четвороуглови подударни. Такође, углови код темена D, D' четвороуглова $ABCD$, $A'B'C'D'$ су подударни, па следи да је $\angle ADC'' = \angle A'D'C' = \angle ADC$. Дакле, тачка C'' припада дужи DC . Међутим, и четвороугао $B''BCC''$ је Сакеријев, па је $\angle B''C''C = \angle BCC'' = \angle BCD = \angle B''C''D$. Ови углови су оштри, јер су углови на противосновици Сакеријевог четвороугла оштри. Међутим, како су напоредни углови $\angle DC''B''$, $\angle B''C''C$ подударни, следи да су то прави углови, па су ови углови истовремено и оштри и прави, што је немогуће.

Дакле, претпоставка да је $AB \neq A'B'$ је погрешна, па је $AB = A'B'$. Пошто Сакеријеви четвороуглови $ABCD$, $A'B'C'D'$ задовољавају да је $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, на основу дела а) следи да су они међусобно подударни.

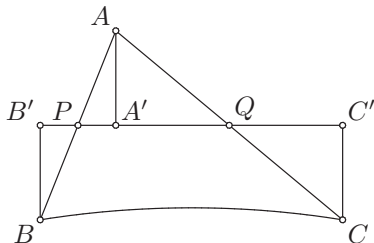
ђ) $CD = C'D'$, $\angle C = \angle C'$



Нека су M, N и M', N' средишта страница AB, CD и $A'B', C'D'$ четвороуглова $ABCD$ и $A'B'C'D'$. Тада су $NMBC$, $N'M'B'C'$ Ламбертови четвороуглови с оштрим угловима код темена C, C' и важи $NC = \frac{1}{2}DC = \frac{1}{2}D'C' = N'C'$ и $\angle C = \angle C'$. На основу дела д) претходног задатка следи да су четвороуглови $NMBC$, $N'M'B'C'$ подударни. Одавде следи да је $BC = B'C'$, па на основу дела д) овог задатка следи да су четвороуглови $ABCD$, $A'B'C'D'$ подударни.

5. Ако су тачке P и Q средишта страница AB и AC троугла ABC , доказати да су праве BC и PQ међу собом хиперпаралелне.

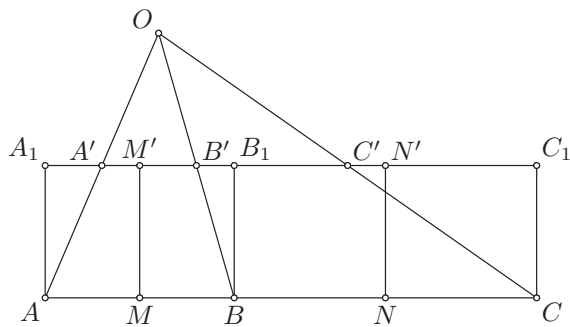
Решение:



Нека су A', B', C' редом подножја нормала из тачака A, B, C на правој PQ . За троуглове $\triangle B'PB'$ и $\triangle A'PA'$ важи $BP = AP$, $\angle B'PB' = \angle A'PA'$ као унакрсни углови и $\angle BB'P = \angle AA'P = 90^\circ$, па су ови троуглови подударни. Следи да је $BB' = AA'$. Слично, троуглови $\triangle AQA'$ и $\triangle CQC'$ су подударни, јер је $AQ = CQ$, $\angle AQA' = \angle CQC'$ као унакрсни углови и $\angle AA'Q = \angle CC'Q = 90^\circ$. Следи да је $AA' = CC'$, па имамо да је $BB' = CC'$. Како је $BB', CC' \perp B'C'$, следи да је четвороугао $B'BCC'$ Сакеријев, па су његова основица $B'C'$ и противосновица BC хиперпаралелне, на основу 1. задатка. Дакле, праве PQ и BC су хиперпаралелне.

6. Ако су A, B, C три разне тачке неке праве l и O тачка изван те праве, доказати да средишта A', B', C' дужи OA, OB, OC не припадају једној правој.

Решение:

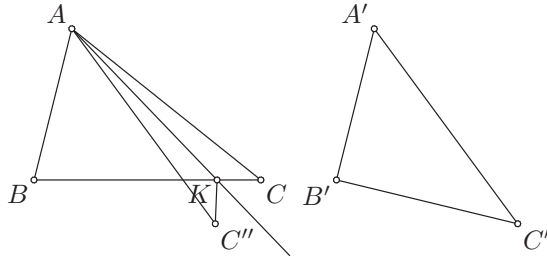


Претпоставимо да тачке A', B', C' припадају правој l' . Нека су A_1, B_1, C_1 редом подножја нормала из A, B, C на правој l' . На основу претходног задатка, четвороуглови A_1ABB_1, B_1BCC_1 су Сакеријеви, па ако са M, N означимо средишта страница AB, BC , а са M', N' средишта страница A_1B_1, B_1C_1 , на основу теореме 49 следи да су MM', NN' нормалне на правима l, l' . Међутим, то није могуће, јер је онда збир углова простог, равног четвороугла $MNN'M'$ једнак $4 \cdot 90^\circ = 360^\circ$.

Дакле, претпоставка да тачке A', B', C' припадају једној правој је погрешна, па тачке A', B', C' не припадају једној правој.

Подсетимо се става 5, који је наведен у глави 6. Овај став важи и у еуклидској и у хиперболичкој геометрији.

Став 5. Нека су $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$ троуглови такви да је $AB = A'B'$ и $AC = A'C'$. Тада је $BC > B'C'$ ако и само ако је $\angle BAC > \angle B'A'C'$.



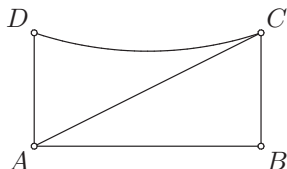
Доказ: $\Leftarrow$: Нека је $\angle BAC > \angle B'A'C'$. Означимо са C'' тачку такву да је $AC'' = A'C' = AC$ и $\angle BAC'' = \angle B'A'C'$. На основу става СУС важи $\triangle ABC'' \cong \triangle A'B'C'$, па је $BC'' = B'C'$. Пошто је $\angle BAC'' < \angle BAC$, полуправа AC'' сече дуж BC . Ако је пресечна тачка управо тачка C'' , очигледно се добија да је $BC > BC'' = B'C'$. Претпоставимо зато да тачка C'' не припада правој BC .

Означимо са K пресечну тачку бисектрисе угла $\angle C''AC$ и дужи BC . На основу става СУС важи $\triangle AKC \cong \triangle AKC''$ ($AK = AK$, $AC = AC''$ и $\angle CAK = \angle C''AK$ јер је AK бисектриса угла $\angle C''AC$), па је $CK = C''K$. Закључујемо да је $BC = BK + KC = BK + KC'' > BC'' = B'C'$, на основу неједнакости троугла.

$\Rightarrow$: Нека је $BC > B'C'$. Не може бити $\angle BAC = \angle B'A'C'$, јер би на основу става СУС било $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$, па због тога и $BC = B'C'$. Такође, не може бити ни $\angle BAC < \angle B'A'C'$, јер би, на основу смера $\Leftarrow$ било $B'C' > BC$. Према томе, мора бити $\angle BAC > \angle B'A'C'$. $\square$

7. Доказати да је у Сакеријевом четвороуглу противосновица већа од основице.

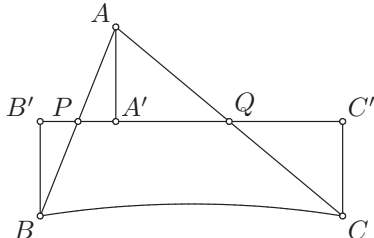
Решење:



Посматрајмо троуглове $\triangle ACB$ и $\triangle CAD$. Пошто важи $CB = AD$ и $AC = CA$, на основу става 5 треба установити у каквом су односу углови $\angle ACB$ и $\angle CAD$. Како важи да је $\angle BAC + \angle CAD = \angle BAD = 90^\circ$ и $\angle BAC + \angle ACB + \angle CBA < 180^\circ$, следи да је $\angle CAD = 90^\circ - \angle BAC$ и $\angle ACB < 180^\circ - 90^\circ - \angle BAC = 90^\circ - \angle BAC$. Дакле, $\angle ACB < \angle CAD$, па према ставу 5 следи да је $AB < CD$, тј. да је основица Сакеријевог четвороугла мања од његове противосновице.

8. Ако су P и Q средишта страница AB и AC троугла ABC , доказати да је $PQ < \frac{1}{2}BC$.

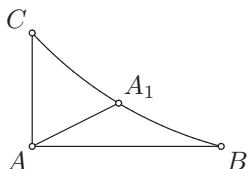
Решење:



Нека су, као у 5. задатку, A', B', C' редом подножја нормала из тачака A, B, C на правој PQ . У 5. задатку смо доказали да је $B'BCC'$ Сакеријев четвороугао с основицом $B'C'$ и противосновицом BC . На основу 7. задатка следи да је $BC > B'C'$. Такође, у 5. задатку смо доказали да је $\triangle B'PQ \cong \triangle A'PQ$ и $\triangle A'Q'Q \cong \triangle C'Q'Q$, па је $B'P = A'P$ и $A'Q = C'Q$. Следи да је $B'C' = B'P + PA' + A'Q + QC' = 2PA' + 2A'Q = 2PQ$, па је $PQ = \frac{1}{2}B'C' < \frac{1}{2}BC$.

9. Нека је A_1 средиште хипотенузе BC правоуглог троугла ABC . Доказати да је дуж AA_1 мања од половине хипотенузе.

Решење:



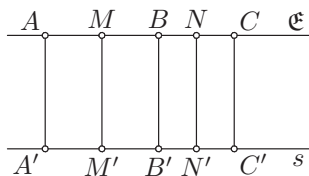
Претпоставимо да је $AA_1 \geq \frac{1}{2}BC$. Тада је $AA_1 \geq A_1B$, па је на основу неједнакости троугла $\angle ABA_1 \geq \angle BAA_1$. Такође, тада је $AA_1 \geq A_1C$, па је на основу неједнакости троугла $\angle ACA_1 \geq \angle CAA_1$. Према томе, следи да је $\angle ABA_1 + \angle ACA_1 \geq \angle BAA_1 + \angle CAA_1 = \angle BAC = 90^\circ$. Међутим, $\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB = 90^\circ + \angle ABA_1 + \angle ACA_1 \geq 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, што је немогуће, јер је у хиперболичкој геометрији збир углова троугла мањи од 180° .

Дакле, претпоставка да је $AA_1 \geq \frac{1}{2}BC$ је погрешна, па је $AA_1 < \frac{1}{2}BC$, тј. дуж AA_1 је мања од половине хипотенузе.

Напомена 15. Овим је доказано да ако постоји центар описаног круга правоуглог троугла $\triangle ABC$, онда он није средиште његове хипотенузе.

10. Ако је висина еквидистанте већа од нуле тада та еквидистанта није права. Доказати.

Решење:

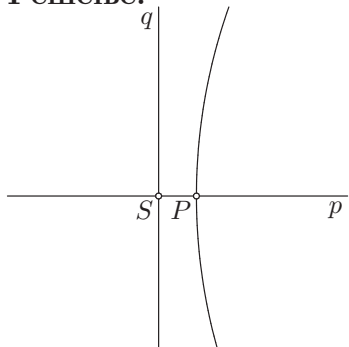


Претпоставимо да је еквидистанта $\mathfrak{E}$, чија је основица права s и висина h већа од нуле, права. Нека су A, B, C произвољне тачке еквидистанте $\mathfrak{E}$ и A', B', C' редом подножја нормала из тачака A, B, C на основици s те еквидистанте. Тада је $AA' = BB' = CC' = h$, па су четвороуглови $A'B'BA, B'C'CB$ Сакеријеви. На основу теореме 49, ако са M, N редом означимо средишта страница AB, BC и са M', N' редом средишта страница $A'B', B'C'$, следи да су праве MM', NN' нормалне на правима $s, \mathfrak{E}$. Међутим, тада је збир углова простог, равног четвороугла $MNN'M'$ једнак $4 \cdot 90^\circ = 360^\circ$, што је немогуће.

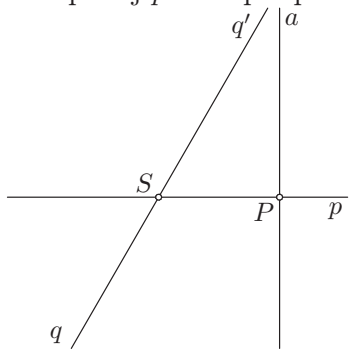
Дакле, претпоставка да је еквидистанта $\mathfrak{E}$, чија је висина већа од нуле, права, није тачна, па еквидистанта $\mathfrak{E}$, чија је висина већа од нуле, није права.

11. Праве p и q секу се у тачки S . Одредити праву a паралелну правој q у одређеном смеру и нормалну на правој p .

Решење:



Ако су праве p, q међусобно нормалне, онда је свака права нормална на правој p хиперпаралелна правој q , па тражена права a не постоји.

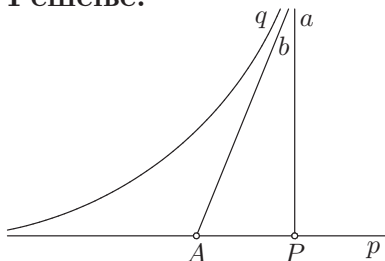


Нека се p, q секу у тачки S и нека нису међусобно нормалне. Претпоставимо да је права a нормална на правој p у тачки P и да је паралелна правој q у одређеном смеру. Нека је Sq' она полуправа праве q с теменом S која је паралелна правој a . По дефиницији, угао $\angle PSq'$ је угао паралелности тачке S у односу на праву a , тј. важи $\angle PSq' = \Pi(SP)$, односно $SP = \Pi^{-1}(\angle PSq')$. Угао $\angle PSq'$ је оштар угао који граде праве p, q .

Нека је са φ означен оштар угао који граде праве p, q . Конструира се дуж $d = \Pi^{-1}(\varphi)$. Затим се на правој p означе тачке P_1, P_2 такве да је $SP_1 = SP_2 = d$, а затим се конструирају нормале a_1, a_2 на правој p у тачкама P_1, P_2 .

12. Праве p и q су паралелне. Одредити праву a паралелну правој q у одређеном смеру и нормалну на правој p .

Решење:

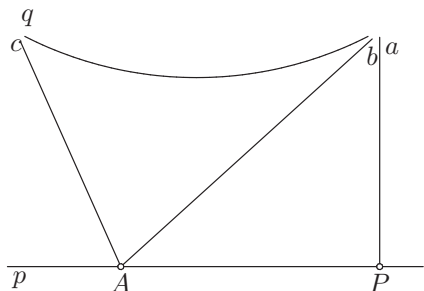


Претпоставимо да је права a нормална на правој p у тачки P и да је паралелна правој q у одређеном смеру. Нека је A произвољна тачка праве p и нека је Ab полуправа с теменом A која је паралелна правима q, a (и није садржана у правој p). Ако се тачке A, P поклапају, онда права a садржи полуправу Ab , па је $Ab \perp p$. Ако се не поклапају, онда је $AP = \Pi^{-1}(\angle PAb)$.

На правој p се означи произвољна тачка A . Затим се конструише полуправа Ab која је паралелна правој q и није садржана у правој p . Ако важи $Ab \perp p$, онда се са a означи права која садржи полуправу Ab . Ако важи $Ab \not\perp p$, онда је један од углова који полуправа Ab гради с правом p оштар, а други је туп. Означимо са φ онај који је оштар. Нека је $d = \Pi^{-1}(\varphi)$. Са P се означи тачка праве p таква да је $AP = d$ и да је $\angle PAb = \varphi$, односно да полуправа AP буде она полуправа која с полуправом Ab гради оштар угао φ . Затим се конструише нормала a на правој p у тачки P .

13. Праве p и q су хиперпаралелне. Одредити праву a паралелну правој q у одређеном смеру и нормалну на правој p .

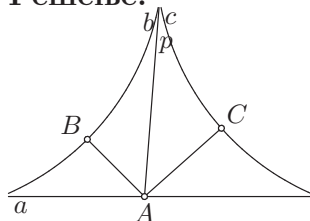
Решење:



Претпоставимо да је права a нормална на правој p у тачки P и да је паралелна правој q у одређеном смеру. Нека је A произвољна тачка праве p и нека је Ab полуправа с теменом A која је паралелна правима q, a . Ако се тачке A, P поклапају, онда права a садржи полуправу Ab , па је $Ab \perp p$. Ако се не поклапају, онда је $AP = \Pi^{-1}(\angle PAb)$.

На правој p се означи произвољна тачка A и конструишу се полуправе Ab, Ac с теменом A које су паралелне правој q . Ако важи $Ab \perp p$, онда се са a_1 означи права која садржи полуправу Ab . Ако важи $Ab \not\perp p$, онда је један од углова који полуправа Ab гради с правом p оштар, а други је туп. Означимо са φ онај који је оштар. Нека је $d_1 = \Pi^{-1}(\varphi)$. Са P_1 се означи тачка праве p таква да је $AP_1 = d_1$ и да је $\angle P_1Ab = \varphi$, односно да полуправа AP_1 буде она полуправа која с полуправом Ab гради оштар угао φ . Затим се конструише нормала a_1 на правој p у тачки P_1 . Аналоган поступак се примењује и за полуправу Ac . Ако важи $Ac \perp p$, онда се са a_2 означи права која садржи полуправу Ac . Ако важи $Ac \not\perp p$, онда је један од углова који полуправа Ac гради с правом p оштар, а други је туп. Означимо са ψ онај који је оштар. Нека је $d_2 = \Pi^{-1}(\psi)$. Са P_2 се означи тачка праве p таква да је $AP_2 = d_2$ и да је $\angle P_2Ac = \psi$, односно да полуправа AP_2 буде она полуправа која с полуправом Ac гради оштар угао ψ . Затим се конструише нормала a_2 на правој p у тачки P_2 .

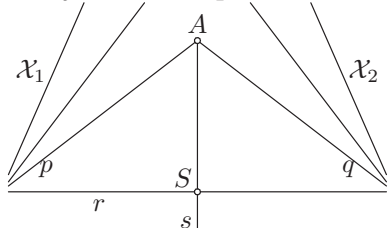
Решение:



Угао између правих b', c' је $\angle BAC = \varphi + \psi$, а пошто је $180^\circ = \varphi + \varphi + \psi + \psi = 2(\varphi + \psi)$, следи да је $\varphi + \psi = 90^\circ$. Према томе, праве b', c' су међусобно нормалне.

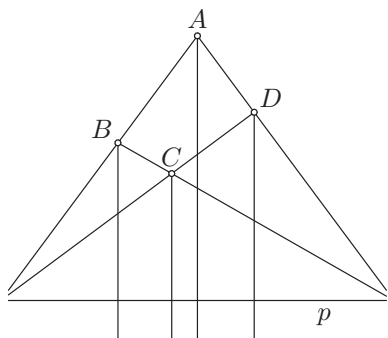
15. Два разна параболичка прамена имају заједничку праву. Доказати.

Решење: Нека су $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ два разна параболичка прамена. Нека је A произвольна тачка у равни и нека је Ap полуправа која је паралелна свим правима прамена $\mathcal{X}_1$ и Aq полуправа која је паралелна свим правима прамена $\mathcal{X}_2$. Ако полуправе Ap, Aq припадају једној правој r , онда је права r заједничка права тих двају праменова.



Ако полуправе Ap, Aq не припадају једној правој, нека је онда полуправа As бисектриса угла $\angle pAq$, S тачка бисектрисе As таква да је $AS = \Pi^{-1}(\angle sAp)$ и r права која садржи S и нормална је на As . Како је $\angle SAP = \Pi(SA)$ угао паралелности тачке A у односу на праву r , следи да је r паралелна полуправој Ap , па припада прамену $\mathcal{X}_1$. Како је As бисектриса угла $\angle pAq$, следи да је $\angle sAp = \angle sAq$, па је $\angle sAq = \Pi(SA)$, што значи да је права r паралелна и полуправој Aq . Следи да права r припада прамену $\mathcal{X}_2$, па је права r заједничка права тих двају праменова.

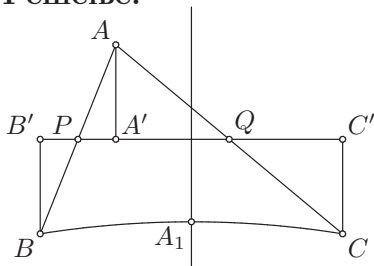
Решение:



224

17. Доказати да за три неколинеарне тачке A, B, C важи $\Pi(\frac{BC}{2}) < \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC)$.

Решење:



Нека су, као у 5. задатку, P, Q средишта страница AB, AC троугла $\triangle ABC$ и нека су A', B', C' редом подножја нормала из тачака A, B, C на правој PQ . Нека је A_1 средиште странице BC и нека је m њена медијатриса. У 5. задатку смо доказали да је четвороугао $C'B'BC$ Сакеријев, па је медијатриса његове противосновице BC нормална на $B'C'$. Како је полуправа BB' хиперпаралелна медијатриси m , јер им је права $B'C'$ заједничка управна, по дефиницији угла паралелности следи да је $\Pi(A_1B) < \angle A_1BB'$. Дакле, $\Pi(\frac{BC}{2}) < \angle CBB'$. Треба још само израчунати угао $\angle CBB'$.

Јасно је да је $\angle CBB' = \angle CBP + \angle PBB'$ и $\angle CBB' = \angle BCC' = \angle BCQ + \angle QCC'$. У 5. задатку смо доказали да је $\angle PBB' = \angle PAA'$ и $\angle QCC' = \angle QAA'$. Следи да је

$$\begin{aligned} 2\angle CBB' &= \angle CBB' + \angle BCC' = \angle CBA + \angle PAA' + \angle BCA + \angle QAA' \\ &= \angle ABC + \angle ACB + \angle BAC, \end{aligned}$$

па је $\angle CBB' = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC)$. Према томе, важи да је $\Pi(\frac{BC}{2}) < \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC)$.

18. Ако је у равни Лобачевског дат троугао ABC код кога је $\angle C$ прав, тј. $\angle C = R$, затим $\angle A = \Pi(a')$, $\angle B = \Pi(b')$, $BC = a$ и $AB = c$, доказати да је:

а) $\angle A = \Pi(b) - \Pi(c + b')$;

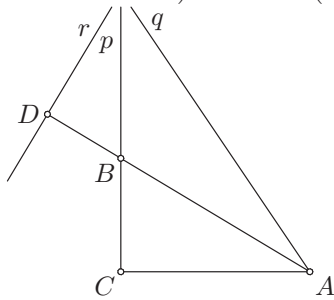
б) $\angle A = \begin{cases} \Pi(c - b') - \Pi(b) & , \text{ за } b' < c \\ 2R - \Pi(b) - \Pi(b' - c) & , \text{ за } b' > c \end{cases}$;

в) $\angle A = \begin{cases} \frac{1}{2}[\Pi(c - b') - \Pi(c + b')] & , \text{ за } b' < c \\ R - \frac{1}{2}[\Pi(b' + c) + \Pi(b' - c)] & , \text{ за } b' > c \end{cases}$;

г) $\Pi(b) = \begin{cases} \frac{1}{2}[\Pi(c + b') + \Pi(c - b')] & , \text{ за } b' < c \\ R - \frac{1}{2}[\Pi(b' - c) - \Pi(b' + c)] & , \text{ за } b' > c \end{cases}$;

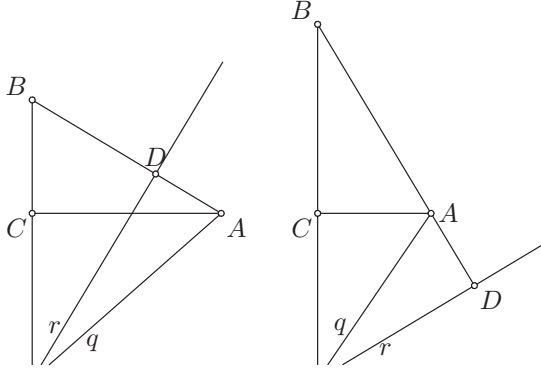
д) $\Pi(a' - b) + \Pi(a + b') = R$, $\Pi(b' - a) + \Pi(b + a') = R$.

Решење: а) $\angle A = \Pi(b) - \Pi(c + b')$



Означимо полуправу CB још са Cp . Нека је Aq полуправа с теме-
ном A која је паралелна полуправој Cp . Тада је $\angle CAq = \Pi(CA) = \Pi(b)$.
Нека је r права управна на правој AB која је паралелна полуправима
 Cp, Aq (постојање и јединственост такве праве имамо на основу 11. за-
датка) и нека је D пресечна тачка правих r, AB . По дефиницији угла
паралелности је $\angle DBp = \Pi(DB)$, а како су углови $\angle DBp$ и $\angle ABC$
унакрсни, следи да је $\angle B = \Pi(DB)$, односно да је $DB = b'$. Како је
 $AD = AB + BD = c + b'$, следи да је $\angle DAq = \Pi(DA) = \Pi(c + b')$. Кона-
чно, следи да је $\angle A = \angle CAq - \angle DAq = \Pi(b) - \Pi(c + b')$.

$$\text{б) } \angle A = \begin{cases} \Pi(c - b') - \Pi(b) & , \text{ за } b' < c \\ 2R - \Pi(b) - \Pi(b' - c), & \text{ за } b' > c \end{cases}$$



Нека је Aq полуправа с теменом A која је паралелна полуправој BC . Тада је $\angle CAq = \Pi(CA) = \Pi(b)$. Нека је r права нормална на правој BA која је паралелна полуправима BC, Aq (постојање и јединственост такве праве имамо на основу 11. задатка). Нека је D пресечна тачка правих r, BA . Тада је, по дефиницији угла паралелности, $\angle DBC = \Pi(DB)$. Како је $\angle DBC = \angle ABC$, следи да је $DB = b'$.

Ако је $b' < c$, онда важи $\mathcal{B}(B, D, A)$, па је $DA = BA - BD = c - b'$. Следи да је $\angle DAq = \Pi(DA) = \Pi(c - b')$, па је $\angle A = \angle DAq - \angle CAq = \Pi(c - b') - \Pi(b)$.

Ако је $b' > c$, онда важи $\mathcal{B}(B, A, D)$, па је $DA = DB - AB = b' - c$. Следи да је $\angle DAq = \Pi(DA) = \Pi(b' - c)$. Како је $2R = \angle DAB = \angle DAq + \angle CAq + \angle CAB = \Pi(b' - c) + \Pi(b) + \angle A$, следи да је $\angle A = 2R - \Pi(b) - \Pi(b' - c)$.

$$\text{в) } \angle A = \begin{cases} \frac{1}{2}[\Pi(c - b') - \Pi(c + b')] & , \text{ за } b' < c \\ R - \frac{1}{2}[\Pi(b' + c) + \Pi(b' - c)], & \text{ за } b' > c \end{cases}$$

Ако је $b' < c$, онда је $\angle A = \Pi(b) - \Pi(c + b') = \Pi(c - b') - \Pi(b)$, па је $2\angle A = \Pi(c - b') - \Pi(c + b')$, тј. $\angle A = \frac{1}{2}[\Pi(c - b') - \Pi(c + b')]$.

Ако је $b' > c$, онда је $\angle A = \Pi(b) - \Pi(b' + c) = 2R - \Pi(b) - \Pi(b' - c)$, па је $2\angle A = 2R - \Pi(b' + c) - \Pi(b' - c)$, тј. $\angle A = R - \frac{1}{2}[\Pi(b' + c) + \Pi(b' - c)]$.

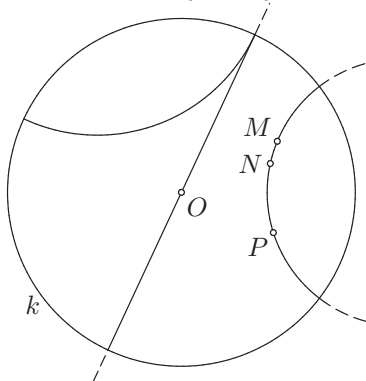
$$\text{г) } \Pi(b) = \begin{cases} \frac{1}{2}[\Pi(c + b') + \Pi(c - b')] & , \text{ за } b' < c \\ R - \frac{1}{2}[\Pi(b' - c) - \Pi(b' + c)], & \text{ за } b' > c \end{cases}$$

Ако је $b' < c$, онда је $\angle A = \Pi(b) - \Pi(c + b') = \Pi(c - b') - \Pi(b)$, па је $2\Pi(b) = \Pi(c + b') + \Pi(c - b')$, тј. $\Pi(b) = \frac{1}{2}[\Pi(c + b') + \Pi(c - b')]$.

Ако је $b' > c$, онда је $\angle A = \Pi(b) - \Pi(b' + c) = 2R - \Pi(b) - \Pi(b' - c)$, па је $2\Pi(b) = 2R - \Pi(b' - c) + \Pi(b' + c)$, тј. $\Pi(b) = R - \frac{1}{2}[\Pi(b' - c) - \Pi(b' + c)]$.

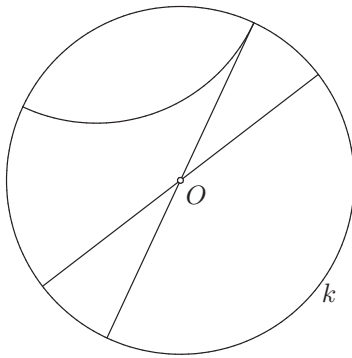
Основни појмови геометрије (и еуклидске и хиперболичке) јесу непразан скуп S , који се зове простор и чији су елементи тачке, две врсте подскупова простора S , који се зову праве и равни, као и релације $\mathcal{B}$ и $\cong$. При томе је релација $\mathcal{B}$ тернарна над скупом тачака, а релација $\cong$ је бинарна над скупом уређених парова тачака. Модел еуклидске геометрије је неки непразан скуп с јасно назначеним подскуповима који су праве и равни и јасно дефинисаним релацијама $\mathcal{B}$ и $\cong$, уколико задовољавају све аксиоме инциденције, распореда, подударности и непрекидности, као и Плејферову аксиому. Један такав скуп је $\mathbb{R}^3$, а одређивање који су тачно подскупови праве и равни, као и дефинисање релација $\mathcal{B}$ и $\cong$ биће препуштени читаоцу. У овом поглављу нас интересује скуп који представља модел равни хиперболичке геометрије, при чему сматрамо да нам је дат неки модел еуклидске равни. Такав модел хиперболичке геометрије ћемо називати h -равни и све појмове назначаваћемо префиксом h .

Нека је k произвољан круг еуклидске равни и нека је O његов центар. Круг k се назива *апсолутом*, а његова унутрашњост (отворени диск) представља једну h -раван. Сама апсолута није у оквиру модела, тј. није део h -равни и сматра се да су на њој бесконачно далеке тачке. Тачке тог отвореног диска називамо h -тачкама. Отворене пречнике апсолуте, односно отворене тетиве круга k које садрже његов центар, као и отворене кружне лукове кругова који су управни на апсолути, чије су крајње тачке на апсолути, називамо h -правима. Дакле, h -праве су делови еуклидских правих ако садрже центар апсолуте, односно делови еуклидских кругова који су управни на апсолути, ако не садрже центар апсолуте. Може се доказати да су испуњене све аксиоме инциденције које се тичу равни.



Ако две разне h -тачке припадају h -правој која је део еуклидске праве, онда еуклидска дуж која их спаја представља уједно и h -дуж. Ако две разне h -тачке M, P припадају h -правој која је део еуклидског круга, онда краћи лук $\widehat{MP}$ тог круга представља h -дуж MP . Три h -тачке M, N, P су у релацији h -између, тј. важи $\mathcal{B}_h(M, N, P)$, ако h -тачка N

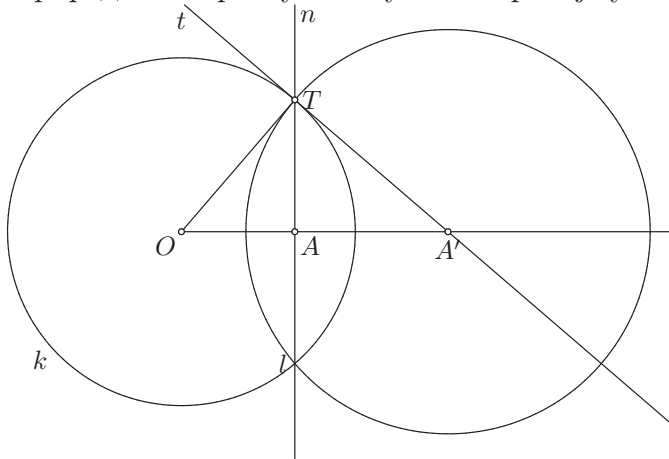
припада отвореној h -дужи MP . Може се доказати да су испуњене све аксиоме распореда. Помоћу релације h -између дефинисани су и појмови h -полуправих, h -углова, h -троуглова итд. Из аксиома непрекидности за еуклидске праве и њихових последица за еуклидски круг следи да важе аксиоме непрекидности за h -праве. Може се доказати да у h -равни постоје h -права и h -тачка која јој не припада такве да постоји више од једне h -праве која садржи ту h -тачку, а с том h -правом нема заједничких тачака. Према томе, испуњена је и аксиома Лобачевског. Две h -праве су h -паралелне ако се додирују у тачки која припада апсолути. Ако су две h -праве дисјунктне и нису h -паралелне, онда су оне h -хиперпаралелне.



Преостаје још да се дефинише h -подударност парова h -тачака. За то је довољно дефинисати пресликавања h -равни у себе (пресликавања која сликају унутрашњост апсолуте k у себе) које ће представљати h -изометрије. Као што знамо, свака изометрија равни (било еуклидске, било хиперболичке) може се представити као композиција највише трију осних рефлексција, па је довољно дефинисати осне рефлексije h -равни, тј. h -рефлексije. Ако је h -права p део еуклидске праве (означимо је такође са p), дефинишимо h -рефлексiju $\mathcal{S}_p^h$ као рестрикцију еуклидске осне рефлексije $\mathcal{S}_p$ на тачке h -равни, односно на унутрашњост апсолуте k . Ако је, пак, h -права p део еуклидског круга (означимо га такође са p), дефинишимо h -рефлексiju $\mathcal{S}_p^h$ као рестрикцију еуклидске инверзије ψ_p на тачке h -равни, односно на унутрашњост апсолуте k . Ово је сасвим природна дефиниција, јер је инверзија, на неки начин, рефлексija у односу на круг. Парови тачака $(A, B), (C, D)$ су h -подударни, односно важи $(A, B) \stackrel{h}{\cong} (C, D)$, ако постоји коначно много h -рефлексija $\mathcal{S}_{p_1}^h, \dots, \mathcal{S}_{p_n}^h$ таквих да је $C = \mathcal{S}_{p_n}^h \circ \dots \circ \mathcal{S}_{p_1}^h(A)$ и $D = \mathcal{S}_{p_n}^h \circ \dots \circ \mathcal{S}_{p_1}^h(B)$. Може се доказати да су испуњене све аксиоме подударности, према томе, имамо један модел хиперболичке равни, који се назива *Поенкареовим диск моделом*.

Чињеница да еуклидска инверзија не чува еуклидску подударност не представља проблем, јер је потребно да све h -рефлексije, па и оне које су

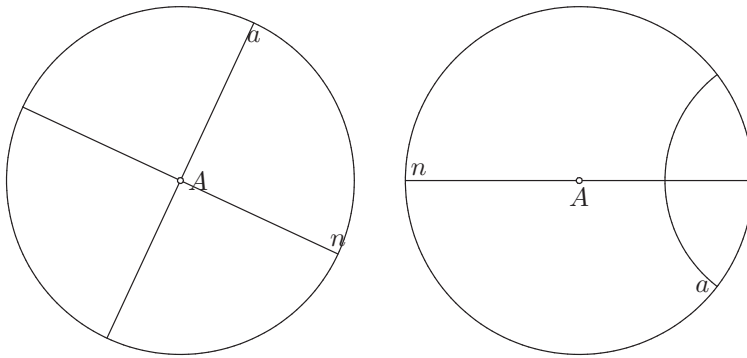
рестрикции еуклидских инверзија, чувају h -подударност, а не еуклидску подударност. Што се мере дужи тиче, h -дужина h -дужи није једнака еуклидској дужини одговарајуће еуклидске дужи или еуклидског кружног лука. Пошто еуклидске осне рефлексije и еуклидске инверзије чувају еуклидске углове између кривих, следи да су два h -угла h -подударна ако и само ако су углови које граде одговарајући еуклидски кругови и/или еуклидске праве међусобно подударни. Није тешко доказати да је h -угао између неких h -правих прав ако и само ако је одговарајући угао између еуклидских кругова и/или еуклидских правих такође прав, па се природна h -мера h -углова (мера углова у степенима или радијанима) поклапа с природном мером углова у посматраној еуклидској равни.



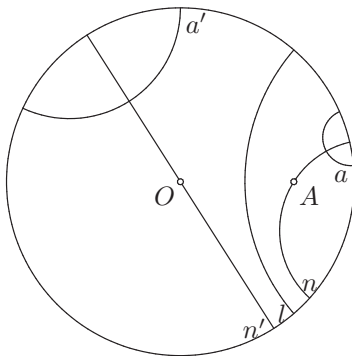
Веома је корисна чињеница да су h -праве које садрже центар апсолуте делови еуклидских правих, па је веома значајно за произвољну тачку A пронаћи h -изометрију која је слика у центар апсолуте O . Довољно је наћи h -рефлексiju, јер знамо да нађемо слике тачака, еуклидских правих и еуклидских кругова при еуклидским рефлексijaма и еуклидским инверзијама. Конструирајмо еуклидску нормалу n на OA у тачки A , означимо једну од њених пресечних тачака са апсолутом са T и конструирајмо тангенту t на апсолути k у тачки T . Њен пресек с полуправом OA означимо са A' . Круг $l(A', A'T)$ има особину да му центар припада тангенти апсолуте k , па је ортогоналан на апсолути, што значи да је његов пресек с унутрашњошћу апсолуте h -права, коју ћемо исто означити са l . Троуглови $\triangle A'AT$, $\triangle A'TO$ имају заједнички угао код темена A' и подударне праве углове $\angle A'AT$, $\angle A'TO$, па су слични. Следи да је $\frac{A'A}{A'T} = \frac{A'T}{A'O}$, тј. да је $A'A \cdot A'O = A'T^2$, па је $\psi_l(A) = O$, што значи да је и $S_l^h(A) = O$, Овиме је одређена h -права l таква да се h -рефлексijом S_l^h h -тачка A слика у центар апсолуте O . Ова конструкција нам је веома важна, јер ће се користити у већини задатака.

1. У Поенкареовом диск моделу хиперболичке равни дате су h -права a и h -тачка A . Одредити h -праву n која садржи тачку A и управна је на праву a .

Решење:



1° Нека се h -тачка A поклапа с центром апсолуте. Тада h -права n коју треба да конструишемо садржи центар апсолуте, па је део еуклидске праве. Потребно је да она буде управна на h -правој a , па ако је h -права a део еуклидске праве, конструишимо еуклидску праву која садржи тачку A и нормална је на правој која садржи h -праву a , а ако је h -права a део еуклидског круга, конструишимо еуклидску праву која садржи тачку A и нормална је на кругу који садржи h -праву a , тј. еуклидску праву која садржи тачку A и центар круга који садржи h -праву a .

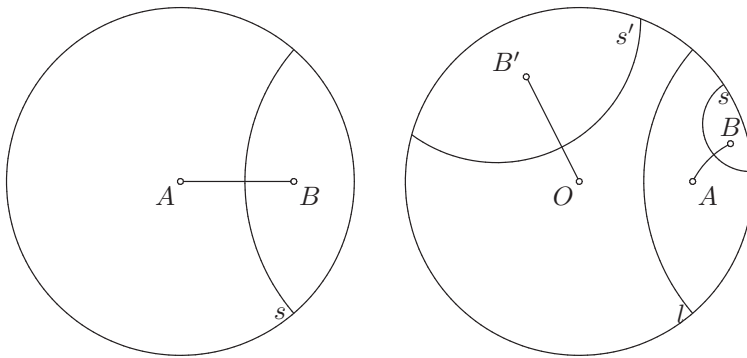


2° Нека се h -тачка A разликује од центра апсолуте O . Конструишимо h -праву l такву да се h -рефлексијом у односу на њу h -тачка A слика у центар апсолуте O (конструкција је описана у уводном делу). Конструишимо h -праву a' која је слика h -праве a при h -рефлексији у односу на h -праву l (слика еуклидске праве или круга при еуклидској инверзији). Дакле, h -рефлексијом у односу на h -праву l пресликали смо h -тачку A у центар апсолуте O и h -праву a у h -праву a' и тиме смо проблем свели на онај који уметмо да решимо. Према томе, конструишимо h -праву n'

која садржи h -тачку O и управна је на h -правој a' , као у првом случају. Пошто су h -рефлексије инволуције, поновном применом h -рефлексије у односу на h -праву l се h -тачка O и h -права a' сликају редом у h -тачку A и h -праву a , а пошто су h -рефлексије уједно и h -изометрије, применом h -рефлексије у односу на h -праву l се h -права n' слика у h -праву n која садржи h -тачку A и нормална је на h -правој a .

2. У Поенкареовом диск моделу дате су h -тачке A и B . Одредити h -симетралу дужи AB .

Решење: 1° Нека се једна од h -тачака A, B поклапа с центром апсолуте (нека је то, без умањења општости, h -тачка A). У уводном делу смо видели како се конструише h -права s таква да се h -рефлексијом у односу на њу h -тачка B слика у центар апсолуте A . Но, приметимо да је та h -права s управо h -симетрала h -дужи AB , те управо њу треба конструисати.

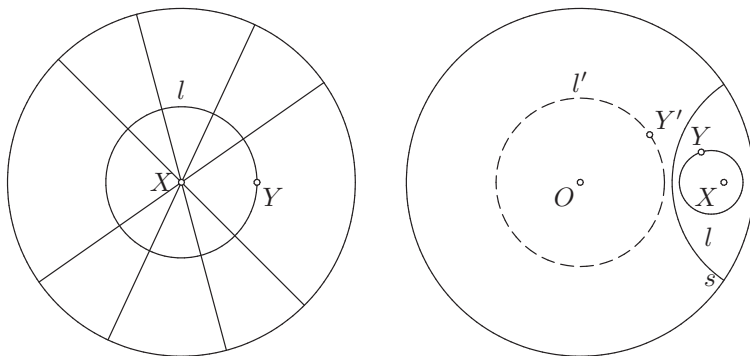


2° Нека се h -тачке A, B разликују од центра апсолуте O . Конструиши-мо h -симетралу l h -дужи OA и означимо са B' слику h -тачке B при h -рефлексији у односу на h -праву l (слика тачке при еуклидској инверзији). Дакле, h -рефлексијом у односу на h -праву l пресликали смо h -тачке A, B у центар апсолуте O и h -тачку B' и тиме смо проблем свели на онај који умемо да решимо. Према томе, конструишимо h -симетралу s' h -дужи OB' . Поновном применом h -рефлексије у односу на h -праву l сликамо h -тачке O, B' у h -тачке A, B , а h -симетралу s' h -дужи OB' у h -симетралу s h -дужи AB .

3. У Поенкареовом диск моделу дате су тачке X и Y . Конструисати h -круг l са центром у тачки X који садржи тачку Y .

Решење: Ако је $\mathcal{X}$ елиптички прамен правих са средиштем X , онда је круг с центром X , који садржи тачку Y , епицикл одређен праменом $\mathcal{X}$ и тачком Y , тј. скуп свих тачака које се од тачке Y добијају осним рефлексјама у односу на праве прамена $\mathcal{X}$.

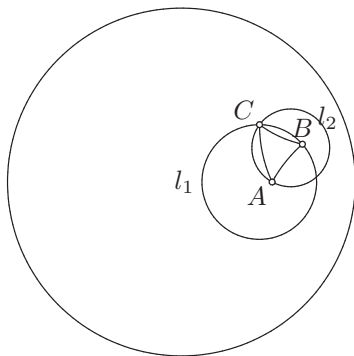
1° Нека се h -тачка X поклапа с центром апсолуте. Тада су h -праве елиптичког прамена $\mathcal{X}$ с h -средиштем X делови еуклидских правих, па су h -рефлексје одређене h -правима прамена $\mathcal{X}$ рестрикције еуклидских осних рефлексја. Тачке h -круга l се добијају h -рефлексјама h -тачке Y у односу на h -праве прамена $\mathcal{X}$, тј. еуклидским осним рефлексјама у односу на еуклидске праве прамена $\mathcal{X}$, па следи да се h -круг l поклапа с еуклидским кругом $l(X, XY)$.



2° Нека се h -тачка X разликује од центра апсолуте O . Конструишимо h -симетралу s h -дужи OX и затим означимо са Y' слику h -тачке Y при h -рефлексји у односу на h -праву s . Дакле, h -рефлексјом у односу на h -праву s пресликали смо h -тачке X, Y у центар апсолуте O и h -тачку Y' и тиме смо проблем свели на онај који у мемо да решимо. Према томе, конструишимо h -круг l' с h -центром O који садржи h -тачку Y' . Поновном применом h -рефлексје у односу на h -праву s сликамо h -тачке O, Y' у h -тачке X, Y , а h -круг l' у h -круг l с h -центром X који садржи h -тачку Y .

4. У Поенкареовом диск моделу хиперболичке равни дате су h -тачке A и B . Конструисати h -тачку C такву да је h -троугао ABC правилан.

Решење:

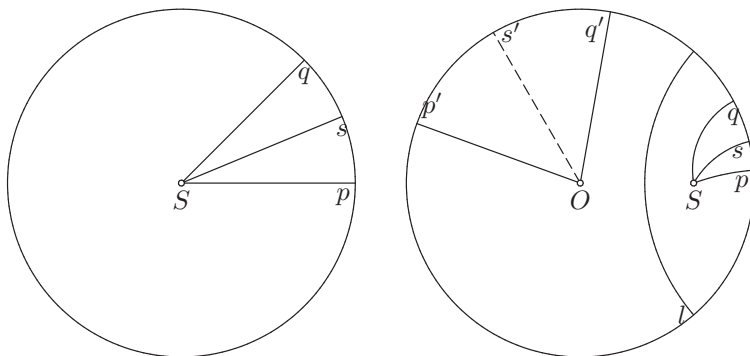


Искористимо решење претходног задатка и конструишимо h -круг l_1 с h -центром A који садржи h -тачку B и h -круг l_2 с h -центром B који садржи h -тачку A . Једну од пресечних h -тачака h -кругова l_1, l_2 означимо са C . Тада је h -троугао $\triangle ABC$ правилан, јер h -тачка C припада h -кругу l_1 , па важи $AC \stackrel{h}{\cong} AB$, а пошто припада и кругу l_2 , важи $BC \stackrel{h}{\cong} BA$ (у питању је h -подударност h -дужи).

5. У Поенкареовом диск моделу дате су две праве које се секу. Одредити h -бисектрису угла којег одређују.

Решење: Означимо са S пресек датих h -правих p, q .

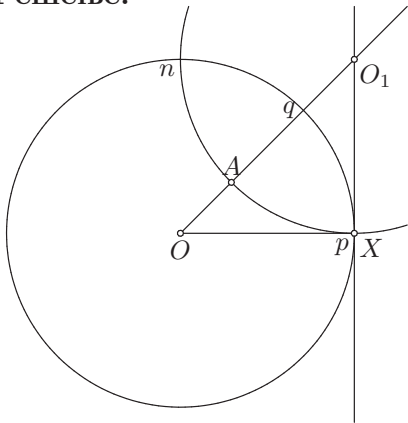
1° Нека се h -тачка S поклапа с центром апсолуте. Тада су h -праве p, q делови еуклидских правих и h -угао $\angle pSq$ се поклапа с еуклидским углом $\angle pSq$. Бисектриса угла је полуправа која припада том углу таква да се осном рефлексijом у односу на праву која је садржи један крак тог угла слика у други и обрнуто. Ако је Ss еуклидска бисектриса еуклидског угла $\angle pSq$, онда се еуклидском осном рефлексijом у односу на праву која је садржи крак Sp слика у крак Sq и обрнуто. Како h -рефлексija у односу на h -праву која садржи бисектрису Ss делује исто као и еуклидска осна рефлексija, следи да се и h -рефлексijом у односу на h -праву која садржи Ss h -крак Sp слика у h -крак Sq и обрнуто, односно да је h -полуправа Ss тражена h -бисектриса.



2° Претпоставимо сада да се h -тачка S разликује од центра апсолуте O . Конструиримо h -симетралу l h -дужи OS и означимо са p', q' слике h -правих p, q при h -рефлексiji у односу на h -праву l . Дакле, свели смо проблем на претходни, који уметмо да решимо. Према томе, конструиримо h -бисектрису Os' h -угла $\angle p'Oq'$. Поновном применом h -рефлексije у односу на h -праву l сликамо h -праве p', q' у h -праве p, q , а h -бисектрису Os' h -угла $\angle p'Oq'$ у h -бисектрису Ss h -угла $\angle pSq$.

6. У Поенкареовом диск моделу конструисати h -дуж мере $\Pi^{-1}(\frac{R}{2})$.

Решение:



Потребан нам је h -угао $\frac{R}{2}$, па конструишимо h -угао $\angle pOq$ такав да му теме буде центар апсолуте (тада су му краци делови еуклидских правих). Да бисмо добили h -дуж h -мере $\Pi^{-1}\left(\frac{R}{2}\right)$, потребна нам је h -права која је управна на једном h -краку тог h -угла (нпр. Oq), а h -паралелна с његовим другим h -краком (нпр. Op). Та h -права не може садржати центар апсолуте, јер онда неће бити паралелна ни са једном краком угла, па следи да мора припадати еуклидском кругу чији се (еуклидски) центар налази на еуклидској правој која садржи крак Oq . Тај еуклидски круг мора садржати тачку X у пресеку апсолуте и полуправе Op , да би h -права коју он садржи била h -паралелна с h -краком Op . Такође, тај круг мора бити управан на апсолути у тачки X , па следи да његов центар припада тангенти апсолуте у тачки X . Дакле, центар O_1 тог круга налази се у пресеку те тангенте и (еуклидске) полуправе Oq , па конструишимо круг $n(O_1, O_1X)$. Означимо са A h -тачку у пресеку h -праве n и h -крака Oq . Тада је OA h -дуж која је, по дефиницији функције Лобачевског, h -мере $\Pi^{-1}(\angle AOp) = \Pi^{-1}(\angle pOq) = \Pi^{-1}\left(\frac{R}{2}\right)$.