

1. Доказати: $S_p \circ S_q = S_q \circ S_p \Leftrightarrow p = q \vee p \perp q$.

Т. О ТРАНСМУТАЦИЈИ:

Ако је J дим n и p дим n која је право. Тада $J \circ S_p \circ J^{-1} = S_{J(p)}$ ОНА РЕФ (ТРАНСМУТАЦИЈА ОНЕ РЕФ.).

$$S_p \circ S_2 = S_2 \circ S_p \Leftrightarrow S_p \circ S_2 \circ S_p^{-1} = S_2 \xrightarrow{\text{TOT}} S_{S_p(2)} = S_2 \Leftrightarrow S_p(2) = 2$$

$$S_p(2) = 2 \Leftrightarrow p = 2 \vee p \perp 2$$

$$\Leftarrow \text{Ако је } p = 2 : S_p(2) = S_p(p) = p = 2 \quad \checkmark$$

$$p \perp 2 : \text{Ако је } X \in 2 \text{ ортогонална,}$$

$$\bullet X \in p : S_p(X) = X \in 2 \Rightarrow S_p(2) = 2 \quad \checkmark$$

$$\bullet X \notin p : S_p(X) = X' \Rightarrow p \text{ је медијаторна од } XX'$$

$$\Rightarrow p \perp XX' \quad \left. \begin{array}{l} X \in 2, 2 \perp p \end{array} \right\} \Rightarrow 2 \parallel XX' \Rightarrow XX' = 2 \Rightarrow X' \in 2 \Rightarrow S_p(2) = 2$$

2. Доказати: $S_p \circ S_q \circ S_r = S_r \circ S_q \circ S_p$ ако и само ако су p, q, r праве једног прамена.

$$\Leftarrow p, q, r \in \mathcal{X} : S_p \circ S_q \circ S_r = S_d \xrightarrow{S_d = S_d^{-1} \text{ и } S_d^2 = Id} S_d^{-1} = (S_p \circ S_q \circ S_r)^{-1} = S_r^{-1} \circ S_q^{-1} \circ S_p^{-1} \xrightarrow{S_p^2 = S_q^2 = S_r^2 = Id} S_r \circ S_q \circ S_p$$

$$\Rightarrow J = S_p \circ S_q \circ S_r = S_r \circ S_q \circ S_p \quad S^2 = Id = S^2 = S^2$$

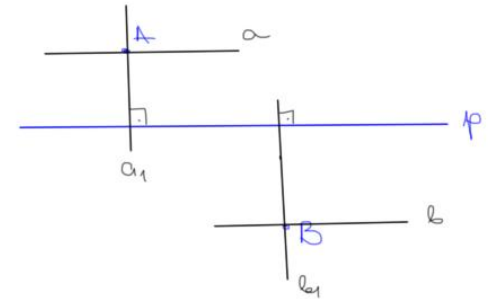
$$J^{-1} = (S_p \circ S_q \circ S_r)^{-1} = S_r^{-1} \circ S_q^{-1} \circ S_p^{-1} \xrightarrow{S_p^2 = S_q^2 = S_r^2 = Id} S_r \circ S_q \circ S_p = J \Rightarrow J^2 = Id \text{ т.ј. } J \text{ је инволуција, } G^2 = J^2 = Id \text{ т.ј. } G \text{ није инволуција} \Rightarrow$$

II Напомена $n \times n$. $S_p \circ S_q \circ S_r = G$ клиз. РЕФ

$$G \circ G = S_p \circ S_q \circ S_r \circ S_r \circ S_q \circ S_p = S_p \circ S_q \circ S_p = S_p^2 = Id, G^2 \neq Id \Rightarrow S_p \circ S_q \circ S_r = S_l \oplus_{p, q, r, l \in \mathcal{X}}$$

3. Доказати: $S_B \circ S_p \circ S_A = S_A \circ S_p \circ S_B \Leftrightarrow AB \perp p$.

Here by a, b, a_1, b_1 are lines. $a \perp a_1, a \cap a_1 = \{A\} \Leftrightarrow S_A = S_a \circ S_{a_1} = S_{a_1} \circ S_a$
 $b \perp b_1, b \cap b_1 = \{B\} \Leftrightarrow S_B = S_b \circ S_{b_1} = S_{b_1} \circ S_b$, here by $a, b \parallel p$



$$\left. \begin{array}{l} a \parallel p, a \perp a_1 \Rightarrow a_1 \perp p \\ b \parallel p, b \perp b_1 \Rightarrow b_1 \perp p \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{a_1 \parallel b_1}$$

$$\boxed{\Leftarrow} \quad \underline{AB \perp p}, a_1 \ni A, a_1 \perp p, b_1 \ni B, b_1 \perp p \Rightarrow \boxed{a_1 = b_1 = AB}$$

$$\begin{aligned} \uparrow &= S_B \circ S_p \circ S_A = \underbrace{S_{AB} \circ S_b}_{\substack{\uparrow \\ S_a^2 = Id = S_b^2 = S_d^2}} \circ S_p \circ \underbrace{S_a}_{\substack{\uparrow \\ S_d = Id}} \circ S_{AB} \stackrel{\uparrow}{=} S_{AB} \circ S_d \circ S_{AB} \stackrel{\uparrow}{=} S_{AB} \circ (S_b \circ S_p \circ S_a)^{-1} \circ S_{AB} = S_{AB} \circ S_a^{-1} \circ S_p^{-1} \circ S_b^{-1} \circ S_{AB} = \\ &\quad a, b \parallel p \Rightarrow a, b, p \in \mathcal{X} \Rightarrow \exists d \in \mathcal{X} \quad S_d^2 = Id \text{ or } S_d^{-1} = S_d \end{aligned}$$

$$\stackrel{\uparrow}{=} \underbrace{S_{AB} \circ S_a^{-1}}_{\substack{\uparrow \\ S_a^2 = Id = S_b^2 = S_d^2}} \circ S_p \circ \underbrace{S_b^{-1} \circ S_{AB}}_{\substack{\uparrow \\ S_d = Id}} = S_A \circ S_p \circ S_B$$

$$\boxed{\Rightarrow}: S_B \circ S_p \circ S_A = S_A \circ S_p \circ S_B \Leftrightarrow \underbrace{S_{b_1} \circ S_b \circ S_p \circ S_a \circ S_{a_1}}_{\substack{\uparrow \\ S_d^2 = Id}} = \underbrace{S_{a_1} \circ S_a \circ S_p \circ S_b \circ S_{b_1}}_{\substack{\uparrow \\ S_d^2 = Id}} \stackrel{\textcircled{x}}{\Rightarrow} S_{b_1} \circ S_d \circ S_{a_1} = S_{a_1} \circ S_d \circ S_{b_1} \Rightarrow$$

$$\textcircled{x} \quad \underbrace{S_{b_1} \circ S_d \circ S_{a_1}}_{\substack{\uparrow \\ b_1 \perp d}} = \underbrace{S_{a_1} \circ S_d \circ S_{b_1}}_{\substack{\uparrow \\ a_1 \perp d}} \Rightarrow S_d \circ S_{b_1} \circ S_{a_1} = S_d \circ S_{a_1} \circ S_{b_1} \Rightarrow S_{b_1} \circ S_{a_1} = S_{a_1} \circ S_{b_1} \stackrel{\textcircled{1} \text{ and } \textcircled{2}}{\Rightarrow} a_1 \subset b_1 \vee a_1 \perp b_1$$

$$\Rightarrow \underbrace{S_d \circ S_{b_1} \circ S_{a_1}}_{\substack{\uparrow \\ b_1 \perp d}} = \underbrace{S_d \circ S_{a_1} \circ S_{b_1}}_{\substack{\uparrow \\ a_1 \perp d}} \Rightarrow S_{b_1} \circ S_{a_1} = S_{a_1} \circ S_{b_1} \stackrel{\textcircled{1} \text{ and } \textcircled{2}}{\Rightarrow} a_1 \subset b_1 \vee a_1 \perp b_1 \left\{ \Rightarrow \boxed{\underbrace{a_1 = b_1}_A \neq AB}, a_1 \perp p \Rightarrow \boxed{AB \perp p} \right.$$

kako by $a_1 \parallel b_1$

4. Ако нека фигура равни има тачно две осе симетрије, доказати да је она и централно-симетрична.

Нека ϕ дата фигура, а $p \neq q$ две осе симетрије, $p \neq q \Rightarrow S_p(\phi) = \phi, S_q(\phi) = \phi$

$$\underbrace{S_{S_p(q)}}_{\text{TOT}} S_p \circ S_q \circ S_p^{-1}(\phi) = S_p \circ S_q(\phi) = S_p(\phi) = \phi \quad \xrightarrow{\substack{\text{2. осе} \\ \text{симетрије} \\ p \neq q}} S_p(q) = p \quad \begin{matrix} 2^\circ \\ \Downarrow \\ p=q \vee p \perp q \end{matrix} \Rightarrow \boxed{p \perp q}$$

$S_p^2 = Id$ $S_p(q) = p$ $S_p(q) = q$ $p=q \vee p \perp q$

$p \cap q = \{O\}$ $p \neq q$ $p \perp q$

$$\underline{S_O(\phi)} = S_p \circ S_q(\phi) = S_p(\phi) = \phi \Rightarrow \phi \text{ је ЦЕНТРАЛНО СИМЕТРИЧНА}$$

5. Нека је $ABCDE$ петоугао уписан у круг такав да је $BC \parallel DE$ и $CD \parallel EA$. Доказати да D припада медијатриси

странице AB . Значи $\angle A = \angle B$. Значи центар описаног круга је око $ABCDE$ са O .

$\Rightarrow O \in \angle_{AB}, \angle_{BC}, \angle_{CD}, \angle_{DE}, \angle_{EA}$; Симетрала странице је нормална на њу $\Rightarrow$ симетрала $\perp$ на њу $\Rightarrow$ $p, q \in \angle_O \Rightarrow \exists d \in \angle_O$

$$\left. \begin{matrix} \angle_{BC} \perp BC, \angle_{DE} \perp DE \\ \text{и } BC \parallel DE \end{matrix} \right\} \Rightarrow \angle_{BC} \parallel \angle_{DE} \Rightarrow \angle_{BC} = \angle_{DE} = q$$

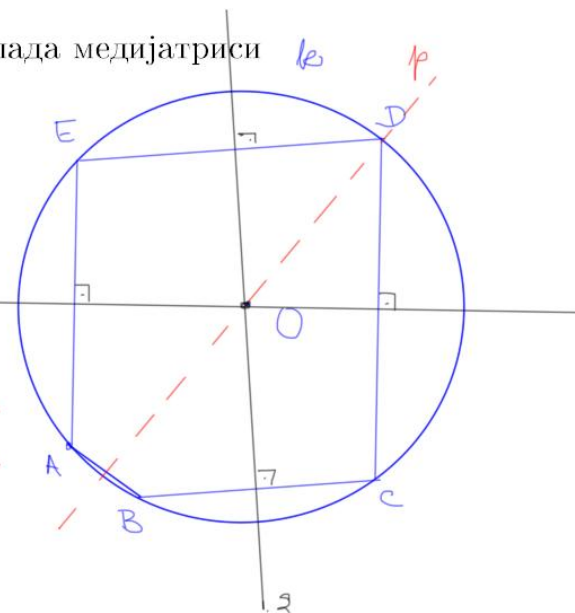
$$\left. \begin{matrix} \angle_{CD} \perp CD, \angle_{EA} \perp EA \\ \text{и } CD \parallel EA \end{matrix} \right\} \Rightarrow \angle_{CD} \parallel \angle_{EA} \Rightarrow \angle_{CD} = \angle_{EA} = r$$

$$\begin{aligned} \times \quad \angle(D) &= S_r \circ S_q \circ S_p \circ S_r \circ S_q(D) = S_r \circ S_q \circ S_p \circ S_r(E) = S_r \circ S_q \circ S_p(A) \\ &= S_r \circ S_q(B) = S_r(C) = D \end{aligned}$$

$\angle - D$ је ϕ тачка

$$\begin{aligned} \times \quad \angle &= S_r \circ S_q \circ S_p \circ S_r \circ S_q \stackrel{S_d = Id}{=} S_d \circ S_r \circ S_q = r \\ S_d = Id &\Rightarrow S_d^{-1} \circ S_r \circ S_q = (S_r \circ S_q \circ S_p)^{-1} \circ S_r \circ S_q = \\ &= S_p^{-1} \circ S_q^{-1} \circ S_r^{-1} \circ S_r \circ S_q = S_p^{-1} \circ S_q^{-1} \circ S_q = S_p^{-1} = S_p \\ &\stackrel{S_p^2 = Id}{=} S_p \end{aligned}$$

$$\Rightarrow S_p(D) = D \Leftrightarrow D \in p$$



6. Нека је $ABCD$ ромб такав да је $\angle BAD = 60^\circ$ и нека права p сече редом странице AB и BC у тачкама M и N тако да је збир дужи BM и BN једнак страници ромба. Доказати да је троугао DMN правилан.

$$AB=BC=CD=DA=a$$

$$\text{З: } BM+BN=a$$

$$B(A,M,B), B(B,N,C)$$

ЈЕДНАКОСТРАНИЧНИ

$$\left. \begin{array}{l} R_{D,60^\circ}(A)=B \\ R_{D,60^\circ}(B)=C \end{array} \right\} \Rightarrow R_{D,60^\circ}(\overline{AB}) = \overline{BC} \quad \overline{AB}, \overline{BC} \text{ gym}$$

$$R_{D,60^\circ}(M)=M_1, B(A,M,B)$$

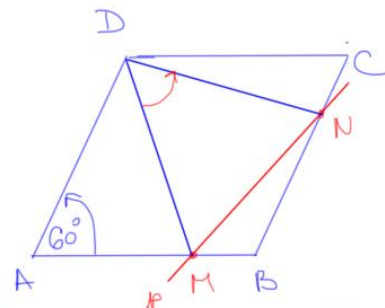
$$R_{D,60^\circ}(\overline{AM}) = \overline{BM_1} \Rightarrow \boxed{AM=BM_1}$$

$$B(A,M,B) \Rightarrow AM+MB=a \stackrel{1+3}{=} BM_1+BM \stackrel{BM+BN}{=} \Rightarrow BM_1=BN$$

$$B(B,N,C)$$

$$B(B,M_1,C)$$

$$\Rightarrow M_1=N \Rightarrow R_{D,60^\circ}(M)=M_1=N \Rightarrow DM=DN, \angle MDN=60^\circ \Rightarrow \angle DMC = \angle MCD = 60^\circ \Rightarrow \triangle DMN \text{ ПРАВИЛАН}$$



7. Одредити тип и компоненте изометрије $R_{A,\alpha} \circ R_{B,\beta}$.

$$J = R_{A,\alpha} \circ R_{B,\beta}$$

$$\alpha, \beta \in [0, 2\pi) \Rightarrow \alpha + \beta \in [0, 4\pi)$$

$$1^\circ \boxed{A=B} : J = R_{A,\alpha} \circ R_{A,\beta} = R_{A,\alpha+\beta}$$

$$1^\circ 1^\circ \alpha + \beta + 2k\pi, J = R_{A,\alpha+\beta}$$

$$1^\circ 2^\circ \alpha + \beta + 2k\pi, J = R_{A,2k\pi} = E$$

$$2^\circ \boxed{A \neq B} : J = R_{A,2 \cdot \frac{\alpha}{2}} \circ R_{B,2 \cdot \frac{\beta}{2}}$$

Нека су p и q 2 пр.

$$\angle(AB,p) = \frac{\alpha}{2}$$

$$\angle(q,AB) = \frac{\beta}{2}$$

$$S_{AB} \circ S_{AB} = S_p \circ S_q$$

$$2^\circ 1^\circ \frac{\alpha+\beta}{2} \in [0, \pi) \text{ или } \alpha+\beta \in [0, 2\pi) \Rightarrow p \cap q = \{C\}$$

$$\Rightarrow J = S_p \circ S_q = R_{C,2 \cdot \angle(q,p)} = R_{C,2 \cdot \frac{\omega}{2}} = R_{C,\alpha+\beta}$$

$$\frac{\omega}{2} = \angle(q,p)$$

$$\frac{\omega}{2} = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} \text{ (као угао је сачетак двеју неусусетних угаова постојећих)}$$

$$2^\circ 2^\circ \boxed{\frac{\alpha+\beta}{2} = \pi} \text{ или } \alpha+\beta = 2\pi \Rightarrow p \parallel q$$

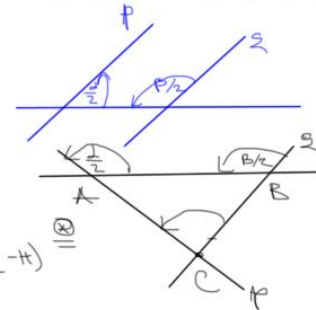
$$\Rightarrow J = S_p \circ S_q = J_{2, \overline{AB}}, \overline{AB} \perp p, q, \|\overline{AB}\| = d(p,q)$$

$$2^\circ 3^\circ \frac{\alpha+\beta}{2} \in (\pi, 2\pi) \text{ или } \alpha+\beta \in (2\pi, 4\pi) \Rightarrow p \cap q = \{C\}$$

$$\Rightarrow J = S_p \circ S_q = R_{C,2 \cdot \angle(q,p)} = R_{C,2 \cdot \angle BCA} = R_{C,2 \cdot (\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \pi)}$$

$$\angle BCA = \pi - (\pi - \frac{\alpha}{2}) - (\pi - \frac{\beta}{2}) = \pi - \pi + \frac{\alpha}{2} - \pi + \frac{\beta}{2} = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} - \pi$$

$$\Rightarrow R_{C,\alpha+\beta-2\pi} = R_{C,\alpha+\beta}$$



8. Над ивицама троугла ABC у спољашњости конструисани су правилни троуглови ADB , BEC , CFA .

а) (Торичелијева тачка) Доказати да су дужи AE , BF , CD међусобно подударне и да се секу у једној тачки. (Из претходног параграфa)

$$\left. \begin{array}{l} \angle_{B, 60^\circ}(E) = C \\ \angle_{B, 60^\circ}(A) = D \end{array} \right\} \Rightarrow \overline{AE = CD} \text{ (1)} \quad \left. \begin{array}{l} \angle_{A, 60^\circ}(D) = B \\ \angle_{A, 60^\circ}(C) = F \end{array} \right\} \Rightarrow \overline{CD = BF} \text{ (2)} \Rightarrow \overline{AE = CD = BF}$$

$$\angle_{A, 60^\circ} : CD \mapsto BF \Rightarrow \angle(CD, BF) = 60^\circ \text{ (1)} \quad \text{Hека је } \{T\} = CD \cap BF \text{ (apobux)}$$

Доказано $T \in \overline{CD}, \overline{BF}$ (густина):

$$\left. \begin{array}{l} \angle BAC < 90^\circ \Rightarrow \angle DAC = \angle DAB + \angle BAC < 60^\circ + 90^\circ < \pi \\ \angle DAB = 60^\circ < \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \overline{B, C \div A D}$$

$$\left. \begin{array}{l} A, C \div B D \\ B, C \div A D \end{array} \right\} \Rightarrow C \in \angle BDA \Rightarrow CD \text{ сече } g_{AB} \Rightarrow \overline{A, B \div C D} \Rightarrow \overline{CD} \in \angle ACB \Rightarrow \angle DCA < \angle BCA < 90^\circ < \pi$$

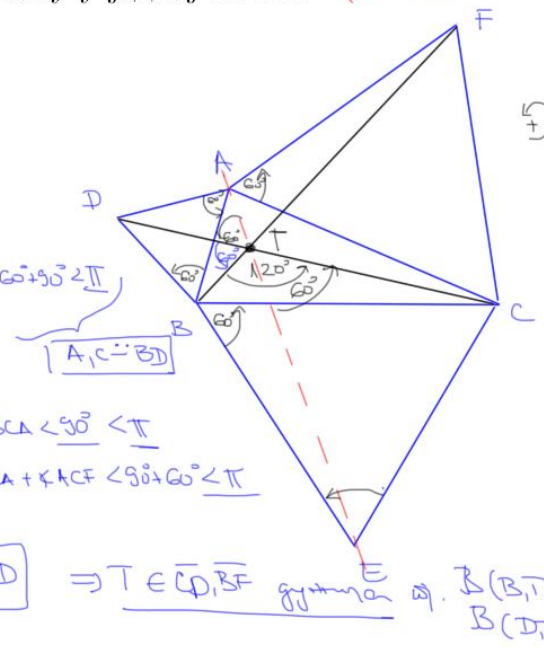
$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow A, F \div D C \\ A, B \div D C \end{array} \right\} \Rightarrow B, F \div D C \Rightarrow \overline{CD \text{ сече } BF \text{ густина}} \quad \text{Аналогно } C, D \div B F \Rightarrow \overline{BF \text{ сече } CD \text{ густина}} \Rightarrow T \in \overline{CD}, \overline{BF} \text{ густина}$$

Доказано да су A, T, E колинеарне тачке $B(A, T, E)$:

$$\left. \begin{array}{l} (1) \Rightarrow \angle(CD, BF) = 60^\circ \\ \angle DTB \end{array} \right\} \Rightarrow \angle DTB = \angle DAB = 60^\circ \Rightarrow \overline{B(D, T, C)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \angle DTB = 60^\circ \\ \angle DTC \end{array} \right\} \Rightarrow \angle BTC = 120^\circ \Rightarrow \angle BTC + \angle CBT = \pi \Rightarrow B \text{ је тачка на } \overline{CT}$$

$$\Rightarrow (x), (xx) \Rightarrow \angle ATD = \angle ETC = 60^\circ \Rightarrow \overline{B(A, T, E)} \Rightarrow T \in g_{AE}$$



8. Над ивицама троугла ABC у спољашњости конструисани су правилни троуглови ADB , BEC , CFA .

б) (Наполеонов троугао) Доказати да центри конструисаних троуглова чине темена правилног троугла.

Означимо центре $\triangle BEC, \triangle CFA, \triangle ADB$ редом са P, Q, R .

$$J = R_{R,120^\circ} \circ R_{P,120^\circ} \circ R_{Q,120^\circ} \stackrel{(*)}{=} R_{Q',240^\circ} \circ R_{Q,120^\circ}$$

• J -композиција 3-директне изолатор $\Rightarrow J$ директна

$$R_{R,120^\circ} \circ R_{P,120^\circ} \stackrel{\oplus}{=} R_{Q',240^\circ} \quad (*)$$

$$P \neq R, 120^\circ + 120^\circ = 240^\circ$$

$$J(A) = R_{R,120^\circ} \circ R_{P,120^\circ} \circ R_{Q,120^\circ}(A) = R_{R,120^\circ} \circ R_{P,120^\circ}(C) = R_{R,120^\circ}(B) = A \Rightarrow \underline{A \text{ ф.т. } J} \Rightarrow J \neq \tau$$

$$\Rightarrow \underline{J = \varepsilon}$$

$$R_{R,120^\circ} \circ R_{P,120^\circ} \circ R_{Q,120^\circ} = \varepsilon \quad / \circ R_{Q,120^\circ}^{-1} \Rightarrow R_{R,120^\circ} \circ R_{P,120^\circ} = R_{Q,120^\circ}^{-1} = R_{Q,-120^\circ} = \underline{R_{Q,240^\circ}}$$

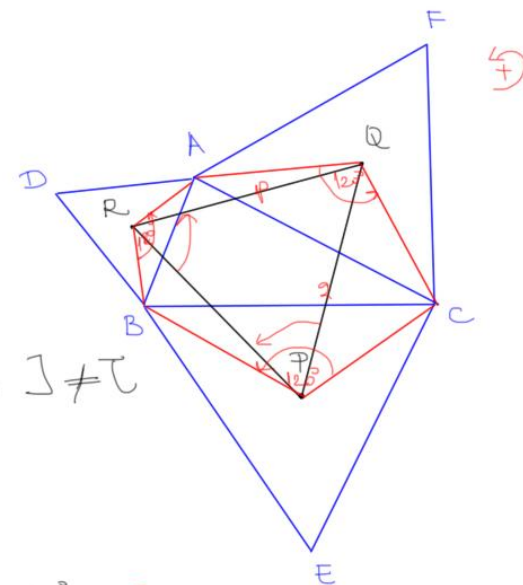
$$\begin{aligned} \textcircled{\oplus} \quad \angle(R, P) &= \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ \\ \angle(P, R) &= \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ \end{aligned}$$

$$P \cap Q = \{Q'\}$$

$$\Rightarrow \underline{Q = Q'}$$

$$\Rightarrow P \cap Q = \{Q'\}$$

$$\Rightarrow \underline{\triangle RQP \text{ правилан}}$$



9. Нека је у равни $\mathbb{E}^2$ дат троугао ABC и нека су B', C' тачке правих AB и AC такве да важи $\mathcal{B}(A, B, B')$ и $\mathcal{B}(A, C, C')$.

Ако је P_a тачка у којој споља уписани круг који одговара темену A додирује страницу BC тог троугла, доказати да је $\mathcal{R}_{C, \angle C'CB} \circ \mathcal{R}_{A, \angle BAC} \circ \mathcal{R}_{B, \angle CBB'} = \mathcal{S}_{P_a}$. A

Here by $Q_a, R_a \in B_3$ w. $B R_a = B P_a, \beta(A, B, R_a), C Q_a = C P_a, \beta(A, C, Q_a)$

$$\bullet J(P) R_{C, Z'CB} \circ R_{A, Z'BC} \cdot \underbrace{R_{B, Z'CB}}_{P_a} (P_a) \stackrel{\downarrow}{=} R_{C, Z'CB} \circ \underbrace{R_{A, Z'BC}}_{Q_a} (R_a) \stackrel{\uparrow}{=} R_{C, Z'CB} (Q_a) \stackrel{\downarrow}{=} P_a$$

$\Rightarrow P_a \text{ bT } J$

$\Rightarrow P_a \text{ p.t. } \square$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \gamma(c) &= c; \quad \gamma(c) = P_{C, \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} \circ P_{A, \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} \circ \underbrace{P_{B, \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}(c)}_{C_1} = \\ &= P_{C, \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} \circ \underbrace{P_{A, \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}(C_1)}_{C_2} = \\ &= P_{C, \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}(C_2) = C_3 \neq C \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{J \neq \mathbb{C}}}$$

• $\mathcal{I}$ - je kolekcija 3 gresivite $\Rightarrow \mathcal{I}$ gresivite izometrija, $\rho_{\mathcal{A}, \mathcal{B}} \neq 1 \Rightarrow \mathcal{I} \neq \mathcal{I} + \mathcal{I} \neq \mathcal{I} \Rightarrow \mathcal{I} = \mathcal{I}_{\rho_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}}$

$R_{B, \neq CB} : B, P_a \mapsto B, R_a$ ज्ञि. $\boxed{BC}$ उपर्युक्त चक्रान्तरण य $AB \Rightarrow R_a$

$R_{A, \neq BA} : A, R_a \mapsto A, Q_a$ ज्ञि. $R_a \in AB \quad \text{---} | \quad \text{---} | \quad \text{---} | \quad AC \Rightarrow Q_a$

$R_{C, \neq CB} : C, Q_a \mapsto C, P_a$ ज्ञि. $Q_a \in AC \quad \text{---} | \quad \text{---} | \quad \text{---} | \quad \boxed{BC} \Rightarrow P_a$

$\Rightarrow J: BC \text{ oparba} \mapsto BC \text{ oparba}$
 $\Rightarrow BC \text{ je uzbudljivostna} \Rightarrow BC \Rightarrow PA$
 $\Rightarrow \omega = \pi \Rightarrow R_{PA, \pi} = \underline{S_{PA}}$ ЦЕНТРАЛНА СИМЕТРИЈА

