

6. Кругови k_1, k_2, k_3 су међусобно ортогонални, при чему се k_1 и k_2 секу у тачкама A и B , k_2 и k_3 у тачкама C и D , k_3 и k_1 у тачкама E и F . Доказати да се кругови описани око троуглова ACE и ADF додирују у тачки A .

Означимо $l_1 = k(A, E)$, $l_2 = k(A, F)$. Означимо се $h(A, B)$, $B \neq A$, ортогонално, Ψ_h - инверзија у кругу на крају h .

$$\Psi_h(B) = B', \Psi_h(C) = C', \Psi_h(D) = D', \Psi_h(E) = E', \Psi_h(F) = F'$$

$$\Psi_{h_1}: l_1 \setminus \{A\} \rightarrow l_1' \text{ - права } \begin{matrix} l_1 \ni A \\ l_1' \nexists A \end{matrix}$$

$$l_1 \ni B, E, F \Rightarrow l_1' \ni B', E', F'$$

$$\Psi_{h_2}: l_2 \setminus \{A\} \rightarrow l_2' \text{ - права } \begin{matrix} l_2 \ni A \\ l_2' \nexists A \end{matrix}$$

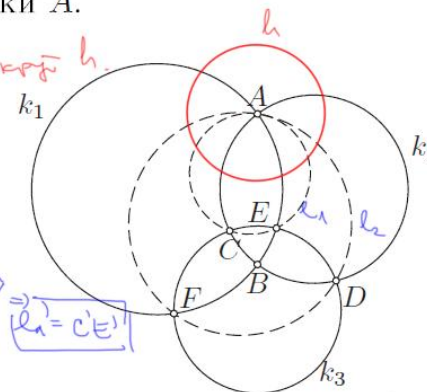
$$l_2 \ni C, D \Rightarrow l_2' \ni C', D'$$

$$\Psi_{h_3}: l_3 \rightarrow l_3' \text{ КРДГ } \begin{matrix} l_3 \ni A \\ l_3' \nexists A \end{matrix}$$

$$l_3 \ni F, C, E, D \Rightarrow l_3' \ni F', C', E', D'$$

$$\Psi_{h_1}: l_1 \setminus \{A\} \rightarrow l_1' \text{ ПРАВА } \begin{matrix} l_1 \ni A \\ l_1' \nexists A \end{matrix}$$

$$l_1 \ni C, E \Rightarrow l_1' \ni C', E'$$



$$\Psi_{h_2}: l_2 \setminus \{A\} \rightarrow l_2' \text{ ПРАВА } \begin{matrix} l_2 \ni A \\ l_2' \nexists A \end{matrix}$$

$$l_2 \ni F, D \Rightarrow l_2' \ni F', D'$$

$$\Rightarrow l_2' = F'D'$$

$$k_1 \perp k_2 \Rightarrow l_1' \perp l_2' ; l_1' \cap l_2' = \{B'\}$$

$$k_2 \perp k_3 \Rightarrow l_2' \perp l_3' \Rightarrow l_2' \text{ садржи центар круга } k_3'$$

$$k_1 \perp k_3 \Rightarrow l_1' \perp l_3' \Rightarrow l_1' \text{ садржи центар круга } k_3'$$

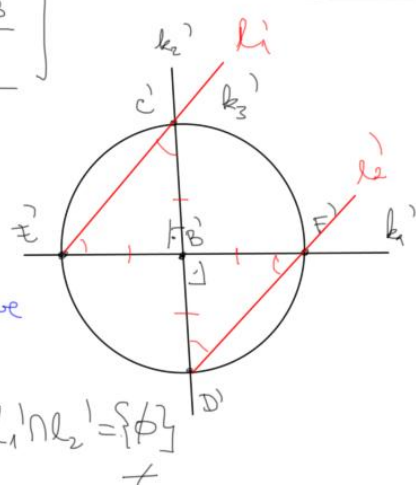
$$\Rightarrow B' \text{ центар круга } k_3'$$

Како су $\Delta E'B'C'$ и $\Delta F'B'D'$ слични
и како $\frac{E'B'}{F'B'} = \frac{C'D'}{B'D'}$

$$\Rightarrow \Delta E'B'C' \stackrel{с\ddot{л}и}{=} \Delta F'B'D' \Rightarrow \angle E'B'C' = \angle F'B'D'$$

$$\angle E'B'C' \text{ и } \angle F'B'D' \text{ комплементарни} \Rightarrow E'C' \parallel D'F' \text{ и } C'D' \parallel B'F'$$

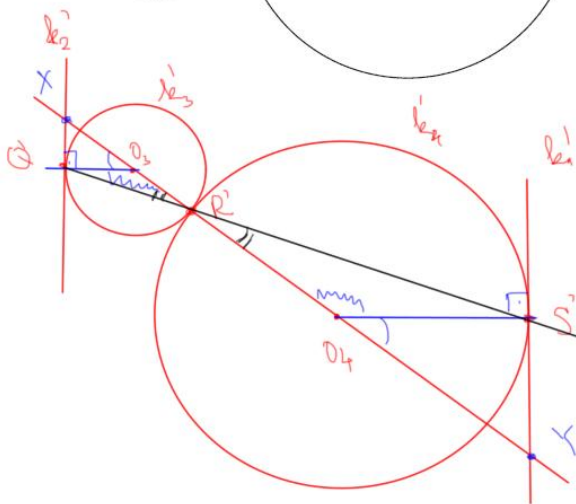
$$l_1' \parallel l_2'$$



Кругови који се додирују у центру инверзије се сакажу у сараменим правима
 $\Psi_{h'} = Id \Rightarrow l_1$ и l_2 додирују у A .

$$\text{II начин: } \text{пос. } l_1 \cap l_2 = \{X\}, X \neq A \quad \Psi_h(X) = X' \quad \Rightarrow l_1' \cap l_2' \ni X' \quad \nsubseteq \quad l_1' \parallel l_2' \text{ ил. } l_1' \cap l_2' = \{A\}$$

7. У равни су дата четири круга од којих сваки додирује тачно два круга од преосталих. Доказати да су додирне тачке колинеарне или концикличне.



Означимо дакле додирне тачке $k_1 \cup k_2, k_2 \cup k_3, k_3 \cup k_4, k_4 \cup k_1$ редом са P, Q, R, S .

Означимо $\ell(P, S), \ell > 0$ променљивом, γ_ℓ - инверзија у огледалу на кругу ℓ

$$\gamma_\ell(Q) = Q', \gamma_\ell(R) = R', \gamma_\ell(S) = S'$$

$$\begin{aligned} \gamma_\ell: k_1 \setminus \{P\} &\rightarrow k'_1 \text{ праска} \\ k_1 \ni P &\quad k'_1 \ni P \\ k_1 \ni S &\Rightarrow k'_1 \ni S' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_\ell: k_2 \setminus \{P\} &\rightarrow k'_2 \text{ праска} \\ k_2 \ni P &\quad k'_2 \ni P \\ k_2 \ni Q &\Rightarrow k'_2 \ni Q' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_\ell: k_3 &\rightarrow k'_3 \text{ крст} \\ k_3 \ni P &\quad k'_3 \ni P \\ k_3 \ni Q, R &\Rightarrow k'_3 \ni Q', R' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_\ell: k_4 &\rightarrow k'_4 \text{ крст} \\ k_4 \ni P &\quad k'_4 \ni P \\ k_4 \ni R, S &\Rightarrow k'_4 \ni R', S' \end{aligned}$$

$$k_1 \cup k_2 \text{ се додирују у } P \text{ - центару инв.} \Rightarrow k'_1 \parallel k'_2$$

$$k_2 \cup k_3 \text{ — } l \text{ — } Q \Rightarrow k'_2 \cup k'_3 \text{ додир. у } Q' \Rightarrow k'_2 \text{ тангентна у } Q' \text{ на } k'_3$$

$$k_1 \cup k_4 \text{ — } l \text{ — } S \Rightarrow k'_1 \cup k'_4 \text{ — } l \text{ — } S' \Rightarrow k'_1 \text{ — } l \text{ — } S' \text{ — } k'_4$$

$$k_3 \cup k_4 \text{ додирују у } R \Rightarrow k'_3 \cup k'_4 \text{ — } l \text{ — } R'$$

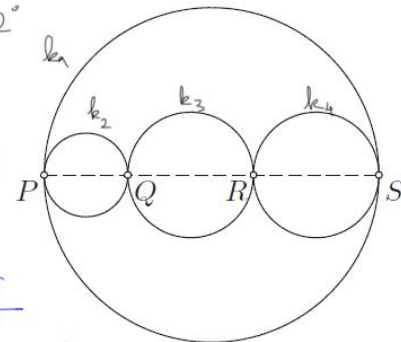
- k'_1 танг. у Q' на $k'_3 \Rightarrow O_3 Q' \perp k'_1$
- $k'_1 \text{ — } l \text{ — } S' \text{ на } k'_4 \Rightarrow O_4 S' \perp k'_1$
- $k'_3 \cup k'_4 \text{ се додирују у } R' \Rightarrow O_3 O_4 \ni R'$

Како башта (*) и $\Delta Q'O_3R', \Delta S'R'O_4$ једнакоугаона, $\angle(O_3, R, O_4), Q', S' \div R' \Rightarrow \angle O_3R'Q' = \angle O_4R'S'$ унакрсно

$\Rightarrow Q', R', S'$ КОЛИНЕАРНЕ и $\boxed{P \ni Q', R', S'}$

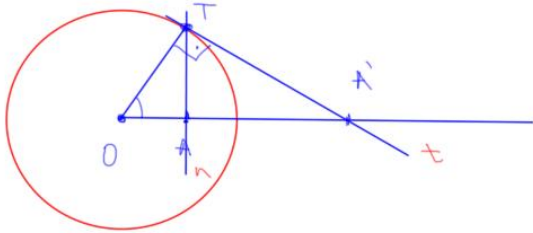
1° $P \notin l$: $\gamma_\ell: P \rightarrow P' \text{ крст}, P' \ni P, \gamma_\ell^2 = Id \Rightarrow \gamma_\ell(Q') = Q, \gamma_\ell(R') = R, \gamma_\ell(S') = S \Rightarrow P' \ni P, Q, R, S \text{ — крст}$
 $\Rightarrow P, Q, R, S$ КОЛИНЕАРНЕ

2° $P \in l$: $\gamma_\ell: P \setminus \{P\} \rightarrow P \setminus \{P\}$, $P \ni Q', R', S' \Rightarrow P \ni Q, R, S \Rightarrow P, Q, R, S$ КОЛИНЕАРНЕ



ПОМОЌНЕ КОМПАЈУЊЕ:

П.К.1 Конструкція сінус-даних A при умові Ψ_k у відносі на криві $k(q)$ зр. $A' = \Psi_k(A)$.



$\triangleright$ gef: $A^1 = Y_k(A) \Leftrightarrow A \in \overline{OA}$, $OA \cdot OA^1 = r^2 = OT^2 \Rightarrow \frac{OA}{OT} = \frac{OT}{OA^1} \left. \begin{array}{l} \text{Drehung } T \in k \\ KTAO = \angle KA^1OT \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle OAT \sim \triangle OA^1T$

$$OT \perp TA'$$

t-wandele y wana $T_{\text{re kry}} k \Rightarrow \phi_{\text{DAT}} = \frac{\pi}{2}$ ✓

Lemma 1: Kružnica k je tangenta na pravcu l ako i samo ako postoji tačka A na l takva da je $OA \perp l$.
 Ako k i l su secajuće, tada je l tangenta na k u tački A ako i samo ako je $OA \perp l$.
 Ako k i l su secajuće, tada je l tangenta na k u tački A ako i samo ako je $OA \perp l$.

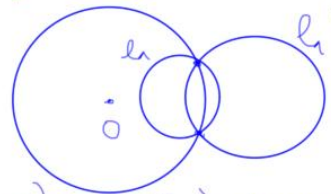
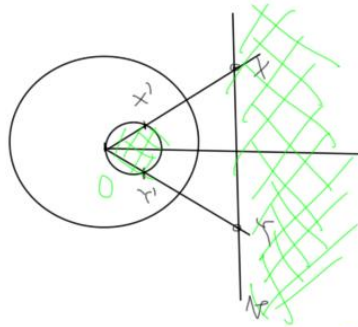
Aspek: yhasas uchiwasi socwybat.

$$\underline{\text{Def. 2}} \quad \psi_k: \begin{matrix} p \mapsto l_{k,p,r} \\ p \neq 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \leftarrow \\ l \geq 0 \end{matrix}$$

Означим ся X и Y где произвольные wake space P .

$$\xrightarrow{nr} \ell(x) = x', \ell(r) = r' \Rightarrow \ell - \text{Körper}, \ell \ni 0, r', x'$$
$$\underline{n_{k3}} \quad k(0,r) \quad \psi_{k, \frac{l_1}{k_{\text{PSR}}}} \rightarrow l_1', \quad l_1, l_2 \neq 0$$

$\Rightarrow$ Komen se X, Y, Z vtipu varke kprot = $L_n \xrightarrow{n+1} \psi_k(X)=X', \psi_k(Y)=Y', \psi_k(Z)=Z' \Rightarrow L_{n+1} = K_p \cup R, L_1' \ni X'; Y'; Z'$.



8. Конструисати круг k који садржи две дате тачке A и B и додирује дату праву p .

Пешаваро у ситуацији каде $A \neq B, A, B \notin p$.

АНАЛИЗА: Нека је k изражен круг. Означимо са $h(A, B), p \rightarrow$ изражавањем
а са Ψ_h -инверзијом у односу на круг h . $\Psi_h(B) = B'$; $\Psi_h: p \rightarrow p'$ крст
 $p' \neq A$ $p' \rightarrow A$
 $\Psi_h: k \setminus \{A\} \rightarrow k'$ изражен, $k \ni B \Rightarrow k' \ni B$. Како k садржије $p \Rightarrow$
 $k \ni A$ $k' \ni A$

k' садржије $p' \Rightarrow k'$ тангентна на круг p' .

КОНСТРУКЦИЈА: $\Psi_h(A, B), p \rightarrow$ изражавањем

✓ - 1 - $B' = \Psi_h(B)$ НК 1

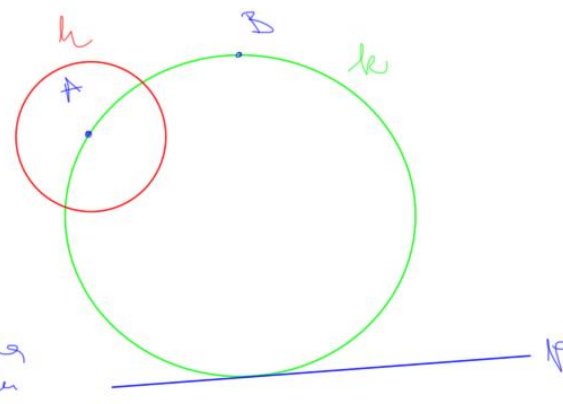
✓ - 1 - $p' = \Psi_h(p)$ (НК 2)

(НК) $\square$ - 1 - тангенту k' из B' на p' ,
 $k' \ni A$

• Како $k = \Psi_h(k')$ (НК 2).

ДИСКУСИЈА: $\square A, B \in p$

• Број решења зависи од др. тангенту из B' на p' , т.е. $t \neq A$ (др. перс. ≤ 2).



ПОКАЗ: НК $\Psi_h(k) = k$
НК $\Rightarrow k'$ изражен, $k' \ni A \Rightarrow k$ - крст, $k \ni A$
НК $\Rightarrow k' \ni B' \Rightarrow B \in k$
(НК $\Psi_h(B) = B'$)
НК $\Rightarrow k'$ садржије $p' \Rightarrow k$ садржије p .

ПРИМЕР 1:

$h(0,0), 0 > 0$ условно

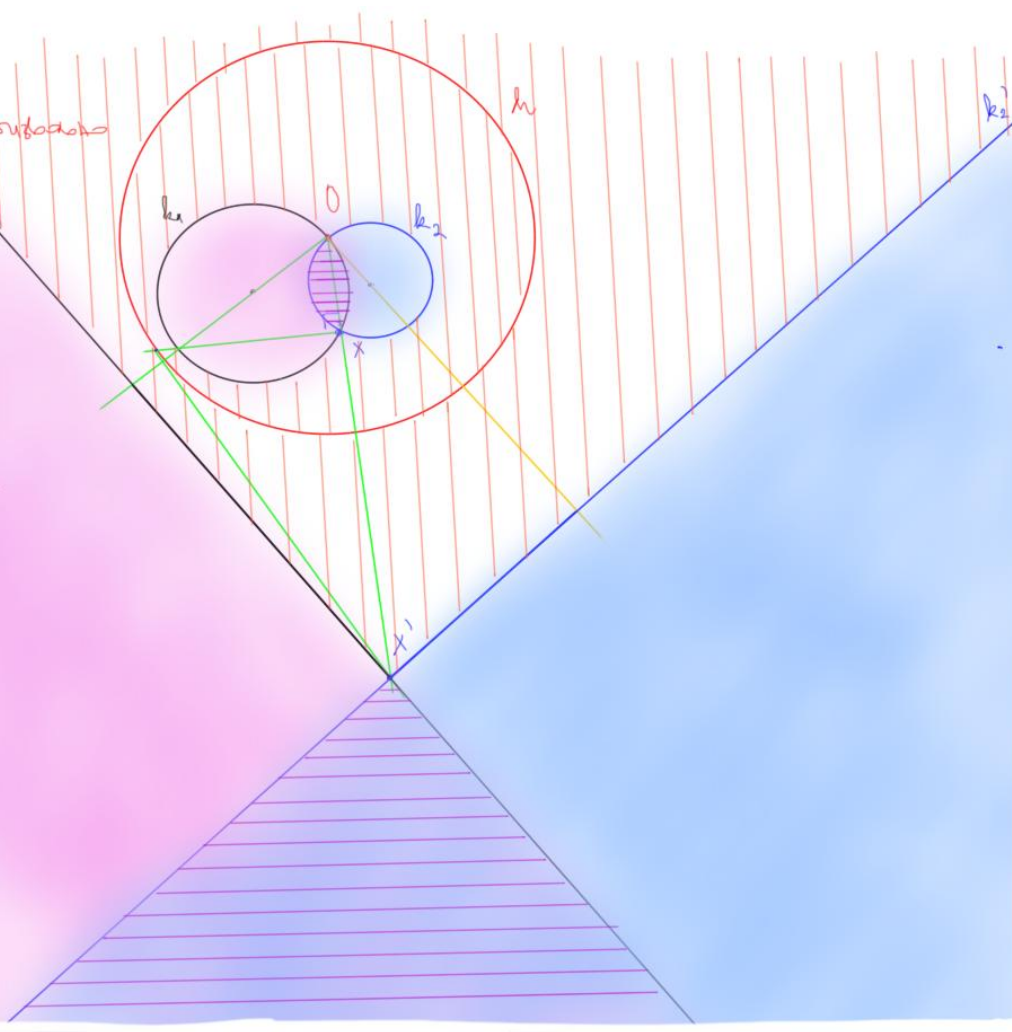
$k_1 \geq 0$

$k_2 \geq 0$

Ψ_1 удовлетворяет
у условию на
кривой h

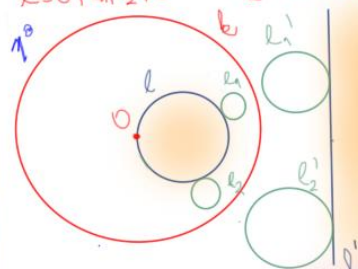
$\Psi_1: k_1(0) \rightarrow k_1$

$\Psi_1: k_2(0) \rightarrow k_2$



ПРИМЕР 2: $h(0,0), 0 > 0$ условно; кривая h состоит из кривых k_1 и k_2

$l \geq 0, k_1, k_2 \geq 0$ $\Psi_k: l(0) \rightarrow l', \Psi_{k_1}: k_1 \rightarrow k_1', \Psi_{k_2}: k_2 \rightarrow k_2'$

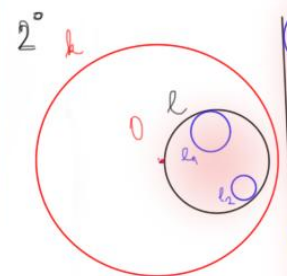


Кривая h состоит из кривых k_1 и k_2

кривые k_1 и $k_2 \rightarrow$

l' является защитной сплошной тангентой

и всем $0, l_1', l_2' \div l'$

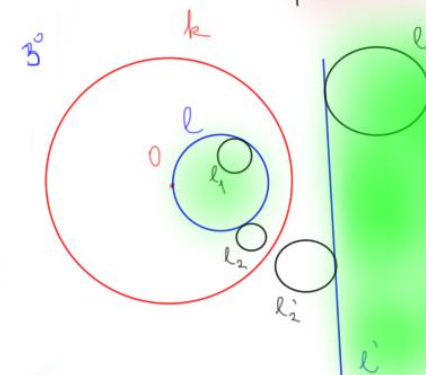


Кривая h состоит из кривых k_1 и k_2

k_1 и $k_2 \rightarrow$

l' является защитной сплошной тангентой

и всем $0, l_1' \div l', 0, l_2' \div l'$



Кривая h состоит из кривых k_1 ,
а кривая $k_2 \rightarrow$

l' является защитной сплошной тангентой

и всем $0, l_1' \div l', 0, l_2' \div l'$

9. Конструисати круг k који садржи дату тачку A и додирује дате кругове k_1 и k_2 .

Решавамо 5. случај $A \notin k_1, k_2$

Анализа: Нема k -обрашених круг. Дознамо са $\ell(A, S), S > 0$ израчунамо

и Ψ_ℓ инверзија у односу на круг ℓ . $\Psi_\ell: k_1 \rightarrow k_1'$ крст, $k_1' \neq A$,
 $k_1' \neq A$

$\Psi_\ell: k_2 \rightarrow k_2'$ крст, $k_2' \neq A$, $\Psi_\ell: k \setminus \{A\} \rightarrow k' - \text{ПРВА}$, $k' \neq A$. Како k додирује

k_1 и $k_2 \Rightarrow k'$ додирује k_1' и $k_2' \Rightarrow k' - \text{ЗАЈЕДНИЧКА ТАНГЕНТА КРСТОВА } k_1' \text{ и } k_2'$.

Конструкција: • Констр. $\ell(A, S), S > 0, S$ произвољно

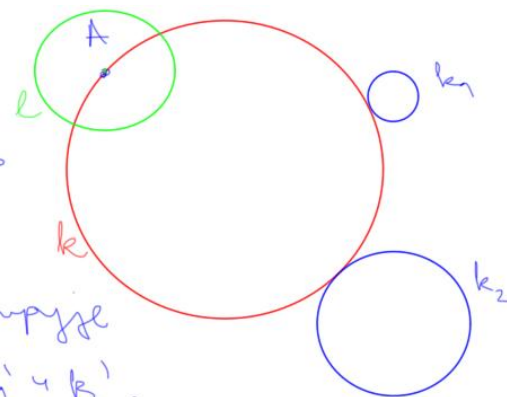
• $A' = \Psi_\ell(k_1), k_2' = \Psi_\ell(k_2)$ (ПК3)

(ПК) $\square - \perp \perp k' - \text{заједничку тангенту кругова } k_1' \text{ и } k_2', k' \neq A$

• Констр. $k = \Psi_\ell(k')$. (ПК2)

(ПК1) јер треба за ПК2, ПК3)

Дискусија: Друго решење зависи од броја заједничких тангената k' (спора и интравидних) кругова k_1 и k_2 , тј. $k' \neq A$. (бр. рел ≤ 4)



ДОКАЗ: • ПК k' одговара, $k' \neq A \Rightarrow k$ крст, $k \neq A$.
 $\text{ПК } \Psi_\ell(k') = k$

• ПК k' зај. танг. $k_1' \text{ и } k_2' \Rightarrow k'$ додирује $k_1' \text{ и } k_2'$

$\text{ПК } \Psi_\ell(k_1) = k_1', \Psi_\ell(k_2) = k_2', \Psi_\ell^2 = \text{Id} \Rightarrow \Psi_\ell \text{ - инверзија}$

$\Rightarrow k$ додирује k_1 и k_2 .

10. Конструисати круг који споља додирује три дата круга k_1, k_2, k_3 .

АНАЛИЗА: Нека је k -трешени круг. Означимо са O_1, O_2, O_3 редом центре кругова k_1, k_2, k_3 , а њихове радијусе редом са r_1, r_2, r_3 . Ђто $r_1 < r_2, r_3$. Означимо са $l(O, r+r_1)$

$l_2(O_2, r_2-r_1), l_3(O_3, r_3-r_1)$. Тада круг $l \supset O_1$, и додирује кругове l_2 и l_3 . Нека је $h(O_1, \delta), \delta > 0$ одређено, $\exists \psi_h$ инверзија у кругу h . $\psi_h: l_2 \rightarrow l'_2$ кад $l'_2 \neq O_1$
 $\psi_h: l_3 \rightarrow l'_3$ кад $l'_3 \neq O_1$, $\psi_h: l \cap \{O_1\} \rightarrow l'$ првкв, $l' \neq O_1$. Како l додирује кругове l_2 и l_3 са исте стране $\Rightarrow l'$ је спољн. ТАК. За кругове l'_2 и l'_3 ; а јерко h додирује спољн $\Rightarrow O_1, l'_2, l'_3 \in l'$.

КОНСТРУКЦИЈА: • Конца $h(O_1, \delta), \delta > 0$, δ одређено
 $\checkmark$ — $l_2(O_2, r_2-r_1), l_3(O_3, r_3-r_1)$

ПК1 $\rightarrow$ (ПК3) • Конца $l'_2 = \psi_h(l_2), l'_3 = \psi_h(l_3)$.

(ПК) □ Конца. l' — заједничка спољн. ТАК. l'_2 и l'_3
 $l' \supset O_1, l'_2, l'_3, O_1, l' \neq O_1$

• Конца $l = \psi_h(l')$ (ПК2)

• Обозначимо O -центар l, R -радијусе $l(O, R)$

• Конца $k(O, R-r_1)$.

ДИСКУСИЈА: Држ. јед. закључ. од др. спољн. ТАК. l' на l'_2 и l'_3 од $O_1, l'_2, l'_3 \in l'$ (др. ≤ 2)

ДОКАЗ: • ПК $\Rightarrow l' \neq O_1, l'$ првкв $\Rightarrow$
 l -кас, $l \supset O_1$

ПК $\Rightarrow l'$ зај. одр. од $l'_2, l'_3 \Rightarrow l$ додирује са исте спр. l_2 и l_3

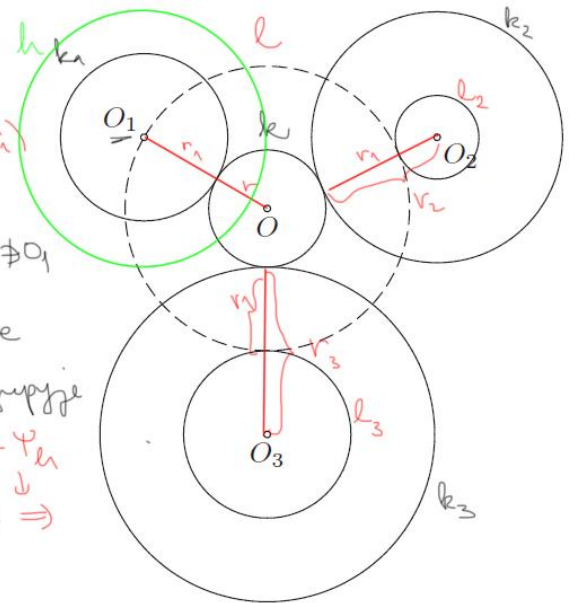
l_2 и l_3

ПК $\Rightarrow l' \supset O_1, l'_2, l'_3 \Rightarrow l$ додирује спољн l_2 и l_3

ПК $\Rightarrow k(O, R-r_1) \Rightarrow k(O, R-r_1)$ додирује $k_1(O_1, r_1)$
 ПК $\Rightarrow l \supset O_1, l(O, R)$

ПК $\Rightarrow l$ додирује $l_2 \Rightarrow k(O, R-r_1)$ додирује $k_2(O_2, r_2)$

ПК $\Rightarrow l$ — $l_3 \Rightarrow k(O, R-r_1)$ додирује $k_3(O_3, r_3)$ □



Изометријске трансформације равни

Дефиниција 24. Нека је α равн. Пресликавање $\mathfrak{I} : \alpha \longrightarrow \alpha$, такво да за сваки пар тачака (A, B) равни α важи $(A, B) \cong (\mathfrak{I}(A), \mathfrak{I}(B))$, називамо *изометријском трансформацијом (изометријом)* равни α .

$\Rightarrow$ $\mu_{\text{H}_2\text{O}}$ се и догус . $\text{процедура} \Rightarrow \mu_{\text{H}_2\text{O}}$ се и уштити .

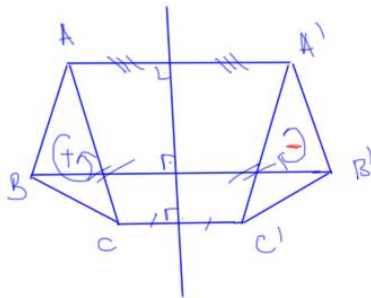
+ Идентичност $Id = E$ (конциденција) је изолациони корак се свака јачка работи (процедура) слика у себе.

* ИНВАРИАНТАН μ не је μ који се некако изолује од осталих μ -ова.

7. $\phi \rightarrow \psi \wedge \chi$

- Изометрија орале која садржи инваријантност једну криву јачину је ЦЕНТРАЛНА РЕФЛЕКСИЈА, S_r .
- Изометрија равни ———— | ———— две тачке орале је ОСНА РЕФЛЕКСИЈА, S_p ←
- Изометрија простора ———— | ———— | ———— | ———— равни Π је РАВАНСКА РЕФЛЕКСИЈА, S_π .

① СВЯЗЬ ИЗОМЕТРИИ (ИЗМ. ТРАНСФ.) РАВНИИ МОЖЕ ПРЕДСТАВИТИ КАО КОМПОЗИЦИЈУ НАДБИЛИКЕ 3
ОСНОВНЕ РЕФЛЕКЦИЈЕ!



ВРСТЕ ИЗОМЕТРИЈА (ураче, паблик, опсеант)

(+) * DIRECTHE uzorowprze - HE METADY opytowazuy, w.
MYBAY JE

(-) * ИНДИРЕКТНЕ — | — — МЕДІАТЪ ОРЈЕНТАЦИЈА.
Кандидатъ је директне изоловање (+ +) или
је индиректне (- - -) је ДИРЕКТА, а кандидатъ
директне и индиректне (+ - -) је ИНДИРЕКТА.

Sp-очка реф - инд и реста

$$1^\circ \quad J = S_p$$

ИНВЕРСИЯ

$$2^\circ \quad J = S_g \circ S_p :$$

ДИРЕКТИВА

$$3^\circ \quad J = S_r \circ S_g \circ S_p :$$

ИНВЕРСИЯ

ОСНА РЕФЛЕКСИЈА

(δ и τ ораде p (де $\sigma \in p$))

$$* \quad p = g : J = S_p \circ S_p = S_p^2 = Id = E$$

КОНЦИДЕНЦИЈА

$$* \quad p \cap g = \{o\} : J = R_{o,2} \circ R_{p0g}$$

РОТАЦИЈА ($\exists!$ ф.т.)

случ. $p \perp g : J = R_{o,2} \cdot \frac{\pi}{2} = R_{o,\pi} = S_o$

ЦЕНТРАЛНА СИМЕТРИЈА

$$* \quad p \parallel g : J = T_{2 \cdot \vec{PQ}}$$

ТРАНСЛАЦИЈА

($\vec{PQ} \perp p, g, P \in p, Q \in g$ (нема ф.т.))

$$* \quad p, g, r \in X \quad \textcircled{+} \quad \text{Ако ораде } p, g, r \text{ су ораде једног правца}$$

ОСНА РЕФ

$\Rightarrow p, g, r \in X : S_r \circ S_g \circ S_p = S_d \Leftrightarrow d \in X$

$$J = S_d \quad \leftarrow (\exists \text{ једн ф.т. (де } \sigma \in d))$$

$$* \quad p, g, r \notin X : J = G_{\Delta, \vec{v}}, \Delta \parallel \vec{v}$$

КЛИЗАЈУЋА РЕФЛЕКСИЈА

$$G_{\Delta, \vec{v}} = T_{\vec{v}} \circ S_{\Delta} = S_{\Delta} \circ T_{\vec{v}}$$

(нема ф.т.)

