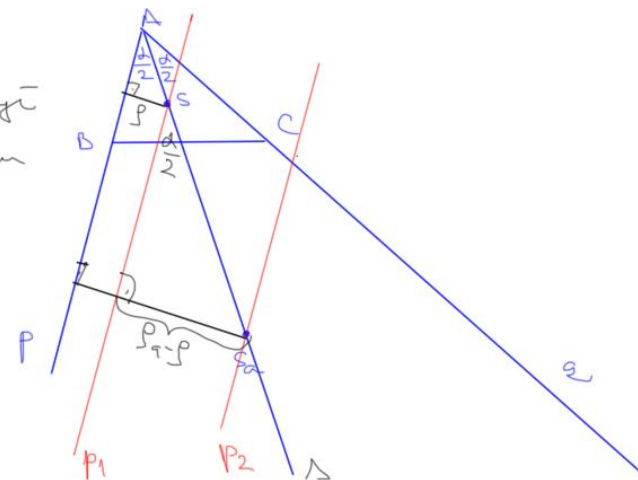


1. Конструисати троугао ABC ако су задати следећи елементи: 10) α, ρ, ρ_a ;

Анализ: Нека $\triangle ABC$ зад. услове зад. Означимо са k и k_a уписан и спољни уписан круги који одговарају центру A , а са S и S_a редом ихове центре. $\Rightarrow S, S_a \in$ дисектриси ун. угла код A . Означимо је са A_1 ; $\Rightarrow d(S, AB) = d(S, AC), d(S_a, AB) = d(S_a, AC)$. Према BC је заједничка унутар вантетна k и k_a .

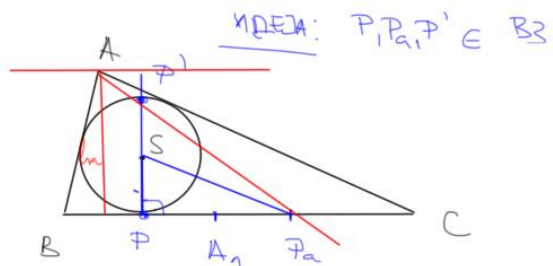
- Конструкција:
- Конструисамо $\angle PAQ = \alpha$.
 - Констр. дисектрису $\angle PAQ$ и означимо је са A_1 .
 - Констр. права $p_1: p_1 \parallel p, d(p, p_1) = \rho, p_1, q \cap p$
 - — l — l — $p_2: p_2 \parallel p, d(p_2, p) = \rho_a, p_2, q \cap p$
 - Означимо $A_1 \cap p_1 = \{S\}, A_1 \cap p_2 = \{S_a\}, B(A, S, S_a)$
 - Конструисамо $k(S, \rho), k_a(S_a, \rho_a)$
 - — l — t — зајед. унутар вантетну k и k_a (Πk)
 - $A_1 \cap t = \{B\}, A_2 \cap t = \{C\}$.



Доказ: Д.З.

Дискусија: Д.З.

11) $b - c, h_a, \rho$.



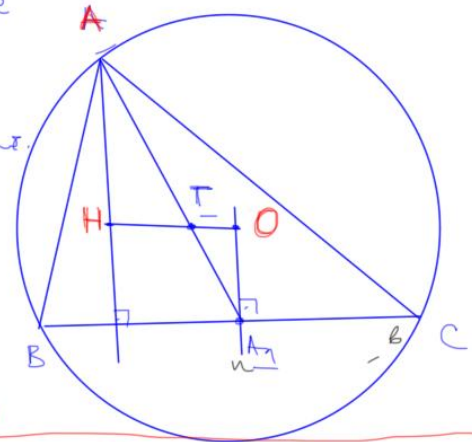
ИДЕЈА: $P, P_a, P' \in B_3$

$B_3 \Rightarrow PP_a = b - c$
 $SP \perp BC$
 $SP = \rho$

$B_3 \Rightarrow B(A, P', P_a)$

2. Конструисати троугао ABC ако су дати теме A , ортоцентар H и центар описаног круга O тог троугла.

АНАЛИЗА: Нека Δ заш условне заш. Како је O центар описаног круга, а A теме троугла $B, C \in k(O, OA)$. Такође O је пресек сва три симетрала троугла ABC
 $\Rightarrow O \in \Delta_{BC}, \Delta_{BC} \perp BC, \Delta_{BC} \ni A_n, A_n = S(BC)$ од $OA_n \perp BC$. Означимо са T девијант.
 H, T, O су колинеарне, $B(H, T, O), HT = 2TO$ (Дијерова формула) $\Rightarrow \frac{HT}{TO} = \frac{2}{1}$
 T -девијант, AA_n девијант троугла $\Rightarrow \frac{AT}{TA_n} = \frac{2}{1} \Rightarrow \frac{HT}{TO} = \frac{AT}{TA_n}$, $\angle ATH = \angle A_nTO$ (уверствити) $\Rightarrow$
 $\Delta AHT \sim \Delta A_nOT$



КОНСТРУКЦИЈА: Означимо $T: B(H, T, O), HT = 2TO$

- ✓ Конструисамо $n: n \ni O, n \parallel AH$
- ✓ Означимо $\{A_n\} = AT \cap n, B(A, T, A_n)$
- ✓ Констру. $b: b \ni A_n, b \perp n$
- ✓ Како је $k(O, OA)$
- Означимо $\underline{k \cap b = \{BC\}}$

ДИСКУСИЈА: • $A \neq O$

- 1° $A = H \Rightarrow O = A_n \Rightarrow \exists \infty$ много реш
- 2° $A \neq H: OA_n < OA \Rightarrow \underline{AH < 2OA} \Rightarrow \exists$ реш
 $\parallel$
 $\frac{1}{2} AH$
 до на девијант.

ПОКАЗ: • $\text{пк } BC \in k(O, OA) \Rightarrow k \ni A, B, C \Rightarrow$

k -описан круг око $\Delta ABC \Rightarrow$ O -центар описаног круга око ΔABC

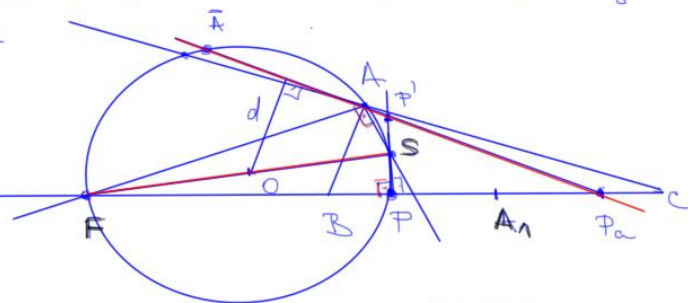
(1° A -теме ΔABC)

- $\text{пк } b \ni B, C, A_n \Rightarrow BC \perp n$
 $\text{пк } b \perp n$
 $\text{пк } n \ni O, A_n$
 $\Rightarrow OA_n \perp BC$
 $\Rightarrow OA_n$ девијант и симетрал. српачице BC
- $\text{пк } B, C \in k \Rightarrow OB = OC = OA \Rightarrow \Delta OBC$ једнакокрак
 $\Rightarrow A_n = S(BC) \Rightarrow AA_n$ девијант троугла ABC (1)

$\text{пк } n \parallel AH, \text{пк } B(H, T, O), \text{пк } B(A, T, A_n) \Rightarrow \frac{HT}{TO} = \frac{AT}{TA_n}$
 $\Rightarrow \frac{HT}{TO} = \frac{2}{1} \Rightarrow$
 $\text{пк } \frac{AT}{TA_n} = \frac{2}{1} \Rightarrow T$ девијант ΔABC
 $\Rightarrow B(H, T, O), HT = 2TO; O$ -центар описаног, T -девијант $\Rightarrow H$ - ортоцентар ΔABC .

3. Дате су тачке A_1, S, F . Конструисати троугао ABC ако је A_1 средиште BC , S центар уписаног круга, а F пресек симетрале спољашњег угла у темену A и праве BC .

НАПОМЕНА: Нека $\triangle ABC$ задовољава услове задатка. Нека су $P, P_a, P' \in B_3$. $B_3 \Rightarrow A_1 = S(BC) = S(PPa)$, $B_3 \Rightarrow B(A, P', Pa)$. Како је S центар уписаног круга $\Rightarrow AS$ дисектриса унутар. угла код A . Како је AF дисектриса спољ. угла код $A \Rightarrow AS \perp AF \Rightarrow A \in l$ наг орелитиком FS . Како је $SP \perp BC \Rightarrow \angle FPS = \frac{\pi}{2} \Rightarrow P \in l$. AB, AC су тангенте из A на $k(S, SP)$.



КОНСТРУКЦИЈА:

• Констр. Круг l наг орелитиком FS .

• Знамо $\{P\} = l \cap FA_1$

• Знамо $P' : B(P, S, P'), SP' = SP$

• Знамо $Pa : B(P, A_1, Pa), A_1Pa = A_1P$

• Знамо $\{A\} = l \cap PPa, B(A, P', Pa)$

• Констр. $k(S, SP)$

• Констр. тангенте t_1, t_2 из A на k

• Знамо $t_1 \cap FA_1 = \{B\}, t_2 \cap FA_1 = \{C\}$

$B(F, B, A_1, C)$.

ДОКАЗА: $\bullet S, F, A_1$ нису колинеарне

ДОКАЗ: $\bullet \Rightarrow B \in t_1, C \in t_2$ - тангенте из A на $k(S, SP)$
 $\Rightarrow AB, AC$ тангенте на k (1)

$\Rightarrow P \in l \Rightarrow \angle FPS = \frac{\pi}{2}$ тј. $SP \perp PF \} \Rightarrow SP \perp BC \Rightarrow BC$ тангентна на $k(S, SP)$. (2)

$\Rightarrow F, P \in BC$

$\bullet \Rightarrow B(A, P', Pa), Pa \in BC \Rightarrow AP' \perp BC \} \Rightarrow A, S \in BC$ (3)

$\Rightarrow SP = SP' \Rightarrow P' \in k(S, SP)$

$\bullet \Rightarrow k(S, SP)$ уписан у $\triangle ABC$, $[S$ - центар уписаног круга у $\triangle ABC] \Rightarrow AS$ дисектриса унут. угла код A

$\bullet \Rightarrow A \in l \Rightarrow \frac{\pi}{2} = \angle FAS \Rightarrow AF \perp AS$

$\Rightarrow AF$ дисектриса спољ. угла код A

$\bullet \Rightarrow F \in BC \Rightarrow F$ - пресек BC и дисектрисе спољ. угла код A

$\bullet \Rightarrow SP \perp BC \Rightarrow P$ танка додирна уписаног круга $k(S, SP)$ са попр. $BC \Rightarrow [P \in B_3]$ (4)

$\bullet \Rightarrow B(P, S, P'), SP' = SP \Rightarrow P'$ супрентр. центарне танк $P \Rightarrow [P' \in B_3]$

$\bullet \Rightarrow \{Pa\} = AP' \cap BC$

$\bullet \Rightarrow AP' \cap BC$ је додирна танка спољ. уписаног круга који садржи $A \} \Rightarrow [Pa \in B_3]$ (*)

$\bullet \Rightarrow B(P, A_1, Pa), PaA_1 = A_1P \Rightarrow A_1 = S(PPa) \Rightarrow [A_1 = S(BC)]$.

$\bullet \angle FSA_1 > \frac{\pi}{2}$; Знамо $O = S(FS)$

$\bullet d = d(O, PPa) : d > \frac{FS}{2} \Rightarrow \angle$ решење.

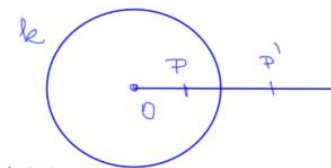
$\bullet d = \frac{FS}{2} \Rightarrow \angle$, реш го на уг.

$\bullet d < \frac{FS}{2} \Rightarrow \angle_2$ - "

$(P \in l \Rightarrow P' \in \text{ext } l, B_3(F, B, P, C) \Rightarrow C, P' \in l) \Rightarrow B(A, P', Pa)$

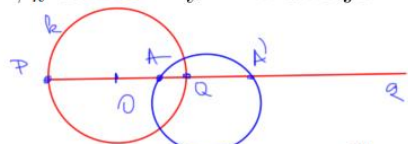
ИНВЕРЗИЈА

Деф. Нека је $k(O, r)$ произвољни круг равни $\mathbb{E}^2$. Инверзија у односу на круг k је пресликавање $\psi_k : \mathbb{E}^2 \setminus \{O\} \rightarrow \mathbb{E}^2 \setminus \{O\}$ којим се тачка P слика у тачку P' такву да P и P' припадају истој полуправој са теменом у O и важи $OP \cdot OP' = r^2$.

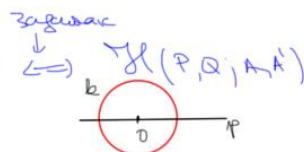


Особине Id

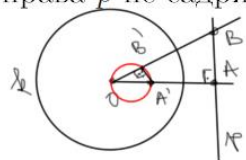
- $\psi_k^2 = \text{Id}$ (ИНВОЛУЦИЈА) $\psi_k(P) = P', \psi_k(P') = P \Leftrightarrow OP \cdot OP' = r^2, OP' \cdot OP'' = r^2 \Leftrightarrow OP \cdot Q' = Q' \cdot OP'' \Leftrightarrow OP = OP'' \Leftrightarrow P'' = P \Rightarrow \psi_k^2(P) = P$
 $P, P' \in O_P, P'', P'' \in O_P$
- $\psi_k(P) = P \Leftrightarrow P \in k$. ФИКСИРАЈУ СЕ ТАЧКЕ КРУГА k .
- ψ_k слика унутрашњост круга у спољашњост и обрнуто.
 $\psi_k(P) = P' \Rightarrow P \in \text{int } k \Rightarrow OP < r, OP \cdot OP' = r^2 \Rightarrow OP' > r \Rightarrow P' \in \text{ext } k$
 $P \in \text{ext } k \Rightarrow OP > r, OP \cdot OP' = r^2 \Rightarrow OP' < r \Rightarrow P' \in \text{int } k$
- Ако ψ_k слика A у A' и ако је PQ пречник круга k такав да су P, Q, A, A' колинеарне, онда важи $\mathcal{H}(P, Q; A, A')$.



- Ако права p садржи тачку O , тада се $p \setminus \{O\}$ слика у $p \setminus \{O\}$.



- Ако права p не садржи тачку O , онда се слика у $l \setminus \{O\}$ где је l круг који садржи O .



$p = AB$, и $p \perp OA$

$$\psi_k(A) = A' \Leftrightarrow OA \cdot OA' = r^2$$

$$\psi_k(B) = B' \Leftrightarrow OB \cdot OB' = r^2$$

$$\Rightarrow \frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'}$$

Заједнички

$$\angle BOA = \angle B'OA' \Rightarrow \triangle OAB \sim \triangle OA'B' \Rightarrow \angle OAB = \angle OA'B' \Rightarrow B' \in \text{кривој тај орентисан}$$

$$\Rightarrow \frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'} \Rightarrow \angle BOA = \angle B'OA' \Rightarrow \triangle OAB \sim \triangle OA'B' \Rightarrow \angle OAB = \angle OA'B' \Rightarrow B' \in \text{кривој тај орентисан}$$

$$\Rightarrow \frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'} \Rightarrow \angle BOA = \angle B'OA' \Rightarrow \triangle OAB \sim \triangle OA'B' \Rightarrow \angle OAB = \angle OA'B' \Rightarrow B' \in \text{кривој тај орентисан}$$

$$\Rightarrow \frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'} \Rightarrow \angle BOA = \angle B'OA' \Rightarrow \triangle OAB \sim \triangle OA'B' \Rightarrow \angle OAB = \angle OA'B' \Rightarrow B' \in \text{кривој тај орентисан}$$

$$\Rightarrow \frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'} \Rightarrow \angle BOA = \angle B'OA' \Rightarrow \triangle OAB \sim \triangle OA'B' \Rightarrow \angle OAB = \angle OA'B' \Rightarrow B' \in \text{кривој тај орентисан}$$

$$\Rightarrow \frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'} \Rightarrow \angle BOA = \angle B'OA' \Rightarrow \triangle OAB \sim \triangle OA'B' \Rightarrow \angle OAB = \angle OA'B' \Rightarrow B' \in \text{кривој тај орентисан}$$

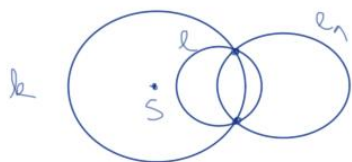
$$\Rightarrow \frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'} \Rightarrow \angle BOA = \angle B'OA' \Rightarrow \triangle OAB \sim \triangle OA'B' \Rightarrow \angle OAB = \angle OA'B' \Rightarrow B' \in \text{кривој тај орентисан}$$

$$\Rightarrow \frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'} \Rightarrow \angle BOA = \angle B'OA' \Rightarrow \triangle OAB \sim \triangle OA'B' \Rightarrow \angle OAB = \angle OA'B' \Rightarrow B' \in \text{кривој тај орентисан}$$

- Ако круг l садржи тачку O , онда се $l \setminus \{O\}$ слика у праву која не садржи O .

$$\psi_k: l \setminus \{O\} \rightarrow p \text{ где } p \text{ не садржи } O$$

- Ако круг l не садржи тачку O слика се у круг l_1 који такође не садржи O . При том се центар круга l НЕ ПРЕСЛИКАВА у центар круга l_1 .



$$l(O, r), l_1(O_1, r_1)$$

$$\psi_k: l \rightarrow l_1$$

$$l, l_1 \neq S$$

$$\psi_k: O \not\rightarrow O_1$$

- $\psi_k(A)\psi_k(B) = \frac{r^2}{OA \cdot OB} AB$.

$$\psi_k(A) = A' \Leftrightarrow OA \cdot OA' = r^2, A'A \text{ на самој кружолу са цент. у } O$$

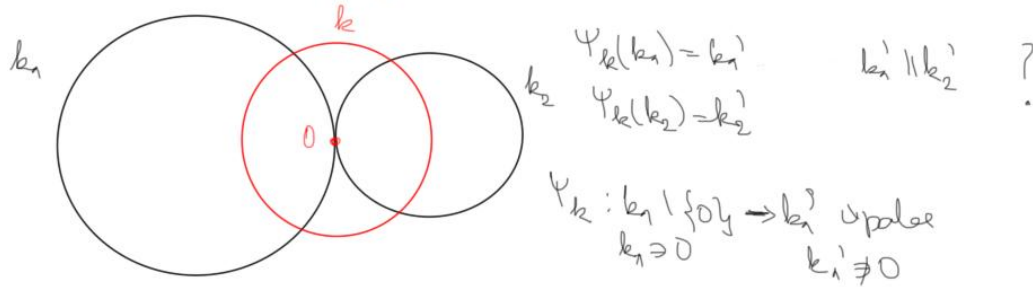
$$\psi_k(B) = B' \Leftrightarrow OB \cdot OB' = r^2, B'B \text{ ————— ————— —————}$$

$$\triangle OAB \sim \triangle OB'A' \quad \text{од.} \quad \frac{OA}{OB'} = \frac{OB}{OA'} = \frac{AB}{A'B'}$$

$$\Rightarrow \frac{A'B'}{AB} = \frac{OB'}{OA} = \frac{OB'}{OA} \cdot \frac{OB}{OB} = \frac{r^2}{OA \cdot OB} \Rightarrow \boxed{A'B' = \frac{r^2}{OA \cdot OB} AB}$$

- ψ_k чува углове између кривих.

1. Ако се кругови k_1 и k_2 додирују у центру инверзије, тада се инверзијом сликају у две паралелне праве. Доказати.



$$\psi_k: k_2 \setminus \{O\} \rightarrow k_2' \text{ паралел}$$

$k_2 \ni O \quad k_2' \ni O$

$$\underline{k_1' \cap k_2'} = \psi_k(k_1 \setminus \{O\}) \cap \psi_k(k_2 \setminus \{O\}) = \psi_k(k_1 \setminus \{O\} \cap k_2 \setminus \{O\}) = \psi_k(\underbrace{(k_1 \cap k_2)}_{\{O\}} \setminus \{O\}) = \psi_k(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow k_1' \parallel k_2'$$

$\times$
 II начин

$n.n.c. \quad k_1' \cap k_2' = \{x\}, x \neq O$

$$\psi_k: x \rightarrow x', x' \neq O$$

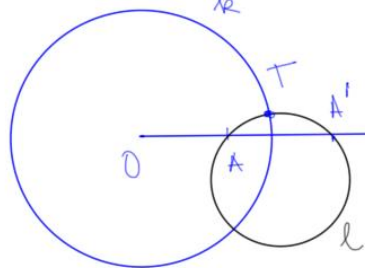
$$k_1', k_2' \ni x \Rightarrow k_1 \cap k_2 \ni x'$$

$$\Rightarrow k_1 \cap k_2 = \{x', O\}, x' \neq O \quad \text{jer се } k_1 \text{ и } k_2 \text{ додирују у } O.$$

$\times$

2. Нека се инверзијом ψ_k тачка A која не припада кругу k слика у A' и нека је l произвољан круг који садржи A и A' . Доказати да је $l \perp k$.

$$\psi_k(A) = A', \quad A \notin k \Rightarrow A \neq A'$$



$$\psi_k(A) = A' \Rightarrow OA \cdot OA' = r^2 \stackrel{\text{Teke}}{=} OT^2$$

$$A' \in O_l, OA \cdot OA' = OT^2 \Rightarrow P(O, l) = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA'} = OT^2 \Rightarrow OT \text{ тангенс из } O \text{ на } l \Rightarrow \boxed{OT = t_l}$$

$$\boxed{t_k \perp OT} \text{ (јасно изнетом танг. и нормале)} \Rightarrow \boxed{OT = t_l \perp t_k \Leftrightarrow l \perp k.}$$

3. Нека је O центар описаног круга l троугла ABC . Ако су B' и C' тачке полуправих AB и AC такве да је $AB \cdot AB' = AC \cdot AC'$ доказати да је $OA \perp B'C'$.

$$AB \cdot AB' = AC \cdot AC' = r^2$$

$$\psi_k(B) = B' \Leftrightarrow AB \cdot AB' = r^2$$

$$\psi_k(C) = C' \Leftrightarrow AC \cdot AC' = r^2$$

$$\psi_k: p \setminus \{A\} \rightarrow p \setminus \{A\} \\ p \ni A \quad p \ni A$$

$$\psi_l: l \setminus \{A\} \rightarrow l' \text{ - описаног } \left. \begin{array}{l} l \ni A \quad l' \ni A \\ l \ni B, C \Rightarrow l' \ni B', C' \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{l' = B'C'}$$

$$\text{Означимо } p = OA.$$

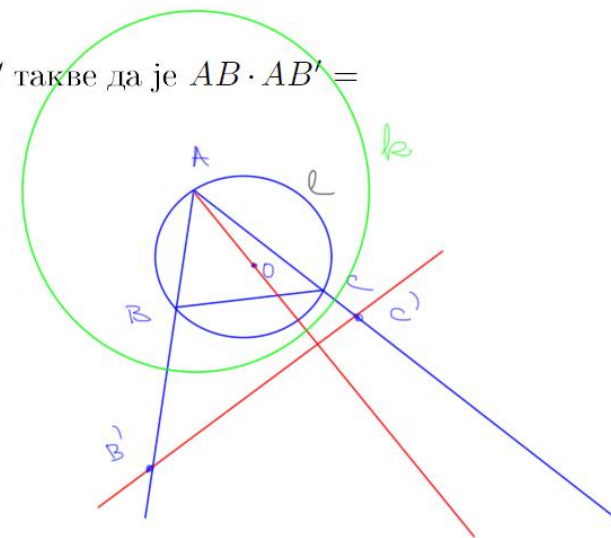
$$\psi_k \text{ - муља уопште}$$

$$\angle(AO, B'C')^\perp = \angle(AO, l) = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{OA \perp B'C'}$$

$$\psi_k^2 = Id \Rightarrow \psi_k(l') = l \text{ и аналогно}$$

$$O \text{ - центар круга } l$$



4. Нека је $ABPQ$ нететивни четвороугао. Доказати да је угао између кругова описаних око троуглова ABP и ABQ једнак углу између кругова описаних око троуглова PQA и PQB .

$$\angle(k_1, k_2) \stackrel{?}{=} \angle(l_1, l_2)$$

Нека је $k(A, S)$, $S > 0$, кружница. γ_k означава инверзију у односу на k .

$$\gamma_k(B) = B', \gamma_k(P) = P', \gamma_k(Q) = Q'$$

$$\gamma_k: \left. \begin{array}{l} k_1 \setminus \{A\} \rightarrow k'_1 \text{ ПРАВА} \\ k_1 \ni A \quad k'_1 \nexists A \\ k_1 \ni B, P \Rightarrow k'_1 \ni B', P' \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{k'_1 = B'P'}$$

$$\gamma_k: \left. \begin{array}{l} k_2 \setminus \{A\} \rightarrow k'_2 \text{ ПРАВА} \\ k_2 \ni A \quad k'_2 \nexists A \\ k_2 \ni B, Q \Rightarrow k'_2 \ni B', Q' \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{k'_2 = B'Q'}$$

$$\gamma_k: \left. \begin{array}{l} l_1 \setminus \{A\} \rightarrow l'_1 \text{ ПРАВА} \\ l_1 \ni A \quad l'_1 \nexists A \\ l_1 \ni P, Q \Rightarrow l'_1 \ni P', Q' \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{l'_1 = P'Q'}$$

$$\gamma_k: \left. \begin{array}{l} l_2 \rightarrow l'_2 - \text{КРУГ} \\ l_2 \nexists A \quad l'_2 \nexists A \\ l_2 \ni B, P, Q \Rightarrow l'_2 \ni B', Q', P' \end{array} \right\}$$

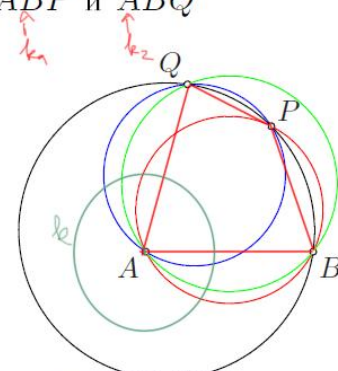
t — тангента у P' на l'_2

$$\underbrace{\angle(l_1, l_2)}_{\gamma_k\text{-миле углове}} = \angle(l'_1, l'_2) = \angle(P'Q', l'_2) \stackrel{\downarrow}{=} \angle(P'Q', t) \stackrel{\uparrow}{=} \angle P'B'Q' = \angle(P'B', B'Q') = \angle(k'_1, k'_2) = \angle(k_1, k_2)$$

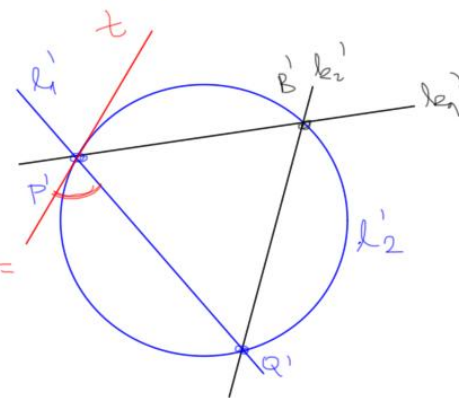
верифицира на $\widehat{P'Q'}$

$$\stackrel{\uparrow}{=} \angle(k_1, k_2)$$

γ_k миле углове



$$\begin{aligned} k_1 &= k(A, B, P) \\ k_2 &= k(A, B, Q) \\ l_1 &= k(A, P, Q) \\ l_2 &= k(B, P, Q) \end{aligned}$$



5. Нека се кругови k_1, k_2, k_3 међусобно додирују у тачкама P, Q, R . Доказати да је круг описан око троугла PQR ортогоналан на сва три круга.

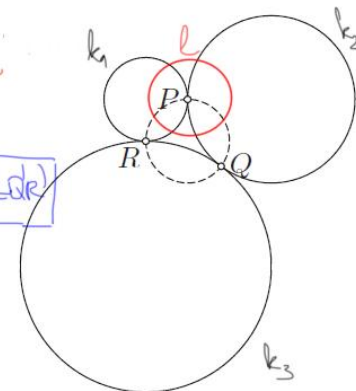
$$\begin{aligned} k_1 \cap k_2 &= \{P\} \\ k_1 \cap k_3 &= \{R\} \\ k_2 \cap k_3 &= \{Q\} \\ k &\ni P, Q, R \end{aligned}$$

Нека је $l(P, S), S > 0$, l - овалом; γ_L - овалом инверзије у односу на l .

$$\gamma_L: \begin{aligned} k_1 \cap \{P\} &\rightarrow k'_1 \text{ ПРАВА} \\ k_1 \ni P &\quad k'_1 \ni P \\ k_1 \ni R &\Rightarrow k'_1 \ni R' \end{aligned}$$

$$\gamma_L: \begin{aligned} k_2 \cap \{P\} &\rightarrow k'_2 \text{ ПРАВА} \\ k_2 \ni P &\quad k'_2 \ni P \\ k_2 \ni Q &\Rightarrow k'_2 \ni Q' \end{aligned}$$

$$\gamma_L: \begin{aligned} k \cap \{P\} &\rightarrow k' \text{ ПРАВА} \\ k \ni P &\quad k' \ni P \\ k \ni Q, R &\Rightarrow k' \ni Q', R' \end{aligned} \quad \boxed{k' \ni Q, R}$$



$$\begin{aligned} \gamma_L: k_3 &\rightarrow k'_3 \text{ ПРАВА} \\ k_3 \ni P &\quad k'_3 \ni P \\ k_3 \ni Q, R &\Rightarrow k'_3 \ni Q', R' \end{aligned}$$

k_1 и k_2 се додирују у P - центар круга у односу на који
овалом инверзије $\Rightarrow \boxed{k'_1 \parallel k'_2}$

k_2 додирује k_3 у $Q \Rightarrow k'_2$ додирује k'_3 у Q' на кругу k'_3

$k_1 \perp k_3 \perp R \Rightarrow k'_1 \perp R' \perp$

Означимо центар круга k'_3 са O' .

k'_2 додирује $k'_3 \Rightarrow k'_2 \perp O'Q'$

$k'_1 \perp k'_3 \Rightarrow k'_1 \perp O'R'$

$k'_1 \parallel k'_2 \Rightarrow OQ' \parallel OR' \Rightarrow R'Q', O'$ колинеарне

$$\Rightarrow k'_2 \perp R'Q' \Rightarrow \frac{\pi}{2} = \angle(k'_2, R'Q') = \angle(k_2, k) \Rightarrow \boxed{k \perp k_2}$$

$$\Rightarrow k'_1 \perp R'Q' = \frac{\pi}{2} = \angle(k'_1, R'Q') \stackrel{\text{не нису у}}{\neq} \angle(k_1, k) \Rightarrow \boxed{k \perp k_1}$$

$$R'Q' \text{ додирује } k'_3 \Rightarrow \frac{\pi}{2} = \angle(R'Q', k'_3) \stackrel{\text{не нису у}}{\neq} \angle(k, k_3) \Rightarrow \boxed{k \perp k_3}$$

