

1. Конструисати троугао ABC ако су задати следећи елементи: 6) $\beta - \gamma, b, c$;

Анализа: Нека $\triangle ABC$ зад. услове задане. Узмемо $D \in B(A, D, C)$, $AD = AB$.

СТАВ $\Rightarrow \angle DBC = \frac{\angle ABC - \angle ACB}{2} \Rightarrow B \in \Gamma \cap \ell$ из којих се CD види под углом $\angle DBC$.

Конструкција:

- Конач. $AC = b$
- Узмемо $D \in B(A, D, C)$, $AD = c$
- Конач. ℓ - ГМТ из којих се CD види под углом $\frac{\beta - \gamma}{2}$.
- Конач. $k(A, c)$
- $\Gamma \cap \ell = \{B\}$.

Доказ:

- $\Gamma \cap \ell \Rightarrow AC = b$
- $\Gamma \cap \ell \Rightarrow B \in k(A, c) \Rightarrow AB = c$
- $\Gamma \cap \ell \Rightarrow B(A, D, C) \Rightarrow AD = c$

$\Rightarrow AB = AD \Rightarrow \angle ABC < \angle AC$

СТАВ $\Rightarrow \angle DBC = \frac{\angle ABC - \angle ACB}{2}$

$\Gamma \cap \ell \Rightarrow B \in \ell \Rightarrow \angle CBD = \frac{\beta - \gamma}{2} \Rightarrow \angle ABC - \angle ACB = \beta - \gamma$

Дискусија:

- $|\beta - \gamma| < \pi \Rightarrow \frac{\beta - \gamma}{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 1^\circ$ је ℓ - ГМТ
- $b > c$ (напомена: $b > c$ је неопходно за постојање)

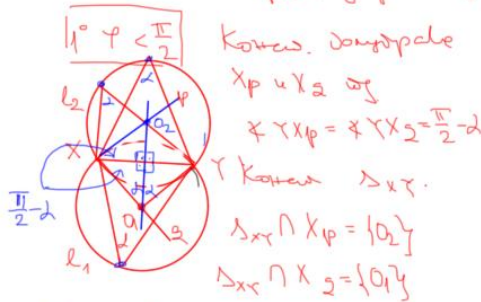
• $k \cap \ell \Rightarrow \emptyset$ када $k \cap \ell$ не да имамо реалне D још $\angle CBD = \frac{\beta - \gamma}{2} \geq \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \exists B \neq D$

$\Rightarrow \exists$ реш. го на конструкцију.

II начин РЗ
једнакости. правоуг. $ABCX$

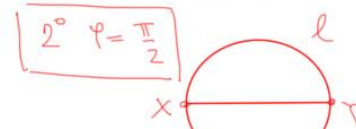
ПОПКОМ: ГМТ ℓ из којих се XY види под углом φ



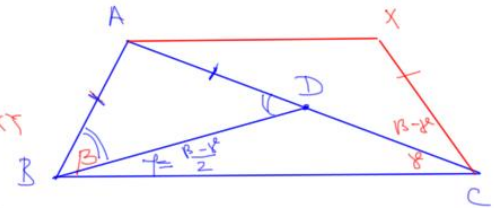
$\ell_1(O_1, OX), \ell_2(O_2, OX) \in \text{кр. линије}$

$\Rightarrow$ ГМТ ℓ је $\ell_1 \cup \ell_2$ који се ℓ_1 и ℓ_2 налазе са чине савршене у односу на XY са $\angle \varphi$ унутра.

сл. $\ell = \ell_1 \cup \ell_2$
 $\ell_1, O_1 = X_1$
 $\ell_2, O_2 = X_2$



ℓ - круг φ савршене XY



СТАВ: Нека је ABC правоугао троугао од. $AC > AB$. Узмемо $D \in B(A, D, C)$ $AD = AB$

$\Rightarrow \angle DBC = \frac{\angle ABC - \angle ACB}{2}$

ДОКАЗ: $B(A, D, C) \Rightarrow \angle DBC = \angle ABC - \angle ABD$

$AB = AD \Rightarrow \angle ABD = \angle ADB = \frac{\pi - \angle BAD}{2}$

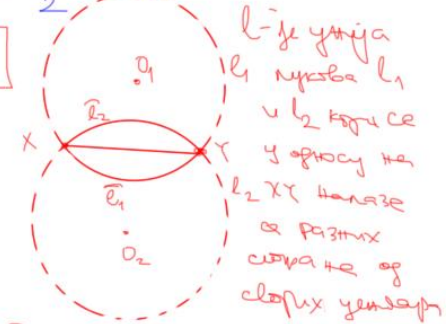
$\Rightarrow \angle DBC = \angle ABC - \frac{\pi - \angle BAD}{2} =$

$= \frac{2\angle ABC - \pi + \angle BAC}{2} =$

$= \frac{\angle ABC - \angle ACB}{2}$

$= \frac{\angle ABC - \angle ACB}{2}$

3° $\varphi > \frac{\pi}{2}$



$\ell_2, O_2 = X_2$
 $\ell_1, O_1 = X_1$, $\ell = \ell_2 \cup \ell_1$

1. Конструисати троугао ABC ако су задати следећи елементи: 7) $\beta - \gamma, l_a, p$;

Дефиниција 22. Нека је $\triangle ABC$ троугао и нека су E, F, G редом пресечне тачке бисектриса унутрашњих углова код темена A, B, C и наспрамних страница BC, CA, AB . Дужи AE, BF, CG зову се *одсечци бисектриса унутрашњих углова* и означавају се редом са l_a, l_b, l_c .

Анализа: Нека је $\triangle ABC$ зад. услове зад. Означимо са E, F редом пресеке бисектриса углова A и B са $BC \Rightarrow AE \perp AF$; $\frac{\angle FAB}{\angle FAE} = \frac{\angle ABC}{\angle ACB}$. S - центар уписаног круга $S \in AE$ - бисек. уг. $\angle A$ $\Rightarrow d(S, BC) = d(S, EF)$. AB, AC су танг. на k - уписан у $\triangle ABC$.

Контрадикција:

• $\angle AEF = \angle A$.

• $\angle AEF = \frac{\pi}{2}$.

• $\angle AEF = \frac{\pi}{2}$ - ГТТ из којих се види да AE је висина из A на BC $\frac{\pi - \beta}{2}$ (ГТТ).

• $\angle AEF = \frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow EF \parallel BC, d(A, EF) = \frac{p}{2}, A, S \in EF$.

• $\angle AEF = \frac{\pi}{2} \Rightarrow S \in EF, B(A, S, E)$.

• $\angle AEF = \frac{\pi}{2} \Rightarrow k(S, S)$.

• $\angle AEF = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t_1, t_2$ тангенте из A на k .

• $t_1 \cap EF = \{B\}, t_2 \cap EF = \{C\}$.

• $B(F, B, E, C)$.

Доказ: • $\angle B(B, E, C) \Rightarrow AE$ је додирница коју додира унутар угла A на $k(S, S)$.

• $\angle B(B, E, C) \Rightarrow AE$ је додирница коју додира унутар угла A на $k(S, S)$.

• $\angle B(B, E, C) \Rightarrow AE$ је додирница коју додира унутар угла A на $k(S, S)$.

• $\angle B(B, E, C) \Rightarrow AE$ је додирница коју додира унутар угла A на $k(S, S)$.

• $\angle B(B, E, C) \Rightarrow AE$ је додирница коју додира унутар угла A на $k(S, S)$.

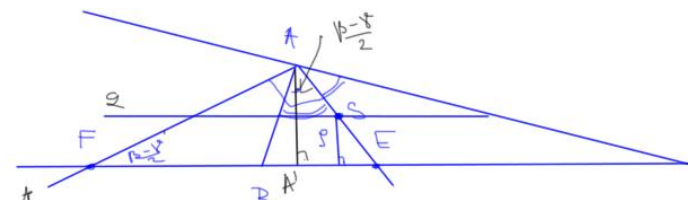
• $\angle B(B, E, C) \Rightarrow AE$ је додирница коју додира унутар угла A на $k(S, S)$.

• $\angle B(B, E, C) \Rightarrow AE$ је додирница коју додира унутар угла A на $k(S, S)$.

• $\angle B(B, E, C) \Rightarrow AE$ је додирница коју додира унутар угла A на $k(S, S)$.

• $\angle B(B, E, C) \Rightarrow AE$ је додирница коју додира унутар угла A на $k(S, S)$.

• $\angle B(B, E, C) \Rightarrow AE$ је додирница коју додира унутар угла A на $k(S, S)$.



Следи: Нека је $\triangle ABC$ произвољан од $AC > AB$. Означимо са E и F редом пресеке бисектриса углова A и B са BC . Тада $\angle AFB = \frac{\angle ABC + \angle ACB}{2}$.

Доказ: AE бисек. уг. $\angle A$, AF бисектриса угла $\angle A \Rightarrow AE \perp AF$.
 $\angle BAE = \angle FAC = \frac{\angle BAC}{2}$. Како је $AB < AC \Rightarrow B(F, B, C) \Rightarrow$
 $\angle FBA = \pi - \angle ABC \Rightarrow \angle AFB = \pi - \angle FBA - \angle BFA$
 $\angle AFB = \frac{\pi}{2} - \angle BAE = \frac{\pi}{2} - \frac{\angle BAC}{2} \Rightarrow \angle AFB = \pi - (\frac{\pi}{2} - \frac{\angle BAC}{2}) - (\pi - \angle ABC) =$
 $= \frac{\pi}{2} - \frac{\angle BAC}{2} + \angle ABC = \frac{\angle ABC + \angle BAC - \angle ACB - \angle BAC}{2} =$
 $= \frac{\angle ABC - \angle ACB}{2}$.

• $\angle AEF = \angle AEB < \frac{\pi}{2}$, што је исто. Углов $\angle E$ за $\triangle AEC \Rightarrow \angle EAC + \angle ECA < \frac{\pi}{2}$.

$\angle EAC + \angle ECA < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \angle BCA < \angle ABC$.

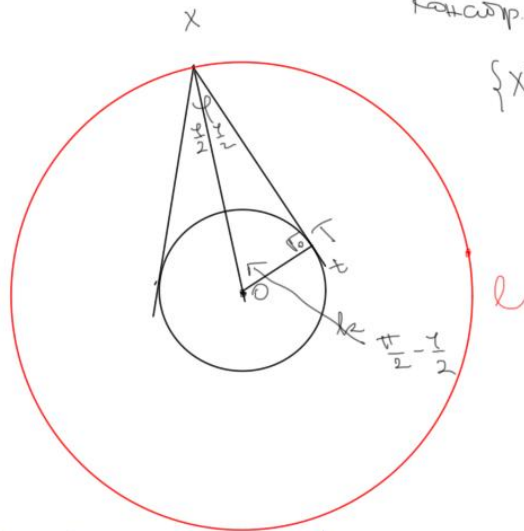
$\angle BCA < \angle ABC$. (напомену: бачеи углов $\angle A$ бачеи $\angle B$ и $\angle C$).

$\angle AFB = \frac{\angle ABC - \angle ACB}{2}$. $\angle AFB = \frac{\pi}{2} - \frac{\angle BAC}{2}$. $\angle AFB = \frac{\pi}{2} - \frac{\angle BAC}{2} \Rightarrow \angle ABC - \angle ACB = \pi - \angle A$.

$\angle AFE = \frac{\pi - \beta}{2}$. $\angle AFE = \frac{\pi - \beta}{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \angle AFE < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \angle AFE < \frac{\pi}{2}$.

$\angle AFE < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \angle AFE < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \angle AFE < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \angle AFE < \frac{\pi}{2}$.

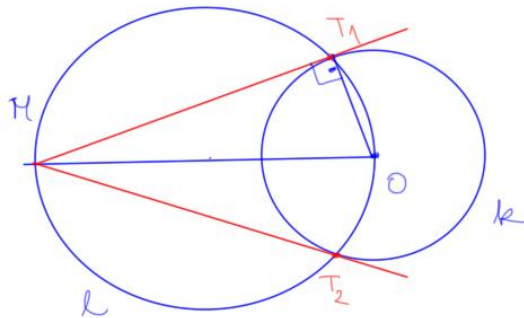
Половина касет: l -гиперкасета из точек се круга $k(O, r)$ высекает угол φ .



Комментар. у произвольной точки T касательной t не k . Касет. $\angle TO_P = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}$. Обратно

$$\{X\} = t \cap O_P \Rightarrow l\text{-гиперкасета } \boxed{L(O, OX)}$$

Половина касет: Касет. касетельная t из точки M на круг $k(O, r)$



Комментар. если MO и круг l не кас. определены MO .

$$k \cap l = \{T_1, T_2\}$$

$$\Rightarrow t_1 = MT_1, t_2 = MT_2$$

1. Конструисати троугао ABC ако су задати следећи елементи: 8) $a, b - c, \rho_a$;

Анализа Нека $\triangle ABC$ зад. једне зад. Нека су $Sa, P, Pa, Pa' \in BZ \Rightarrow BZ \Rightarrow B(A, P, Pa')$; $BZ \Rightarrow PP_a = b - c$.
 $A \in \Gamma_{\Pi}$ из којих се $ka(Sa, Sa')$ биће дос ∇BAC (јер су AB и AC тангенте), тј. BC и S .
 $B(B, P, Pa, C)$.

Конструкција: • Констр. $\triangle PPaPa'$: $PP_a = b - c$
 $\nabla PPaPa' = \frac{\pi}{2}$
 $PaPa' = 2Sa$

• Означимо $Sa = S(PaPa')$

• Констр. $ka(Sa, Sa)$

• Констр. $\ell - \Gamma_{\Pi}$ из којих се крже ka биће дос једног $\angle$ (Π)

□ $\{A\} = Pa' \cap \ell, B(A, P, Pa')$

• Констр. t_1 и t_2 тангенте из A на ka

• $t_1 \cap PP_a = \{B\}, t_2 \cap PP_a = \{C\}$,
 $B(B, P, Pa, C)$.

$\Pi \Rightarrow P \in BC$
 $\Pi \Rightarrow B(A, P, Pa')$

• $BZ \Rightarrow PP_a = AC - AB$ } $\Rightarrow AC - AB = b - c$
 $\Pi \Rightarrow PP_a = b - c$

• $\Pi \Rightarrow A \in \ell \Rightarrow \nabla b_1 A b_2 = d$, $\Pi \Rightarrow B \in t_1, C \in t_2 \Rightarrow \nabla BAC = d$ ■

Доказ: • $\Pi \Rightarrow t_1 \ni B, t_2 \ni C$ иако из A на $ka \Rightarrow$

AB, AC тангенте на $ka(Sa, Sa)$

$\Rightarrow d(Sa, AB) = d(Sa, AC)$ тј. ASa дукеторна линија ∇BAC

$\Pi \Rightarrow Sa = S(PaPa')$ } $\Rightarrow SaPa = \frac{1}{2} PaPa' = \frac{1}{2} \cdot 2Sa = Sa$
 $\Pi \Rightarrow PaPa' = 2Sa$ } $\Rightarrow BC$ иако
 $\Pi \Rightarrow \nabla PPaPa' = \frac{\pi}{2}$ тј. $PP_a \perp PaPa'$ } $\Rightarrow ka(Sa, Sa)$

$\Pi \Rightarrow P \in BC$

$\Pi \Rightarrow B(A, P, Pa')$

$\Rightarrow ASa \perp BC \Rightarrow ka$ садржи једнаку крж Γ_{Π} одређена A .

$\Rightarrow [Sa]$ - конструисане садржа једнаку крж Γ_{Π} одређена A

$\Rightarrow Pa$ иако једнаку садрж. — $\perp \ell \Rightarrow ka \Rightarrow Pa \in BZ$

$\Pi \Rightarrow Sa = S(PaPa') \Rightarrow Pa'$ је једнаку супротна тачка $Pa \Rightarrow Pa' \in BZ$

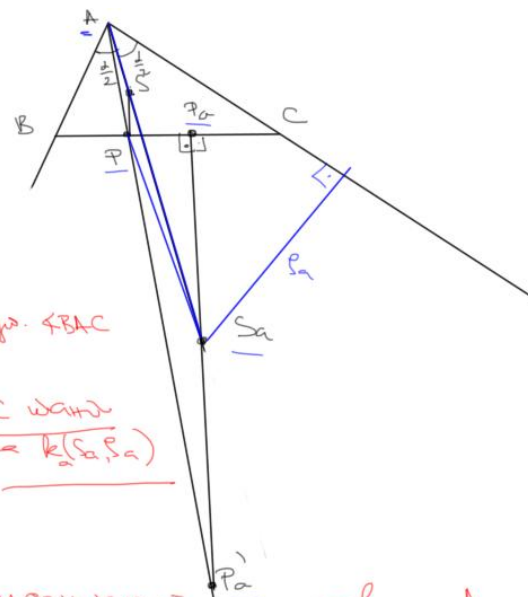
$\Pi \Rightarrow B(A, P, Pa')$ } $\Rightarrow \{P\} = BC \cap Pa'$; $BZ \Rightarrow BC \cap Pa'$ је иако једнаку једнаку крж са $BC \Rightarrow P \in BZ$

Дискусија: • $\angle < \Pi$

• $B(A, P, Pa') \Rightarrow Sa < Sa'$

$SaP = \sqrt{Pa^2 + 2Pa'^2} = \sqrt{(b-c)^2 + b^2}$

$\frac{Sa}{Asa} = \sin \frac{\angle}{2} \Rightarrow Sat = \frac{Sa}{\sin \frac{\angle}{2}}$
 $\Rightarrow \sqrt{(b-c)^2 + b^2} < \frac{b}{\sin \frac{\angle}{2}}$
 $\Rightarrow \nabla$ јер $\Rightarrow$ го на ∇ јер $\Rightarrow$



1. Конструисати троугао ABC ако су задати следећи елементи: 9) a, ρ_b, ρ_c ;

II неконструктивних $S_c \rho_c \rho_b S_c, \rho_c \rho_b = a, B_3 \Rightarrow S(S_c)$

Анализа: Нека $\triangle ABC$ зад. услове зад. Нека су $M, M' \in B_3$. Означимо $A_1 = S(BC), B_3 \Rightarrow A_1 M = \frac{1}{2}(\rho_b + \rho_c)$
 $B_3 \Rightarrow MM' = \frac{1}{2}(\rho_b - \rho_c) \Rightarrow d(M, AB) = MM' = \frac{1}{2}(\rho_b - \rho_c)$ тј. AB тангентна на $k_M(M, MM')$. $B_3 \Rightarrow M, C \in AB$.

Конструкција: Конструисати $BC = a$. Доказ: $\bullet \rho_c \Rightarrow BC = a$

- Означимо $A_1 = S(BC)$
- Конструисати $n: n \ni A_1, n \perp BC$
- $M: A_1 M = \frac{1}{2}(\rho_b + \rho_c), M \in n$
- $k \ni B, C, M$
- $k_M(M, \frac{1}{2}(\rho_b - \rho_c))$
- Конструисати t -дангелу из B на k_M тј. $M, C \in t$ тј. $(k_M, C \in t)$
- $\{t\} = t \cap k, A_1 M \perp BC$.

- $\rho_c \Rightarrow M \in k \Rightarrow M \in k$ -одлика око $\triangle ABC$
 - $\rho_c \Rightarrow k \ni A, B, C$
 - $\rho_c \Rightarrow M \in n$
 - $\rho_c \Rightarrow n \ni A_1, A_1 = S(BC), n \perp BC$
- $\Rightarrow \{M\} = k \cap n_{BC} \Rightarrow M \in B_3$

Означимо се $\overline{\rho_b}$ и $\overline{\rho_c}$ супротне стране уписаних кругова који одређују постојање B и C одређено.

$$B_3 \Rightarrow A_1 M = \frac{1}{2}(\overline{\rho_b} + \overline{\rho_c}) \Rightarrow \overline{\rho_b} + \overline{\rho_c} = \overline{\rho_b} + \overline{\rho_c} \quad (1)$$

$$\rho_c \Rightarrow A_1 M = \frac{1}{2}(\rho_b + \rho_c)$$

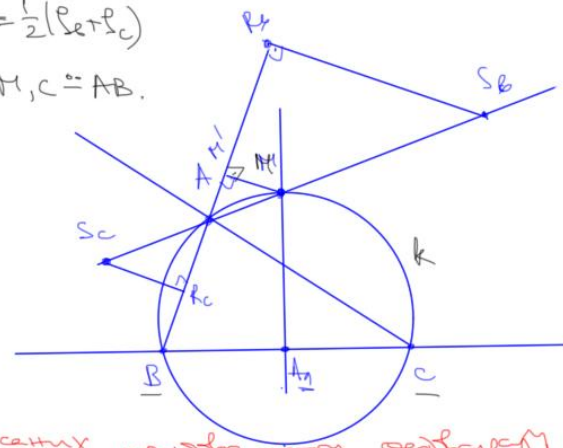
$$B_3 \Rightarrow d(M, AB) = \frac{1}{2}(\overline{\rho_b} - \overline{\rho_c})$$

$$\rho_c \Rightarrow A \in t \text{ - уз помоћ } B \text{ на } k_M(M, \frac{1}{2}(\rho_b - \rho_c)) \Rightarrow AB \text{ тангентна на } k_M \Rightarrow d(M, AB) = \frac{1}{2}(\rho_b - \rho_c)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow \overline{\rho_b} = \overline{\rho_b}$$

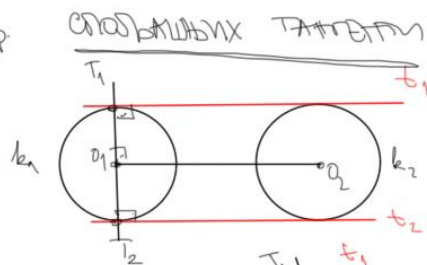
$$(1) - (2) \Rightarrow \overline{\rho_c} = \rho_c$$

ПРИМЕЧАЊЕ: (БЗ $\rho_b > \rho_c$ Аналогно $\rho_c < \rho_b$) $(\exists! t$ тј. $M, C \in t) \Rightarrow$ уvek $\exists!$ реш. го $\Rightarrow$ догугар.



Пом. кат. Концы

• $r_1 = r_2$



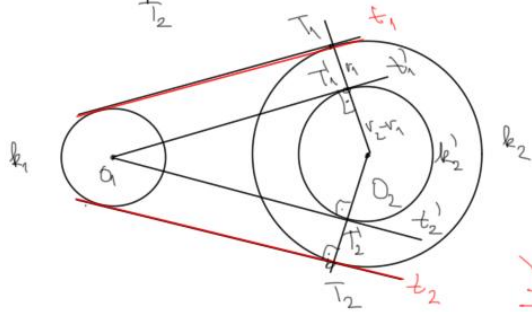
красов $k_1(O_1, r_1)$ и $k_2(O_2, r_2)$.

Концы O_1O_2 и $n: n \ni O_1, n \perp O_1O_2; n \cap k_1 = \{T_1, T_2\}$

$\Rightarrow t_1: t_1 \ni T_1, t_1 \parallel O_1O_2$

$t_2: t_2 \ni T_2, t_2 \parallel O_1O_2$

• $r_1 < r_2$



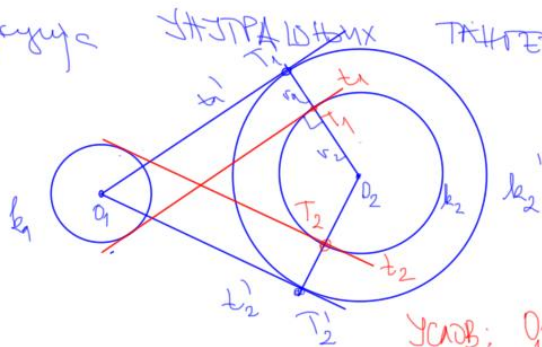
Концы $k_2'(O_2, r_2 - r_1)$; Концы t_1' и t_2' касательные из O_1 к k_2' касательные касаются окружности в T_1' и T_2' соответственно.

$\{T_1'\} = O_2T_1' \cap k_2, \{T_2'\} = O_2T_2' \cap k_2 \Rightarrow t_1: t_1 \ni T_1, t_1 \parallel t_1', t_2: t_2 \ni T_2, t_2 \parallel t_2'$

Услов: $O_1O_2 \geq r_2 - r_1$

Пом. кат. Концы

• $r_1 < r_2$



красов $k_1(O_1, r_1)$, $k_2(O_2, r_2)$

Концы $k_2'(O_2, r_2 + r_1)$; Концы t_1' и t_2' касательные из O_1 к k_2' и окружности касаются в T_1' и T_2' соответственно.

$\{T_1'\} = k_2 \cap O_2T_1', \{T_2'\} = k_2 \cap O_2T_2' \Rightarrow t_1: t_1 \ni T_1, t_1 \parallel t_1', t_2: t_2 \ni T_2, t_2 \parallel t_2'$

Услов: $O_1O_2 \geq r_1 + r_2$