

КОНСТРУКТИВНИ ЗАДАЦИ

ЗАДАТАК: Конструисати фигуру Φ која испуњава дате услове P_1 .

СТРУКТУРА РЕШЕЊА:

АНАЛИЗА: Користећи се тиме да Φ задовољава услове P_1 , налазимо нове услове које дати објект Φ задовољава, услове P_2 , на основу којих $(P_1 \Rightarrow P_2)$ основним и елементарним конструкцијама је могуће изградити континуирану фигуру Φ .

КОНСТРУКЦИЈА: Послудак конструкције на основу услова P_2
(НЕ ОБАВЉАВАМО ЗБОГ ЧЕГА ШТА ЗНАТИ, ВЕЋ СМО ИСПИСУЈЕМО КОРАКЕ КОНСТРУКЦИЈЕ)

ДОКАЗ: Користећи краће конструкције доказујемо да за $(P_2 \Rightarrow P_1)$ конструисани објект важе услови P_1 .

ДИСКУСИЈА: Увидевши посматрано решење, можемо имати различитих решења и услове под којима има решења у форми услова P_1 .

ОСНОВНЕ КОНСТРУКЦИЈЕ:

Лењир: Лењиром можемо конструисати праву која садржи две дате разне тачке, затим полуправу која садржи две дате разне тачке тако да једна од њих буде њено теме као и дуж чија су темена две дате разне тачке.

Шестар: Шестаром можемо конструисати круг чији је центар дата тачка и полупречник дата дуж, као и било који лук тог круга.

ЕЛЕМЕНТАРНЕ КОНСТРУКЦИЈЕ:

- конструкција дужи подударне датој дужи;
- конструкција угла подударног датом углу;
- конструкција медијатрисе дужи;
- проналажење средишта дужи;
- конструкција бисектрисе угла;
- конструкција правоуглог угла и нормале из тачке на правој;
- конструкција паралелних правих (полуправих, дужи);
- (пк) * конструкција тангенте датог круга из дате тачке;
- (пк) * конструкција геометријског места тачака (ГМТ) из којих се дата дуж види под датим углом;
 - подела дате дужи на n подударних дужи, где је $n \in \mathbb{N}$ произвољан природан број;
 - конструкција троугла коме су:
 - (ссс) • стране подударне датим дужима;
 - (суг) • две стране и њима захваћени угао подударни датим дужима и датом углом;
 - (усу) • једна страна и на њој налегли углови подударни датој дужи и датим угловима;
 - (ссу) • две стране и угао наспрам једне од њих подударни датим дужима и датом углом, при чему је познато да ли је угао наспрам друге стране оштар, прав или туп;
 - (усу) • једна страна, угао наспрам ње и један од углова налеглих на њој подударни датој дужи и датим угловима.

$\leftarrow P_1$: detm. symm y $\triangle ABC$ symme t_a, t_b, t_c

$\Rightarrow A_n, B_n, C_n$ cy wera gyman $\triangle ABC \Rightarrow A_n = t_a, B_n = t_b, C_n = t_c$. Ozhernuo $D: B(T, A_n, D), T_n = A_n D$

10. $A_1 = S(TD)$. Kaks je $A_1 = S(BC)$, $A_1 = S(TD) \Rightarrow \exists BDCD$ Dapamenotoren $\Rightarrow BT=CD, CT=BD$.

$$\Rightarrow \underline{CD = BT = \frac{2}{3} BB_1}; \quad \underline{CT = \frac{2}{3} CC_1}; \quad A_1 = S(TD) \Rightarrow TD = 2 \cdot TA_1 = 2 \cdot \frac{1}{3} AA_1 = \frac{2}{3} AA_1$$

Конструкция: $\square$ Конструкция ΔTDC : $TD = \frac{2}{3} t_a$
 $CD = \frac{2}{3} t_b$
 $CT = \frac{2}{3} t_c$

• ~~Означено~~ ^{Конструировано} $A_1 = S(TD)$.

• 3.4.4. Beweis: $B: \mathcal{B}(B, A_1, C), \mathcal{B}_{A_1} = A_1 C$ (q. $A_1 = S(BC)$)₊

• Definieren $C_1: B(c_T, c_1)$, $\tau_1 = \frac{1}{3} t_c$

• Означено $A : B(B, C_1, A), BC_1 = C_1A$.

Дискрипшн: На основу регистрације пројекта ⇒

$$\frac{2}{3}t_a + \frac{2}{3}t_e > \frac{2}{3}t_c$$

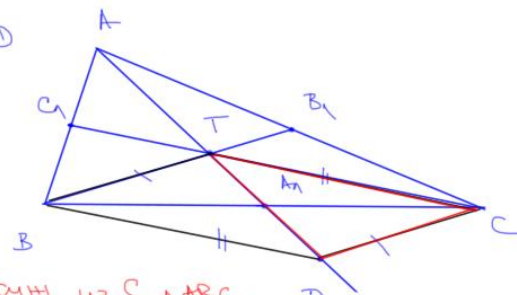
$$\frac{2}{3}t_a + \frac{2}{3}t_c > \frac{2}{3}t_b$$

$$\frac{2}{3}t_b + \frac{2}{3}t_c > \frac{2}{3}t_a$$

$$\begin{array}{l} t_a + t_b > t_c \\ t_a + t_c > t_b \quad (*) \\ t_b + t_c > t_a \end{array}$$

$\exists$ решение g_0 на заданном AKK_0 $h_{AKK_0}(x)$.

Утваре, у свом освајању, нека речења.



Proof 3:

- $\pi_K \Rightarrow C_1 = S(AB) \Rightarrow C_1$ совм. с u_1 из $C \triangle ABC$

$$\xrightarrow{nc} B(C, T, C_1) \Rightarrow \underline{C_{C_1}} = CT + TC_1 \stackrel{nc}{=} \frac{2}{3}t_c + \frac{1}{3}t_c = t_c$$

* $\Rightarrow CT, TC = \frac{2}{3} t_c : \frac{1}{3} t_c = 2:1 \Rightarrow T$ bestimmt $\triangle ABC$
ca. 8. versch. güt. u. z. c

• $\frac{DC}{AB} \Rightarrow A_n = S(BC) \Rightarrow AA_n \perp BC$. Syst. uz $\Delta \Rightarrow TA_n = \frac{1}{3}AA_n$

$$\frac{\pi K}{2} A_1 = S(TD) \Rightarrow \underline{T_{A1} = \frac{1}{2}TD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} t_a = \underline{\frac{1}{3} t_a}$$

$\Rightarrow A_n = \tan \alpha_i$
WENN $\sin \alpha$ UND $\cos \alpha$
BE $\tan$

• $\xrightarrow{TK} A_1 = S(TD), A_2 = S(BC) \Rightarrow \square$ BDCT Japan Open $\Rightarrow$ $\overline{BT = CD} = \frac{TK}{3} + \frac{2}{3} \overline{BC}$

$\Rightarrow B_{B_1} = t_6$ в) веш. сг 43 B ΔABC сг 44 тв

1. Конструисати троугао ABC ако су задати следећи елементи: 2) β, γ, p ;

АНАЛИЗА: Нека $\triangle ABC$ задовољава услове задатих. Нека су $E \in D$ и D ванке qf .

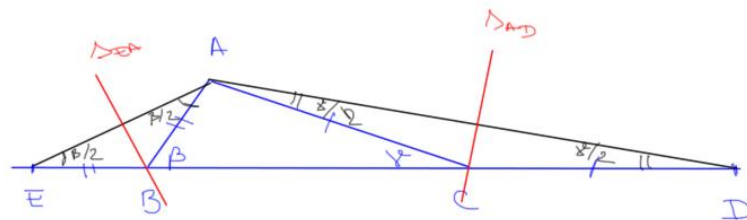
$$B(E, B, C, D) \text{ и } EB = AB, CD = AC \Rightarrow \underline{ED = EB + BC + CD = AB + BC + AC}.$$

$$EB = AB \Rightarrow \triangle EBA \text{ једнакокрак} \Rightarrow \angle BEA = \angle BAE$$

Збир два унутрашња угла је једнак спољашњем углу код трећег угла

$$\text{одатле } \angle \Rightarrow \underbrace{\angle AEB + \angle BAE}_{2\angle AEB} = \angle ABC \Rightarrow \angle AEB = \frac{1}{2} \angle ABC. \text{ Аналогно, } \triangle ACD \text{ једнакокрак} \Rightarrow \angle CDA = \angle CAD = \frac{1}{2} \angle ACB.$$

$\triangle EBA$ једнакокрак $\Rightarrow B \in \Delta_{AE}$; Аналогно, $C \in \Delta_{AD}$.



Конструкција: • Конструисамо $\triangle AED$: $ED = 2p$
 $\angle AED = \frac{\beta}{2}$
 $\angle ADE = \frac{\gamma}{2}$

• Конструисамо Δ_{AE} , Δ_{AD}

• Одатле, $\Delta_{AE} \cap ED = \{B\}$, $\Delta_{AD} \cap ED = \{C\}$,
 од $B(E, B, C, D)$.

Доказ: • $\overset{пк}{\Rightarrow} B \in \Delta_{AE} \Rightarrow \boxed{EB = BA}$ и $\triangle EBA$ једнакокрак $\Rightarrow \angle AEB = \angle EAB$

$$\overset{пк}{\Rightarrow} B(E, B, C, D), \angle AED = \frac{\beta}{2} \rightarrow \text{пк } \angle AEB$$

$$\angle ABC \text{ спољашњи угао код } B \triangle AEB \Rightarrow \angle ABC = \angle AEB + \angle EAB = 2 \cdot \frac{\beta}{2} = \beta$$

• Аналогно, $C \in \Delta_{AD} \Rightarrow \triangle ACD$ једнакокрак $\Rightarrow \angle CAD = \angle CDA = \angle EDA = \frac{\gamma}{2}$
 и $\boxed{AC = CD}$

$$\overset{пк}{\Rightarrow} B(E, B, C, D) \Rightarrow \angle ACB \text{ спољашњи угао код } C \triangle ACD \Rightarrow \angle ACB = \angle CAD + \angle ADC = 2 \cdot \frac{\gamma}{2} = \gamma$$

Провера: • $\boxed{\beta + \gamma < \pi} \Rightarrow \exists!$ реш. по теор. о троугау.

• $\triangle AED$ од $\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\beta}{2} < \frac{\pi}{2}, \frac{\gamma}{2} < \frac{\pi}{2}$ и те се угао
 срећу $\checkmark$

$$\overset{пк}{\Rightarrow} B(E, B, C, D) \Rightarrow \underline{ED = EB + BC + CD} = \overset{поп. 3}{AB + BC + AC}$$

$$\overset{пк}{\Rightarrow} \underline{ED = 2p}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{AB + BC + AC}{2} = p}$$

ΔAEC: $\angle AED = \frac{\beta}{2} < \frac{\pi}{2}$ } $\Rightarrow \angle AEC > \frac{\pi}{2} \Rightarrow \Delta_{AD}$ неће бити саграђен $\triangle AEC$ и. кон. ED $\Rightarrow B(E, B, C, D)$
 $\angle ADE = \frac{\gamma}{2} < \frac{\pi}{2}$
 Аналогно се неће $B(E, B, C, D)$ $\checkmark$

1. Конструисати троугао ABC ако су задати следећи елементи: **3)** $\alpha, a, b+c$;

Анализа: Нека $\triangle ABC$ задовољава услове задатка. Означимо са $D: B(B, AD), AD=AC \Rightarrow \triangle ACD$ једнакокрак

$\Rightarrow \angle ADC = \angle ACD$. $B(B, AD) \Rightarrow \angle BAC$ савр. угао $\angle A$ $\triangle ADC \Rightarrow \angle BAC = \angle ADC + \angle ACD = 2 \angle ADC$

$\Rightarrow \angle ADC = \frac{\angle BAC}{2}$. $B(B, AD) \Rightarrow \underline{BD = BA + AD = AB + AC}$. $\triangle ADC$ једнакокрак $\Rightarrow A \in \Delta_{DC}$.

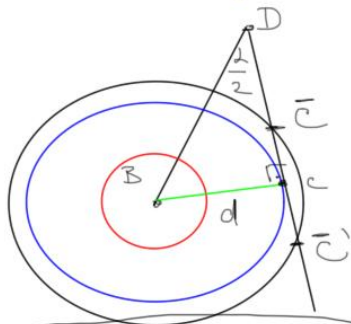
Конструкција: $\square$ Констр. $\triangle BCD$: $BD = b+c$
 $BC = a$
 $\angle BDC = \frac{\alpha}{2}$

• Констр. Δ_{DC}
 $\square$ Означимо $\Delta_{DC} \cap BD = \{A\}$.

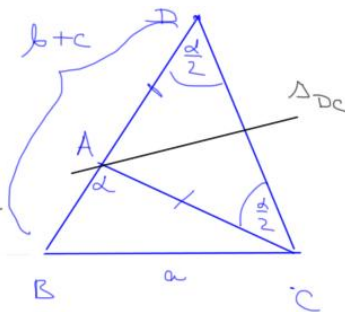
Провера: $\square b+c > a$

$\square \alpha < \pi$

• $\frac{d}{BD} = \sin \frac{\alpha}{2} \Rightarrow d = BD \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$
 $BD = b+c \Rightarrow \boxed{d = (b+c) \sin \frac{\alpha}{2}}$



• $d > a \Rightarrow \nexists$ реш.
 $d = a \Rightarrow \exists 1$ реш. го има једнакокрак
 $d < a \Rightarrow \exists 2$ реш. го има различитих.



Доказ: $\square \text{НК} \Rightarrow BC = a$

• $\square \text{НК} \Rightarrow A \in \Delta_{DC} \Rightarrow \boxed{AD = AC}$ тј. $\triangle ADC$ једнакокрак $\Rightarrow \angle ADC = \angle ACD$

$\text{НК} \Rightarrow \Delta_{DC}$ савр. бр. ΔBDC , $BD \stackrel{\text{НК}}{=} b+c$, $BC \stackrel{\text{НК}}{=} a$
 $b+c > a \Rightarrow \Delta_{DC}$ савр. гл. BD тј. $B(B, AD)$.

$B(B, AD) \Rightarrow \angle BAC$ савр. $\angle A$ $\triangle ADC \Rightarrow \angle BAC = \angle ADC + \angle ACD = 2 \cdot \angle ADC$
 $\boxed{\angle BAC = 2 \cdot \angle BDC} \stackrel{\text{НК}}{=} \angle \cdot \frac{1}{2} = \boxed{\alpha}$
 $B(B, AD)$

• $B(B, AD) \Rightarrow \underline{BD = BA + AD = AB + AC}$
 $\text{НК} \Rightarrow \underline{BD = b+c} \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} BD = BA + AD \\ BD = b+c \end{matrix}} \right\} \Rightarrow \boxed{AB + AC = b+c}$

$$1^\circ \beta, h_c, b+c$$
$$1^\circ \beta, h_c, b+c$$

АНАЛИЗ: Here $\triangle ABC$ isosceles, yes we say. Here is $D: B(B, AD), AD = AC \Rightarrow \underline{BD = BA + AD = AB + AC}$

$\Rightarrow \Delta ADC$ je jeftakotkatu $\Rightarrow A \in \text{Soc}; d(C, AB) = d(C, BD)$.

Конструкция #: • Конструкция $BD = b + c$

✓ — 1 — $\Delta DB_p = \beta$

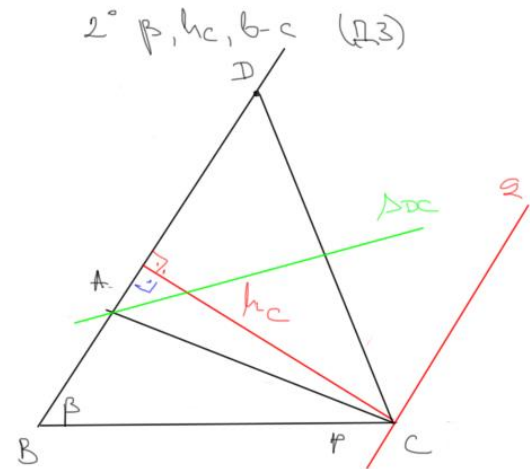
✓ — 1 — 2: $2 \perp \text{BD}$, $d(2, \text{BD}) = h_c$, $2, p := \text{BD}$

• Означим $B \cap G = \{c\}$

✓ Kottew. Δ_{DC}

□ Означено $\Delta_{DC} \cap BD = \{A\}, B(B, A, D).$

Доказ:

$$\left. \begin{array}{l} \xrightarrow{NK} B(B, A, D) \\ \xrightarrow{NK} \neg D_{B \vee p} = B \\ \xrightarrow{NK} B \vee p \Rightarrow C \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\neg A \vee B \vee C = B}$$
$$\left. \begin{array}{l} \pi_C \Rightarrow C \in \mathcal{C} \\ \pi_C, d(\mathcal{C}, \mathcal{B}) = h_C \\ \pi_C \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{d(C, AB) = h_C}$$
$$\prod_k \Rightarrow A \in \mathcal{B}(\mathcal{D})$$
$$\begin{aligned} \stackrel{NK}{\Rightarrow} B(R, A, D) &\Rightarrow BD = BA + AD \\ \stackrel{NK}{\Rightarrow} A \in L_{AC} &\Rightarrow AD = AC \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \stackrel{NK}{\Rightarrow} B(R, A, D) &\Rightarrow BD = BA + AD \\ \stackrel{NK}{\Rightarrow} A \in L_{AC} &\Rightarrow AD = AC \end{aligned}} \right\} \Rightarrow BD = AB + AC$$
$$\stackrel{n_K}{\Rightarrow} A \in \Lambda_{DC} \Rightarrow AD = AC$$
$$\xRightarrow{nc} BD = b + c$$
$$\Rightarrow AB + AC = b + c$$


ДИСКУССИЯ: $\beta < \pi$

- $B(B, A, D)$ т.е. $A \rightarrow C$ верно BD , а не BC
 тогда выведем $BD > BC$
 "
 $b+c$

$$\frac{hc}{BC} = \sin \beta \Rightarrow BC = \frac{hc}{\sin \beta}$$

$$\Rightarrow |h_c| < (b+c) \cdot \sin \beta$$

$\Rightarrow \exists!$ Res so Ha isoglyphic cul .

1. Конструисати троугао ABC ако су задати следећи елементи: 5) $t_a, h_b, b \pm c$;

1° $t_a, h_b, b+c$ (D3)

2° $t_a, h_b, b-c$

2° $t_a, h_b, b-c$

АНАЛИЗА: Нека $\triangle ABC$ заш. услове задатих. Означимо са $A_1 = S(BC), D : B(A, A_1 D), A A_1 = A_1 D$.

$\Rightarrow A_1 = S(BC), A_1 = S(AD) \Rightarrow \square BDCA$ је паралелограм $\Rightarrow BD \parallel AC, AB = CD$
 $BD \parallel AC \Rightarrow d(B, AC) = d(D, AC)$; Означимо $E : B(A, E, C), EC = AB$
 $\uparrow$
 висина из B

$\Rightarrow C \in \Delta ED. B(A, E, C) \Rightarrow AE = AC - CE = AC - AB$

КОНСТРУКЦИЈА: $\square$ Констр. $\triangle ADM$: $AD = 2t_a$
 $DM = h_b$
 $\angle DMA = \frac{\pi}{2}$

$\square$ Означимо $E : B(A, E, M), AE = b - c$

• $\angle CAD$ $\angle ED$

• $\angle ED \cap AM = \{C\}$

• Означимо $A_1 = S(AD)$

• Означимо $B : B(B, A_1, C), BA_1 = A_1 C$

ДОКАЗА: $\square b > c$

$\square 2t_a > h_b$

• $B(A, E, M) \Rightarrow AE < AM = \sqrt{(2t_a)^2 - h_b^2} = \sqrt{4t_a^2 - h_b^2}$

$\Rightarrow \boxed{b-c < \sqrt{4t_a^2 - h_b^2}} \Rightarrow \exists! \text{ реш. го на доглагољеном.}$

ДОКАЗ: • $\stackrel{HK}{\Rightarrow} A_1 = S(AD) \Rightarrow AA_1 = \frac{1}{2} AD \stackrel{HK}{=} \frac{1}{2} \cdot 2t_a = t_a$

$\stackrel{HK}{\Rightarrow} A_1 = S(BC) \Rightarrow AA_1$ вис. нитица из A $\triangle ABC$

$\Rightarrow$ вис. нитица из A $\triangle ABC$
 једнака дужици t_a

• $\stackrel{HK}{\Rightarrow} A_1 = S(BC)$
 $\stackrel{HK}{\Rightarrow} A_1 = S(AD)$ } $\Rightarrow \square BDCA$ паралелограм $\Rightarrow \boxed{AB = CD}, BD \parallel AC$

$BD \parallel AC \Rightarrow d(B, AC) = d(D, AC)$
 $\uparrow$
 висина из B у $\triangle ABC$

$\stackrel{HK}{\Rightarrow} DM = h_b$

$\stackrel{HK}{\Rightarrow} \angle DMA = \frac{\pi}{2}$

} $\Rightarrow d(D, AM) = h_b, \stackrel{HK}{\Rightarrow} C \in AM \Rightarrow d(D, AC) = h_b$

$\Rightarrow$ висина из B $\triangle ABC$
 једнака дужици h_b

• $\stackrel{HK}{\Rightarrow} \triangle AMD$ је усправни $\Rightarrow AD > AM$
 $\stackrel{HK}{\Rightarrow} B(A, E, M) \Rightarrow AE < AM$

} $\Rightarrow AD > AE \Rightarrow \angle ED$ садржи AD не садржи AE
 $\Rightarrow B(A, E, C)$

$\stackrel{HK}{\Rightarrow} AE = b - c \Rightarrow \boxed{AC - AB = b - c}$

