

10. Важи $\mathcal{H}(P, Q; R, S)$ ако и само ако постоје четири тачке A, B, C, D такве да важи $\underline{AB} \cap \underline{CD} = \{P\}$, $\underline{BC} \cap \underline{AD} = \{Q\}$, $\underline{PQ} \cap \underline{AC} = \{R\}$, $\underline{PQ} \cap \underline{BD} = \{S\}$.

$\Leftarrow$ $\exists A, B, C, D$

$$\begin{aligned} AB \cap CD &= \{P\} \\ BC \cap AD &= \{Q\} \\ PQ \cap AC &= \{R\} \\ PQ \cap BD &= \{S\} \end{aligned}$$

ΔAPQ : $P \in PQ, D \in AQ, B \in AP$
 $\times AR \cap QB \cap DP = \{C\} \xrightarrow{CT}$

$$\left(\frac{AP}{BP} \cdot \frac{PQ}{RQ} \cdot \frac{QD}{DA} \right) = 1 \quad (1)$$

$D \in AQ, B \in AP, S \in PQ$
 DB, S конциклическе $\xrightarrow{MT}$

$$\left(\frac{AP}{BP} \cdot \frac{PS}{SQ} \cdot \frac{QD}{DA} \right) = -1 \quad (2)$$

$(1), (2) \Rightarrow \frac{PR}{RQ} = - \frac{PS}{SQ} \Leftrightarrow \mathcal{H}(P, Q; R, S)$

$\Rightarrow$ $\mathcal{H}(P, Q; R, S) \Leftrightarrow B(P, R, Q) \vee B(P, S, Q)$ ЕЈО $B(P, R, Q)$.

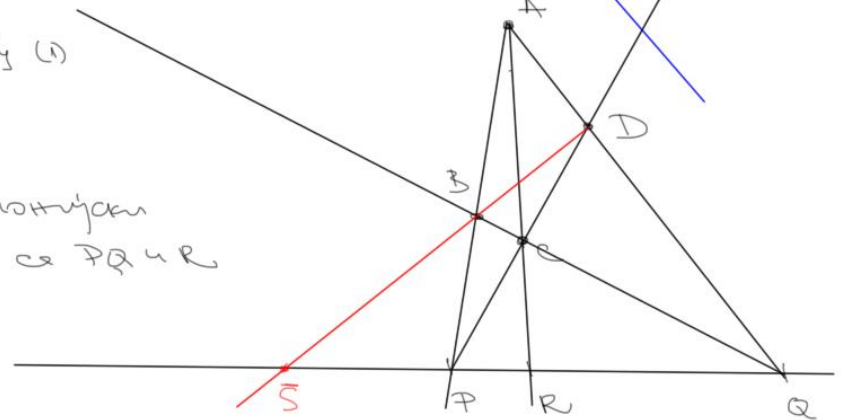
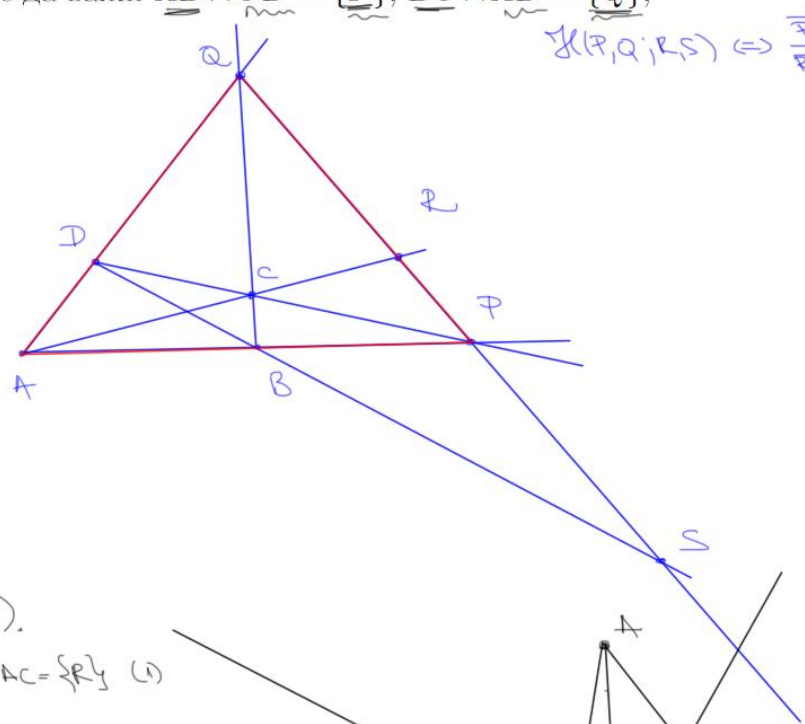
Нека је $p: p \ni R, p \not\ni PQ$; Ондамо $A, C \in p, A, C \neq R \Rightarrow PQ \cap AC = \{R\}$ (1)

Ондамо $ca \{B\} = AP \cap CQ, \{D\} = CP \cap AQ$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{AB \cap CD = \{P\}}{BC \cap AD = \{Q\}} \checkmark \\ \frac{AC \cap PQ = \{R\}}{BD \cap PQ = \{S\}} \checkmark \end{aligned}$$

$\Leftarrow$ $\mathcal{H}(P, Q; R, \bar{S})$ } $\exists$ неколико карактеристика
 нм. $\mathcal{H}(P, Q; R, S)$ } карактеристика иако се $PQ \cap R$

$\Rightarrow \bar{S} = S \Rightarrow \underline{BD} \cap \underline{PQ} = \{S\}$



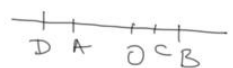
$\mathcal{H}(P, Q; R, S) \Leftrightarrow \frac{PR}{RQ} = - \frac{PS}{SQ}$

11. Ако су A, B, C, D разне колинеарне тачке, а O средиште дужи AB , тада важи $\mathcal{H}(A, B; C, D) \Leftrightarrow AO^2 = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD}$.

* За да важи $\mathcal{H}(A, B; C, D) \Rightarrow$ важи један од раздвајања: 1° $B(A, O, C, B, D)$ 2° $B(A, O, D, B, C)$ 3° $B(D, A, C, O, B)$ 4° $B(C, A, D, O, B)$

* $OA^2 = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD}$ неће важити у неким случајевима раздвајања који нису 1°-4°.

нпр. $B(D, A, O, C, B)$



$$\begin{aligned} \mathcal{H}(A, B; C, D) &\Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = -\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}} \Rightarrow \frac{AC}{CB} = \frac{AD}{DB} \Leftrightarrow AC \cdot DB = AD \cdot CB \\ &\rightarrow OA^2 > 0 \quad \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD} < 0 \quad \nrightarrow OA^2 = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} AC > AO = OB > CB \\ DB > AD \end{array} \right\} \Rightarrow AC \cdot DB > CB \cdot AD$$

Закључак: $\mathcal{H}(A, B; C, D) \Leftrightarrow B(A, O, C, B, D)$. Аналогно се доказује за остале.

$B(A, O, \overrightarrow{C}, \overrightarrow{B}, D)$

$$\mathcal{H}(A, B; C, D) \Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}} \Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}} \Leftrightarrow \frac{AC}{CB} = \frac{AD}{BD} \Leftrightarrow AC \cdot BD = AD \cdot CB \Leftrightarrow (OA + OC)(OD - OB) = (OA + OD)(OB - OC) \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{l} O = S(AB) \\ OB = OA \end{array}$$

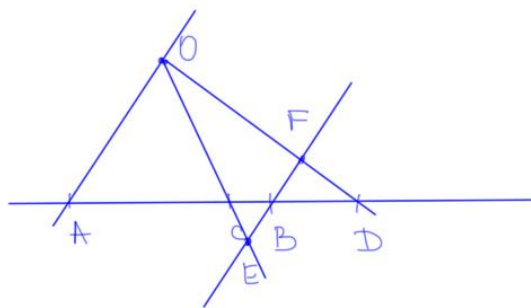
$$\Leftrightarrow (OA + OC)(OD - OA) = (OA + OD)(OA - OC) \Leftrightarrow OA \cdot OD + OC \cdot OD - OA^2 - OC \cdot OA = OA^2 - OA \cdot OC + OD \cdot OA - OD \cdot OC$$

$$\Leftrightarrow \cancel{OA^2} - \cancel{OA \cdot OC} + OD \cdot OC = \cancel{OA^2} - \cancel{OA \cdot OC} + OD \cdot OA - OD \cdot OC \Leftrightarrow OA^2 = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD}$$

$B(A, O, C, B, D)$

12. Ако су A, B, C, D разне тачке праве p , O тачка ван те праве, E и F тачке у којима права која садржи тачку B и паралелна је OA сече OC и OD , доказати да важи $\mathcal{H}(A, B; C, D) \Leftrightarrow B$ је средиште EF .

↓ оцртање



$$\mathcal{B}(A, C, B) \vee \mathcal{B}(A, D, B)$$

БЈО $\mathcal{B}(A, C, B, D)$ (Аналогија за оцавање)

$$OA \parallel BE \stackrel{PTT}{\Rightarrow} AC : CB = OA : BE \quad \text{и} \quad \frac{AC}{CB} = \frac{OA}{BE} \quad (1)$$

$$OA \parallel BF \stackrel{PTT}{\Rightarrow} \frac{AD}{BD} = \frac{AO}{BF} \quad (2)$$

$$\mathcal{B}(C, B, D) \Rightarrow \mathcal{B}(\overrightarrow{E}, B, \overrightarrow{F})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(A, B; C, D) &\stackrel{\text{geb}}{\Leftrightarrow} \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = -\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}} \Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}} \Leftrightarrow \frac{AC}{CB} = \frac{AD}{BD} \Leftrightarrow \frac{OA}{BE} \cdot \frac{AC}{CB} = \frac{AD}{BD} \stackrel{(2)}{=} \frac{AO}{BF} \Leftrightarrow \frac{AO}{BE} = \frac{AO}{BF} \Leftrightarrow BE = BF \Leftrightarrow \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{BF} \\ &\Leftrightarrow \underline{B = S(EF)} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

13. (Аполонијев круг) Одредити скуп свих тачака у равни којима су растојања од двеју датих тачака сразмерна датим неподударним дужима.

Нека су A и B дате тачке и $\xrightarrow{m} \xrightarrow{n}$ дате дужине.

$$\Gamma = \left\{ M \mid \frac{MA}{MB} = \frac{m}{n} \right\} = ?$$

Нека су C и D тачке сл. $\frac{AC}{CB} = \frac{m}{n} = \frac{AD}{DB}$, $B(A, C, B, D) \Leftrightarrow \frac{AC}{CB} = -\frac{AD}{DB} \Leftrightarrow \mathcal{H}(AB; CD) (*)$

Нека је k -круги тај ортодоксал CD .

$\Gamma = k$: Нека је $M \notin AB$; $p: p \perp B$, $p \parallel AM$; $\{E\} = p \cap MC$, $\{F\} = p \cap MD$

$$\stackrel{1234}{\Rightarrow} B = S(EF) \text{ сл. } EB = BF.$$

$(*)$
 $\mathcal{H}(AB; CD)$ перп. угао тај ортодоксал

$$\boxed{\supset} \underline{M \in k} \Rightarrow \angle CMD = \frac{\pi}{2} \quad \text{сл. } \angle EMF = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow M \in \text{кргу тај ортодоксал } EF \Rightarrow BE = BF = BM \quad (1)$$

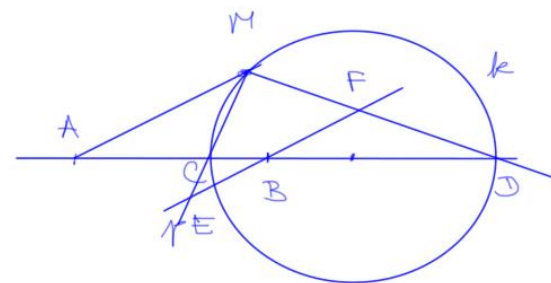
$$\angle AM \parallel BE \stackrel{NTT}{\Rightarrow} \frac{AM}{BE} = \frac{AC}{CB} \quad (2)$$

$$\boxed{\subseteq:} M \in \Gamma \Rightarrow \frac{MA}{MB} = \frac{m}{n} \stackrel{43}{=} \frac{AC}{CB} \quad \stackrel{NTT}{\Rightarrow} \frac{AM}{BE} = \frac{AC}{CB}$$

$$\Rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{AM}{BE} \Rightarrow MB = BE$$

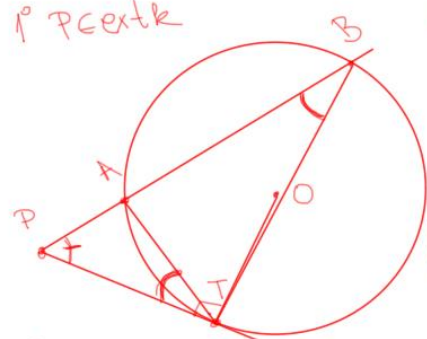
$$B = S(EF) \Rightarrow BE = BF$$

$$\Rightarrow M \in k(B, BE) \leftarrow \text{кргу тај ортодоксал } EF \Rightarrow \angle EMF = \frac{\pi}{2} \quad \text{сл. } \angle CMD \Rightarrow \underline{M \in k}$$



Деф. Ако нека права која садржи тачку P сече круг $k(O, r)$ у тачкама A и B , тада је *потенција* тачке P у односу на круг k дата са $p(P, k) = \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = PO^2 - r^2$ и не зависи од избора праве. Потенција тачке P је већа, мања или једнака нули у зависности од тога да ли се тачка налази у спољашњости, унутрашњости круга или на кругу.

1° $P \in \text{ext } k$



Означимо са T додирну тачку тангенте из P на k

$\angle APT = \angle BPT$ заједнички $\Rightarrow$

$\angle ATP = \angle ABT$

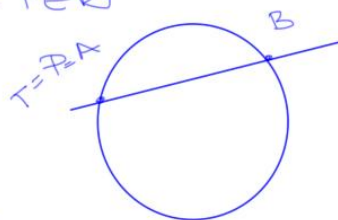
($\angle$ ван и ванске = периф. уг. ванске)

$\triangle APT \sim \triangle BPT \Rightarrow \frac{AP}{PT} = \frac{PT}{PB} \Rightarrow PA \cdot PB = PT^2$

$P \in \text{ext } k \Rightarrow \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} > 0, PT^2 > 0$

$\Rightarrow p(P, k) = \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = PT^2 = PO^2 - OT^2 = OP^2 - r^2 > 0$
 $\triangle PTO \quad OP > r$

2° $P \in k$



$\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{0}$
 $PT = 0$

$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0 = PT^2$
 $OP^2 - r^2$

$p(P, k) = \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = PO^2 - r^2 = 0$

3° $P \in \text{int } k$



$OP \cap k = \{C, D\}$

Број $B(C, P, O, D)$

$\triangle APC \sim \triangle BPD$

$\frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB} \Rightarrow$

$PA \cdot PB = PC \cdot PD$

$B(C, P, O, D) \Rightarrow$
 $(OP - PC)(OP + OD)$

$OC = OD = r$

$= (r - OP)(r + OP) = r^2 - OP^2$

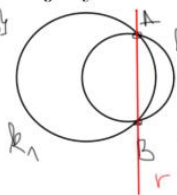
$P \in \text{int } k \Rightarrow \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} < 0 \Rightarrow p(P, k) = \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = OP^2 - r^2 < 0$
 $r > OP$

Деф. Геометријско место тачака равни које имају једнаке потенције у односу на два дата круга $k_1(O_1, r_1)$ и $k_2(O_2, r_2)$ је права која се зове *радикална* или *потенцијална оса*.

Радикална оса је управна на правој O_1O_2 . Радикалне осе трију кругова неке равни припадају једном прамену.

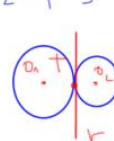
Уколико је у питању прамен конкурентних правих, пресечна тачка назива се *радикални центар* тих кругова.

1° $k_1 \cap k_2 = \{A, B\}$



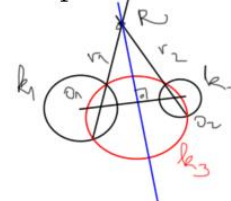
$p(A, k_1) = 0 = p(A, k_2)$
 $p(B, k_1) = 0 = p(B, k_2)$
 $r = AB$

2° $k_1 \cap k_2 = \{T\}$



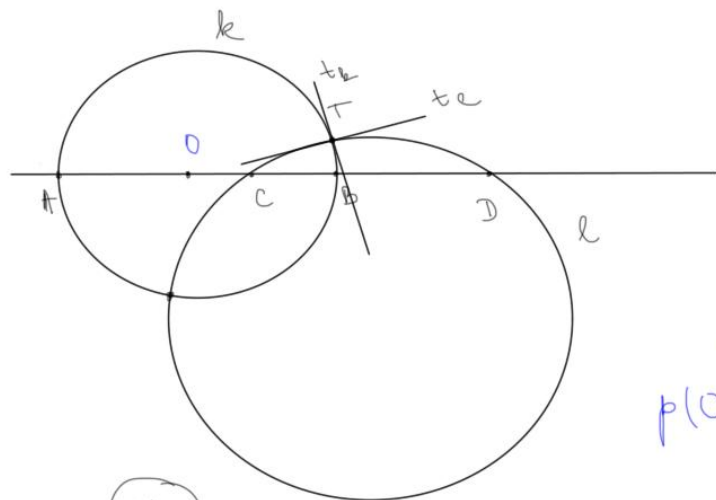
$r \perp O_1O_2$
 $r \perp O_1O_2$
 $r \perp O_1O_2$

3°



$k_1 \cap k_2 = \emptyset$
 $r \perp O_1O_2$
 $r \perp O_1O_2$
 $r \perp O_1O_2$

14. Нека су A, B, C, D колинеарне тачке такве да важи $B(A, C, B, D)$ и нека је k круг над пречником AB и l било који круг који садржи тачке C, D . Доказати да важи $\mathcal{H}(A, B; C, D) \Leftrightarrow k \perp l$.



Ⓣ УГАО ИЗМЕЂУ ДВА КРУГА ЈЕСТЕ УГАО КОЈИ ЗАКЉАПАЈУ ТАНГЕНТЕ ТИХ КРУГОВА У БИЛО КОЈОЈ ОД ПРЕСЕТНИХ ТАЧКА КРУГОВА.

$k \cap l \ni T$; Означимо са t_e и t_k тангенте у тачки T на кругове l и k респективно.

$$\boxed{\Leftarrow:} \quad \left. \begin{array}{l} k \perp l \Leftrightarrow t_k \perp t_e \\ t_k \perp OT \end{array} \right\} \Rightarrow t_e \parallel OT \Rightarrow t_e = OT \quad (1)$$

(угао између тангената се идентификује са углом)

$$p(O, l) = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD} \stackrel{(1)}{=} OT^2 \stackrel{\uparrow}{=} OA^2 \stackrel{\text{Ⓜ}_{309}}{\Rightarrow} \mathcal{H}(A, B; C, D) \quad \blacksquare$$

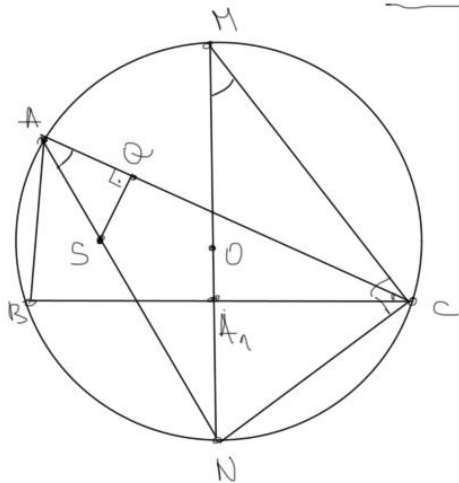
$OT = OA$

$$\boxed{\Rightarrow} \quad \mathcal{H}(A, B; C, D) \stackrel{\text{Ⓜ}_{309}}{\Rightarrow} \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD} = OA^2 = \underline{OT^2}$$

$\underbrace{p(O, l)}_{OT \perp t_k} \quad (2)$

$$\} \rightarrow OT \text{ тангента из } O \text{ на } l \text{ а } OT = t_e \Rightarrow t_e \perp t_k \Rightarrow l \perp k, \quad \blacksquare$$

15. Ако је $l(O, r)$ описан круг, $k(S, \rho)$ уписани круг и $k_a(S_a, \rho_a)$ споља уписани круг који додирује страницу BC датог троугла ABC , доказати да је $OS^2 = r^2 - 2r\rho$ и $OS_a^2 = r^2 + 2r\rho_a$. $\square$



$$S \in \text{int } l$$

$$p(S, l) = \vec{SA} \cdot \vec{SN} = SO^2 - r^2 < 0 \Rightarrow SA \cdot SN = r^2 - SO^2 \Rightarrow OS^2 = r^2 - AS \cdot SN \quad (*)$$

$$S \in \text{int } l \Rightarrow \vec{SA} \cdot \vec{SN} < 0$$

$$SO < r$$

$$\angle SAQ = \angle NAC \overset{\substack{\uparrow \\ \text{дефиниција } \widehat{NC}}}{=} \angle NMC$$

$$\angle SQA = \frac{\pi}{2} \overset{\substack{\uparrow \\ \text{дефиниција } \widehat{NC}}}{=} \angle NCM$$

дефиниција угла и перпендикуларности

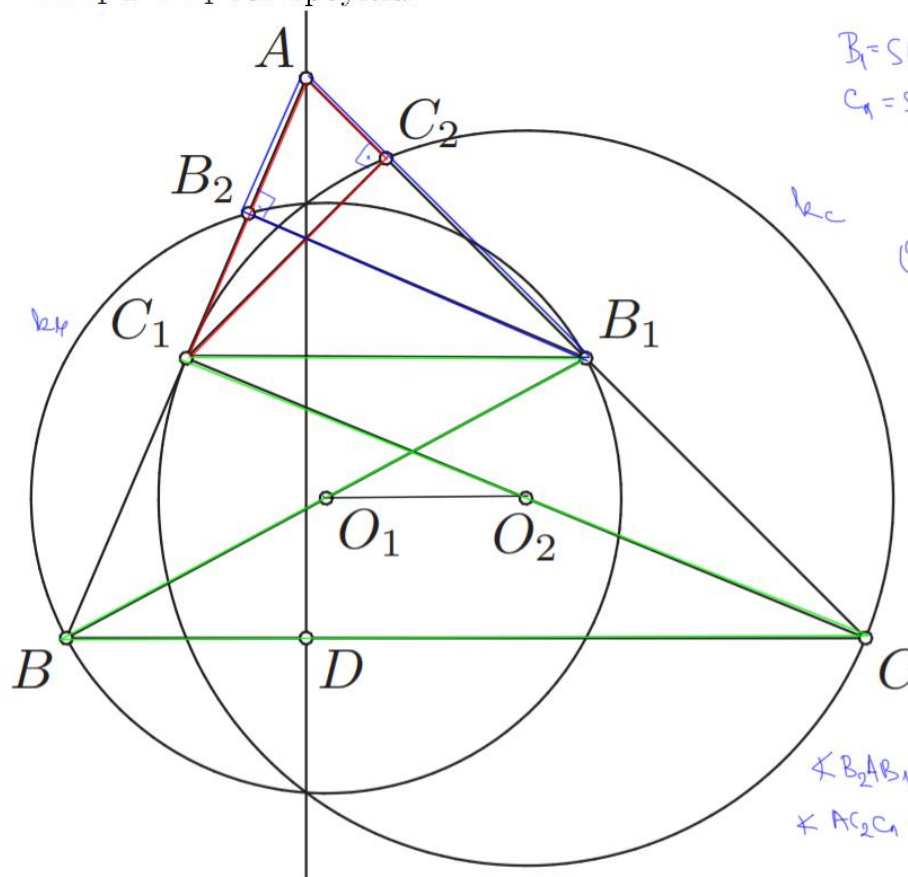
$$\Delta ASQ \sim \Delta MNC \Rightarrow \frac{AS}{MN} = \frac{SQ}{NC} \Rightarrow$$

$$AS \cdot NC = MN \cdot SQ \Rightarrow AS \cdot SN = 2r\rho \quad (**)$$

$$\begin{matrix} \parallel B_2 & \parallel B_1 & \parallel B_3 \\ SN & 2r & S \end{matrix}$$

$$(**) \leadsto (*) \Rightarrow OS^2 = r^2 - 2r\rho. \quad \square$$

16. Прва одређена висином AD троугла ABC представља радикалну осу кругова којима су пречници тежишне линије BB_1 и CC_1 тог троугла.



$$B_1 = S(AC), C_1 = S(AB), k_b, k_c \text{ кругови са } BB_1 \text{ и } CC_1 \text{ пречн.}$$

$$k_b = k(O_1, O_1B), k_c = k(O_2, O_2C)$$

$$\text{Означимо } k_b \cap AB = \{B_2\}, B_2 \neq B, k_c \cap AC = \{C_2\}, C_2 \neq C.$$

$$\left. \begin{array}{l} B_1 = S(AC) \\ C_1 = S(AB) \end{array} \right\} \Rightarrow B_1C_1 \text{ средња линија} \Rightarrow B_1C_1 \parallel BC \Rightarrow \square BB_1C_1C \text{ уписив}$$

$$\left. \begin{array}{l} O_1 = S(BB_1) \\ O_2 = S(CC_1) \end{array} \right\} \Rightarrow O_1O_2 \text{ ср. лин. некривих тој уписаног } \square BB_1C_1C \Rightarrow$$

$$O_1O_2 \parallel BC \quad (1)$$

$$AD \perp BC \quad (2)$$

$$\Rightarrow \boxed{AD \perp O_1O_2 \quad (*)}$$

$$\begin{aligned} \varphi(A, k_b) &= \overrightarrow{AB_2} \cdot \overrightarrow{AB} \\ \varphi(A, k_c) &= \overrightarrow{AC_2} \cdot \overrightarrow{AC} \end{aligned} \quad ??$$

$$\begin{aligned} \angle B_2AB_1 &= \angle C_1AC_2 \text{ (заједнички угао)} \\ \angle AC_2C_1 &= \frac{\pi}{2} = \angle AB_2B_1 \end{aligned}$$

$$\angle C_1C_2C = \frac{\pi}{2} \text{ (угао над опречником)} \Rightarrow \angle B_1B_2B = \frac{\pi}{2}$$

$$\angle C_1C_2A = \frac{\pi}{2} \text{ (суседни)}$$

$$\Rightarrow \angle AB_2B_1 = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \triangle AC_1C_2 \sim \triangle AB_1B_2 \Rightarrow$$

$$\frac{AC_1}{AB_1} = \frac{AC_2}{AB_2} \quad (5)$$

$$\left. \begin{array}{l} C_1 = S(AB) \Rightarrow AC_1 = \frac{1}{2}BA \\ B_1 = S(AC) \Rightarrow AB_1 = \frac{1}{2}AC \end{array} \right\} \leadsto (3) \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AC_2}{AB_2} \Rightarrow AB \cdot AB_2 = AC \cdot AC_2 \quad (4)$$

$$\angle BAC - \text{остар} \Rightarrow \varphi(A, k_b) > 0, \varphi(A, k_c) > 0, \angle BAC + \pi \Rightarrow \varphi(A, k_b) < 0, \varphi(A, k_c) < 0 \quad (5)$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi(A, k_b) = \varphi(A, k_c) \quad (**)}$$

$$(**), (**) \Rightarrow AD \text{ рад. оса } k_b, k_c$$