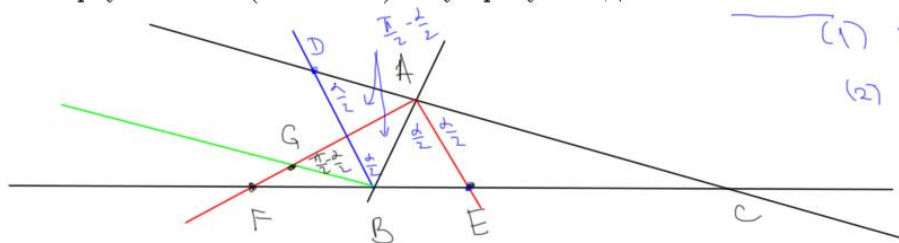


1. (Теорема о симетрали угла) Ако су E и F тачке у којима бисектрисе унутрашњег и спољашњег угла $\angle BAC$ троугла ABC ($AB < AC$) секу праву BC доказати $BE : CE = BF : CF = AB : AC$.



$$(1) \angle BAE = \angle EAC = \frac{\alpha}{2} \quad (\text{AE симетр. ут. угла } \angle A \text{ } \triangle ABC)$$

$$(2) \angle BAF = \angle FAD = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \quad (\text{AF — л. сим. — л. — — — — —})$$

Означимо, $D : D \in AC, BD \parallel AE$

$$\text{п.т.т.} \Rightarrow BE : EC = DA : AC \quad (*) \quad \left. \begin{array}{l} \Rightarrow BE \cdot EC = AB : AC \quad (I) \end{array} \right\}$$

$$BD \parallel AE \Rightarrow \angle DBA = \angle BAE = \frac{\alpha}{2} \\ \Rightarrow \angle BDA = \angle EAC = \frac{\alpha}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow \triangle DAB \text{ једнакоугаоно } \Rightarrow AD = AB \quad (**)$$

Означимо, $G : G \in AF, BG \parallel AC$

$$\Rightarrow \angle BFA = \angle GAD = \angle FAD \stackrel{(2)}{=} \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \\ + (2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow \triangle GBA \text{ једнакоугаоно } \Rightarrow \underline{BG = BA} \quad (***) \end{array} \right\}$$

$$BG \parallel AC \stackrel{\text{п.т.т.}}{\Rightarrow} BF : FC = BG : AC \quad (****)$$

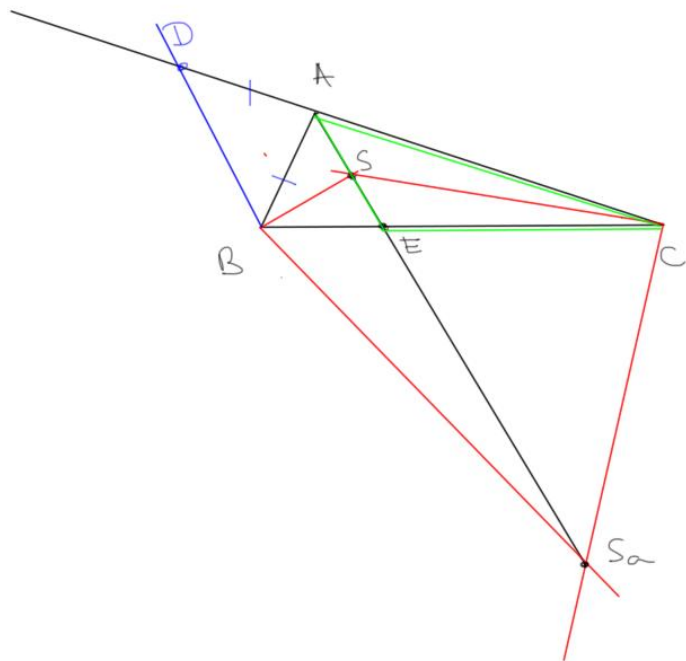
$$(***), (****) \Rightarrow \underline{BF : FC = AB : AC} \quad (II)$$

2. Нека су E и F тачке из претходног задатка. Доказати:

a) $AS : SE = AS_a : S_aE = (AB + AC) : BC$;

б) $AE : SE = (AB + BC + CA) : BC$, $AE : S_aE = (AB + AC - BC) : BC$;

в) $AS_b : S_bF = AS_c : S_cF = (AC - AB) : BC$. ДЗ.



а) CS -симедрана унутрашњег угла код C $\triangle ABC$
 $CS_a - 1 \quad \text{својимет} \quad -1 \quad \text{својимет} \quad -1$

Постављајмо $\triangle AEC$: CS симедрана ун. угла код C
 $CS_a - 1 \quad \text{својимет} \quad -1$

① $\Rightarrow AS : SE = \frac{AC : CE}{AS_a : S_aE} = \frac{AC : CE}{AS_a : S_aE} (*)$

Објектно: $D \in AC$, $BD \parallel AE$ ① $\Rightarrow AD = AB$

п.т.т. $\Rightarrow \frac{AC : CE}{AS : SE} = \frac{DC : CB}{AS_a : S_aE} = \frac{(DA + AC) : CB}{AS_a : S_aE} = \frac{(AB + AC) : BC}{AS_a : S_aE} (**)$

$(*)$, $(**)$ $\Rightarrow AS : SE = AS_a : S_aE = (AB + AC) : BC$

б) $\frac{AE}{SE} = \frac{AS + SE}{SE} = \frac{AS}{SE} + \frac{SE}{SE} = \frac{AS}{SE} + 1 \stackrel{a)}{=} \frac{AB + AC}{BC} + 1 = \frac{AB + AC + BC}{BC}$

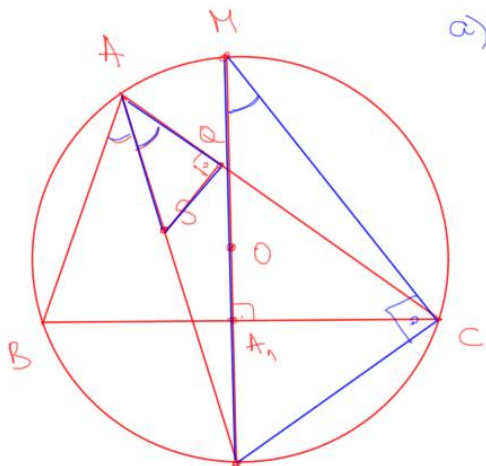
3. Доказати (важе ознаке из Великог задатка):

a) $\underline{SA} \cdot \underline{SN} = 2r\rho$;

$$6) S_a A \cdot S_a N = 2r\rho_a; \quad \text{A3}$$

$$\text{B) } S_b A \cdot S_b M = 2r\rho_b; \quad 1.3$$

$$\Gamma) S_c A \cdot S_c M = 2r\rho_c.$$



a) $\chi_{SAQ} = \chi_{NAC} = \chi_{NMC} \quad (1)$

↑
verif. ythol. has $\widehat{NC}$

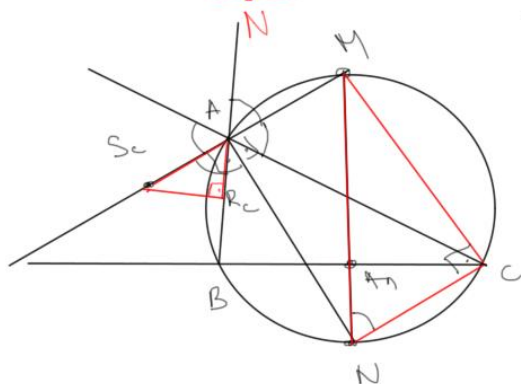
$$\Rightarrow \triangle ASQ \sim \triangle MNC \Rightarrow \overbrace{AS : MN = SQ : NC}^{\text{Corresponding sides are in the same ratio}} \quad (*)$$

$$\angle SQA = \frac{\pi}{2} = \angle MCN \quad (2)$$

депут. уџао наг претплати

$$\xRightarrow{33} MN=2r, SQ=9, NC=NS \quad (**)$$

$$(\underline{x}), (\underline{x}) \Rightarrow AS \cdot NC = MV \cdot SQ \Rightarrow AS \cdot NS = 2rS$$



$\neq S_c, S_b \in \text{curespan}$ wdh. yda kag A $\Rightarrow AN \perp AS_c$ wdh. $\neq S_c AN = \frac{\pi}{2}$
 $AN - \text{curew. yda yda kag } A$
 $AN - \text{yda yda kag } A \Rightarrow \neq NAM = \frac{\pi}{2}$ yda kag $upethur$

$\Rightarrow S_{c,A,M}$ kommutative $\neq$

for a firm A $\Rightarrow \cancel{S} \cancel{C} \cancel{A} \cancel{R} \cancel{C} = \cancel{M} \cancel{A} \cancel{C} = \cancel{M} \cancel{M} \cancel{C} \quad (3)$

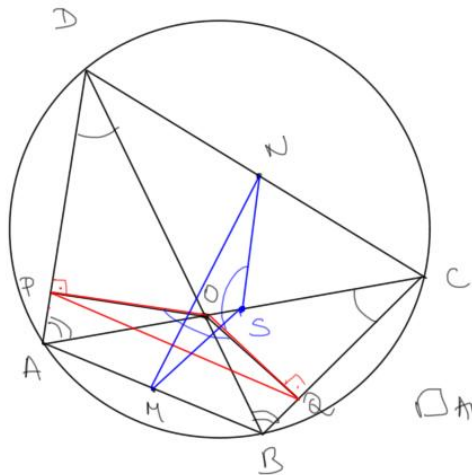
ASC-curewpana was. yike

$$\frac{1}{\frac{1}{S_c R_{CA}} + \frac{1}{M}} = \frac{T}{2} = \frac{1}{M C N} \quad (4)$$

MS_c 2r P_c
B3 11 11 B3 11 B3

$$(3), (4) \Rightarrow \Delta AS_c R_c \sim \Delta MNC \Rightarrow AS_c : MN = S_c R_c : MC \Rightarrow AS_c \cdot MC = MN \cdot S_c R_c \Rightarrow AS_c \cdot MS_c = 2r S_c$$

4. Нека је $ABCD$ тетиван четвороугао, M и N редом средишта страница AB и CD , O пресек дијагонала AC и BD , а P и Q нормалне пројекције тачке O редом на AD и BC . Доказати да је $MN \perp PQ$.



! Објаснимо, $S = S(AC)$! (или аналогно $S = S(BD)$)
 $N = S(AD)$
 $S = S(AC)$ } $\Rightarrow NS$ сред. линија $\Delta ACD \Rightarrow NS \parallel AD, NS = \frac{1}{2}AD$ (1)

$S = S(AC)$
 $M = S(AB)$ } $\Rightarrow SM \parallel BC, SM = \frac{1}{2}BC$ (2)

$OP \perp AD, AD \parallel NS \Rightarrow OP \perp NS$
 $OQ \perp BC, BC \parallel SM \Rightarrow OQ \perp SM$ } $\Rightarrow \angle POQ = \angle NSM$ (*)

$\square ABCD$ тетиван $\Rightarrow \angle ADO = \angle ADB = \angle ACB = \angle OCB$ (вериф. по $\widehat{AB}$)
 $\angle DAO = \angle DAC = \angle DBC = \angle OBC$ (вериф. по $\widehat{DC}$) } $\Rightarrow \Delta AOD \sim \Delta BOC$

$\angle PDO = \angle ADO = \angle OCB = \angle OCQ$
 $\angle DPO = \frac{\pi}{2} = \angle CQO$ } $\Rightarrow \Delta PDO \sim \Delta QCO$

$$\frac{AO}{BO} = \frac{DO}{CO} = \frac{AD}{BC} \stackrel{(1)}{=} \frac{2NS}{2MS} = \frac{NS}{MS} \quad (3)$$

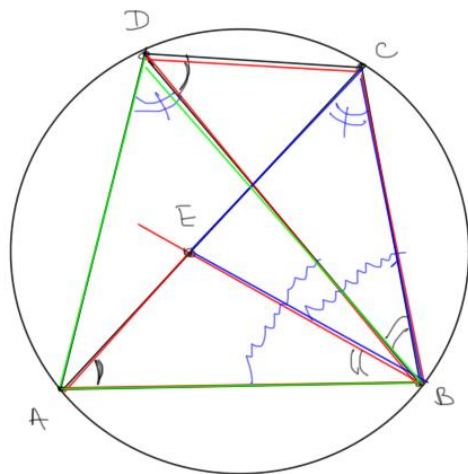
$$(3), (4) \Rightarrow \frac{NS}{MS} = \frac{PO}{QO} \Leftrightarrow \frac{NS}{OP} = \frac{MS}{QO} \quad (4)$$

$$(*) \Rightarrow \angle(\underline{PO}, \underline{OQ}) = \angle(\underline{NS}, \underline{SM})$$

$\Rightarrow \Delta NSM \sim \Delta POQ \Rightarrow \angle SNM = \angle OPQ$
 $\angle(SN, NM) = \angle(OP, PQ)$
 $(*) \Rightarrow OP \perp NS$

$\Rightarrow$ још увијек са „ $\perp$ “ крст.
 $\Rightarrow PQ \perp MN$

5. (Птоломејева теорема) Ако је $ABCD$ конвексан и тетиван четвороугао, доказати да важи $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$.



$$\text{ЕЈО} \quad \angle ABD > \angle DBC$$

$$E: B(A, E, C) \quad \angle ABE = \angle DBC \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} E: B(A, E, C) \\ \angle ABE = \angle DBC \end{matrix}} \right\} \Rightarrow \triangle DCB \sim \triangle AEB \Rightarrow \overbrace{AE : CD = AB : BD}^{\Downarrow}$$

$$\angle EAB = \angle CAB \quad \uparrow \quad \angle CDB$$

депуф на $\widehat{BC}$

$$\text{депуф на } \widehat{AB} \quad B(A, E, C) \\ \angle ADB = \angle ACB = \angle ECB$$

$$\angle DBA = \angle DBE + \angle EBA = \angle DBE + \angle CBD = \angle CBE \\ \uparrow \\ B(A, E, C)$$

$$\angle E = \frac{AB \cdot CD}{BD} \quad (*)$$

$$\left. \vphantom{\begin{matrix} \angle ADB = \angle ACB = \angle ECB \\ \angle DBA = \angle CBE \end{matrix}} \right\} \Rightarrow \triangle ADB \sim \triangle ECB \\ \Downarrow$$

$$\overbrace{EC : AD = BC : BD}$$

$$\Rightarrow EC = \frac{AD \cdot BC}{BD} \quad (**)$$

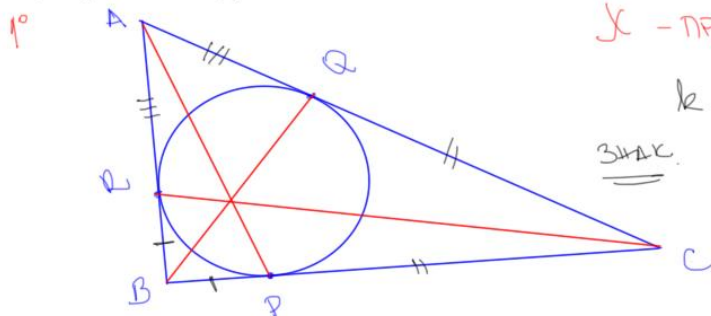
$$(*), (**) \Rightarrow \underbrace{AE + EC}_{B(A, E, C) \rightarrow AC} = \frac{AB \cdot CD}{BD} + \frac{AD \cdot BC}{BD} \Rightarrow AC = \frac{AB \cdot CD + AD \cdot BC}{BD} \quad \text{или} \quad AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$$

$$B(A, E, C) \rightarrow AC$$

(Чевина теорема) Ако су P, Q, R редом тачке правих BC, CA, AB где су A, B, C три неколинеарне тачке, тада

праве AP, BQ, CR припадају једном прамену ако и само ако важи $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = 1$.

6. Ако су P, Q, R тачке у којима уписани круг троугла ABC додирује странице BC, CA, AB , доказати да су праве AP, BQ, CR конкурентне.



$$\Pi = \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}}$$

2° X - ПРАМЕЊ КОНКУРЕНТНИХ ПРАВИХ

k - уписан у $\triangle ABC \Rightarrow$

ЗНАК

$$B(\overrightarrow{BP}, \overrightarrow{PC}) \Rightarrow \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} > 0$$

$$C(\overrightarrow{CQ}, \overrightarrow{QA}) \Rightarrow \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} > 0$$

$$A(\overrightarrow{AR}, \overrightarrow{RB}) \Rightarrow \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} > 0$$

1° 1° 1°

$$\Pi = \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} > 0 \quad (*)$$

ИЧИН ЗНАКА:

$$|\Pi| = \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} \stackrel{(1)}{=} \frac{BR}{CQ} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AQ}{RB} = 1 \quad (**)$$

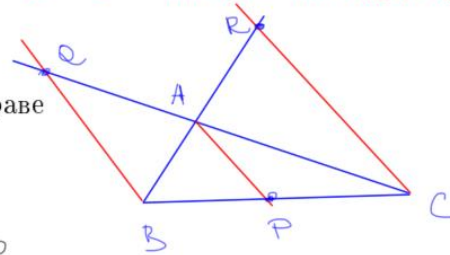
Једнакост "ТАНГЕНТНИХ ДУГА" $\Leftarrow$ (ТХ)

$$\left. \begin{array}{l} BP=BQ \\ CP=CQ \\ AR=AQ \end{array} \right\} (1)$$

$\Rightarrow \Pi > 0, |\Pi| = 1 \Rightarrow \Pi = 1 \stackrel{Ч.Т.}{\Rightarrow} AP, BQ, CR$ су $\Rightarrow$ праве једног прамена $\Rightarrow AP, BQ, CR$ конкурентне ПРАВЕ

$\times AP, BQ, CR \in \text{int } \triangle ABC \Rightarrow AP, BQ, CR$ не могу бити саравне

2° X - ПРАМЕЊ ПАРАЛЕЛНИХ ПРАВИХ



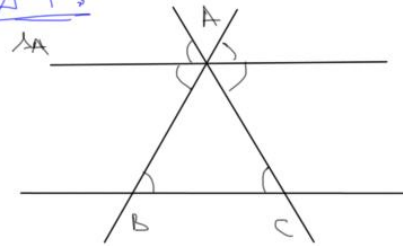
(Менелајева теорема) Тачке P, Q, R правих одређених страницама BC, CA, AB троугла ABC су колинеарне ако и само ако важи $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = -1$.

7. Доказати да, уколико постоје тачке у којима бисектрисе спољашњих углова код темена A, B и C секу праве одређене наспрамним страницама троугла ABC , оне су колинеарне.

Нека су $\Delta_A, \Delta_B, \Delta_C$ спољаш. бисектр. углова код A, B, C темена ΔABC

$$\{P\} = \Delta_A \cap BC, \{Q\} = \Delta_B \cap AC, \{R\} = \Delta_C \cap AB$$

$\times$ ДП:



$$\Delta_A \cap BC = \emptyset \Leftrightarrow \Delta_A \parallel BC \Leftrightarrow \underline{AB = AC}$$

$$\Pi = \frac{\overrightarrow{AQ}}{\overrightarrow{QC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CP}}{\overrightarrow{PB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BR}}{\overrightarrow{RA}} = ?$$

Знај: $\exists P, Q, R : P, Q, R \in$ спољашњим бисектрисама углова код A, B, C темена ΔABC

$$\Rightarrow P, Q, R \in \text{ext} \Delta ABC \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \angle B(\overrightarrow{BP}, \overrightarrow{C}) \Rightarrow \frac{\overrightarrow{CP}}{\overrightarrow{PB}} < 0 \\ \angle B(\overrightarrow{AQ}, \overrightarrow{C}) \Rightarrow \frac{\overrightarrow{AQ}}{\overrightarrow{QC}} < 0 \\ \angle B(\overrightarrow{AR}, \overrightarrow{B}) \Rightarrow \frac{\overrightarrow{BR}}{\overrightarrow{RA}} < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \Pi = \frac{\overrightarrow{AQ}}{\overrightarrow{QC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CP}}{\overrightarrow{PB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BR}}{\overrightarrow{RA}} < 0$$

универзално: $|\Pi| = \frac{AQ}{QC} \cdot \frac{CP}{PB} \cdot \frac{BR}{RA} \stackrel{(1)}{=} \frac{AB}{BC} \cdot \frac{CA}{AB} \cdot \frac{BC}{CA} = 1 \quad (**)$

$$\textcircled{1} AP \in \Delta_A \Rightarrow \frac{CP}{PB} = \frac{CA}{AB} \quad (1)$$

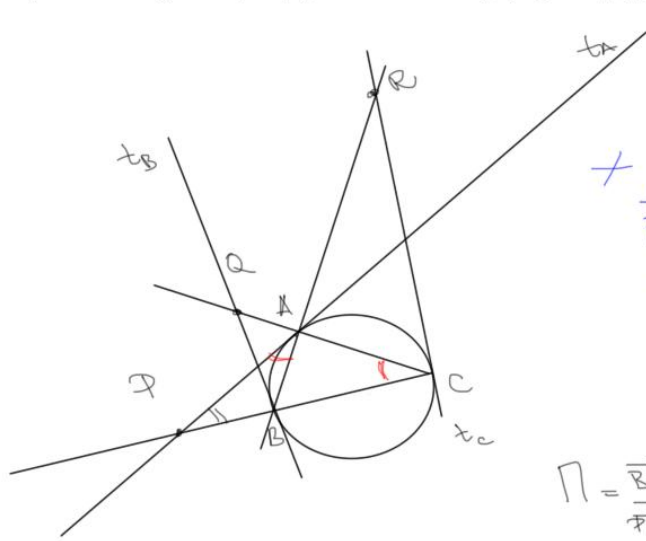
$$\textcircled{1} \Rightarrow \frac{AQ}{QC} = \frac{AB}{BC} \quad (2)$$

$$\textcircled{1} \Rightarrow \frac{BR}{RA} = \frac{BC}{CA} \quad (3)$$

$(*) \Rightarrow \Pi = -1 \Rightarrow$ Менел: P, Q, R колинеарне.

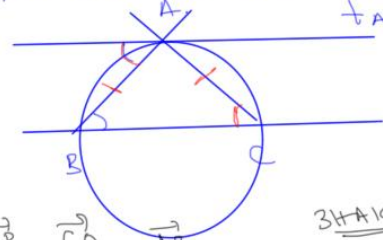
(Менелајева теорема) Тачке P, Q, R правих одређених страницама BC, CA, AB троугла ABC су колинеарне ако и само ако важи $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = -1$.

8. Доказати да тачке P, Q, R у којима тангенте описаног круга троугла ABC у његовим теменима секу праве одређене наспрамним страницама, уколико постоје, припадају једној правој.



Означимо са t_A, t_B, t_C тангенте редом у A, B, C на $k = k(ABC)$
 $t_A \cap BC = \{P\}, t_B \cap CA = \{Q\}, t_C \cap AB = \{R\}$

$\nexists P \Leftrightarrow t_A \parallel BC \Leftrightarrow AB = AC \quad \nexists P, Q, R \Leftrightarrow \Delta ABC$ равнобедрани



Ⓣ У свакој извесној тачки на k тангенте на k су у једној од крајњих тачака тачке једнаке је периф. У свакој тачки на k .

$$\Pi = \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}}$$

ЗНАК: $P, Q, R \in t_A, t_B, t_C$ редом $\Rightarrow P, Q, R \in \text{ext } \Delta ABC$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \angle B(B, P, C) &\rightarrow \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} < 0 \\ \angle C(C, Q, A) &= \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} < 0 \\ \angle A(A, R, B) &= \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} < 0 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \Rightarrow \angle B(B, P, C) &\rightarrow \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} < 0 \\ \angle C(C, Q, A) &= \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} < 0 \\ \angle A(A, R, B) &= \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} < 0 \end{aligned}} \right\} \Rightarrow \Pi < 0 \quad (*)$$

НАПОМЕНА: Ⓣ $\Rightarrow \angle PAB = \angle ACB$
 $\angle APB = \angle APC \quad \left. \vphantom{\angle APB = \angle APC} \right\} \Rightarrow \Delta APB \sim \Delta APC$

$$\frac{BP}{AP} = \frac{AP}{PC} = \frac{AB}{AC}$$

$$\frac{BP}{PC} = \frac{BP}{AP} \cdot \frac{AP}{PC} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AB}{AC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 \quad (1)$$

$$\text{Аналогно, } \frac{CQ}{QA} = \left(\frac{CB}{BA}\right)^2 \quad (2), \quad \frac{AR}{RB} = \left(\frac{AC}{CB}\right)^2 \quad (3)$$

$$\xRightarrow{(1), (2), (3)} \Pi = \frac{AB^2}{AC^2} \cdot \frac{CB^2}{BA^2} \cdot \frac{AC^2}{CB^2} = 1 \quad (**)$$

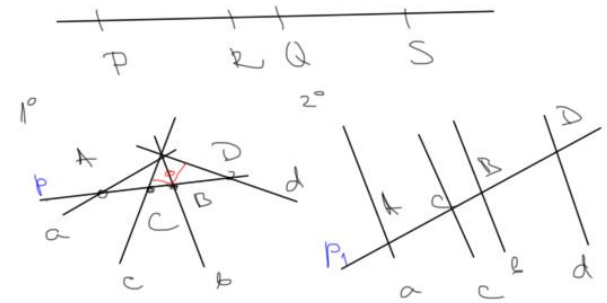
$(1), (2), (3) \Rightarrow \Pi = -1 \xrightarrow{MT} \Rightarrow P, Q, R$ колинеарне

Деф. 1 Нека су P, Q, R, S четири разне колинеарне тачке. Пар тачака (P, Q) је хармонијски спрегнут са паром (R, S) ако важи $\frac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{RQ}} = -\frac{\overrightarrow{PS}}{\overrightarrow{SQ}}$. Тада пишемо $\mathcal{H}(P, Q; R, S)$.

Деф. 2 Праве a, b, c, d једног прамена су хармонијски спрегнуте ако постоји права p која их сече у хармонијски спрегнутим тачкама. Тада пишемо $\mathcal{H}(a, b; c, d)$. Ова особина не зависи од избора праве p .

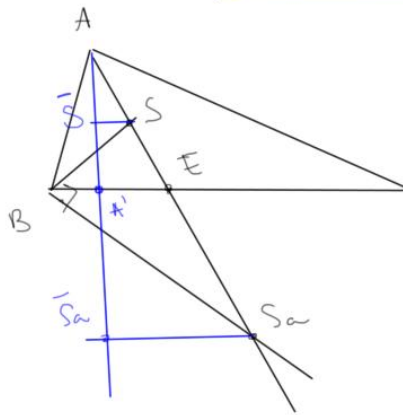
Особине:

1. Ако важи $\mathcal{H}(P, Q; R, S)$, тада важи и $\mathcal{H}(Q, P; R, S)$, $\mathcal{H}(Q, P; S, R)$, $\mathcal{H}(R, S; P, Q)$.
2. Ако су P, Q, R три колинеарне тачке и R није средиште дужи PQ , тада постоји јединствена тачка S таква да је $\mathcal{H}(P, Q; R, S)$.
3. $\mathcal{H}(P, Q; R, S) \Rightarrow \angle(P, R, Q) \simeq \angle(P, S, Q)$.
4. Ако су a, b, c, d конкурентне праве и $c \perp d$, важи: $\mathcal{H}(a, b; c, d) \Leftrightarrow c$ и d су симетрале углова одређених правима a и b .



9. Нека су $\bar{S}, \bar{S}_a, \bar{S}_b, \bar{S}_c$ пројекције тачака S, S_a, S_b, S_c на праву одређену висином AA' троугла ABC , а $\bar{E}$ пројекција тачке E на праву AC . Доказати:

а) $\mathcal{H}(A, E; S, S_a), \mathcal{H}(A, A'; \bar{S}, \bar{S}_a), \mathcal{H}(A, \bar{E}; Q, Q_a), \mathcal{H}(A', E; P, P_a);$



$BA, BE, BS, BS_a \in \mathcal{K}_B$ (конкурентне)

$BS \perp BS_a$ — симетрале углова одређених правима BA и BE

$$\mathcal{H}(A, A'; \bar{S}, \bar{S}_a) \Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{AS}}{\overrightarrow{SA}} = -\frac{\overrightarrow{AS_a}}{\overrightarrow{S_a A}}$$

$$\mathcal{B}(A, S, E, S_a) \Rightarrow \mathcal{B}(A, \bar{S}, A', \bar{S}_a)$$

$$\frac{\overrightarrow{AS}}{\overrightarrow{SA}} \stackrel{\text{п.т.т.}}{=} \frac{\overrightarrow{AS}}{\overrightarrow{SE}} \stackrel{(*)}{=} \frac{\overrightarrow{AS_a}}{\overrightarrow{S_a E}} \stackrel{\text{п.т.т.}}{=} -\frac{\overrightarrow{AS_a}}{\overrightarrow{S_a A}}$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{H}(A, A'; \bar{S}, \bar{S}_a)$$

$$\mathcal{B}(A, S, E), \mathcal{B}(A, \bar{S}, A')$$

$$\mathcal{B}(A, E, S_a), \mathcal{B}(A, A', \bar{S}_a)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{осовина 4} \\ \Rightarrow \end{array} \right\} \mathcal{H}(BA, BE; BS, BS_a) \Leftrightarrow \mathcal{H}(A, E; S, S_a) \quad (*)$$