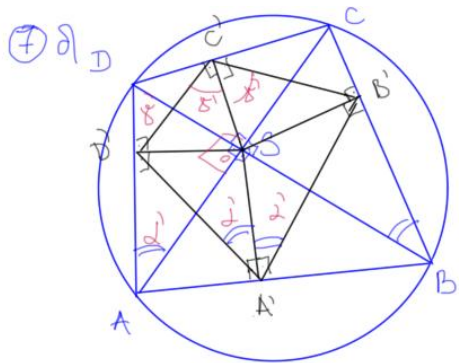




7. Дат је тетиван четвороугао $ABCD$ чије су дијагонале међусобно нормалне и секу се у тачки S .

а) Права која садржи тачку S и нормална је на правој AB садржи средиште дужи CD . Доказати.

б) Ако су A', B', C', D' пројекције тачке S на правама AB, BC, CD, DA , редом, тада је четвороугао $A'B'C'D'$ тетиван и тангентан. Доказати.

2.1. Тангентан четвороугао је ивнороугао у који се може уписати круг.

⊕ Збир дужина парова насупротних страна ивнороугла је једнак ⊕, ⊓ "ТАНГЕНТАН"

$$\Rightarrow (AB + CD = AD + BC)$$

$$\cdot \square AASD : \angle AAS + \angle ADS = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi \Rightarrow \square \text{ ивнороугао} \Rightarrow \angle DAS = \angle DAS \quad (1) \text{ (верификујемо нас } \widehat{D'S})$$

$$\cdot \square ABSB : \angle ASB + \angle BBS = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi \Rightarrow \text{---} \vee \text{---} \Rightarrow \angle SAB = \angle SBB \quad (2) \text{ (---} \vee \text{---} \widehat{SB'})$$

$$\cdot \square ABCD \text{ ивнороугао} \Rightarrow \angle DBC = \angle DAC \quad (3) \text{ (верификујемо нас } \widehat{DC})$$

$$\angle DAS \stackrel{(1)}{=} \angle DAS = \angle DAC \stackrel{(3)}{=} \angle DBC = \angle SBB = \angle SAB \Rightarrow A'S \text{ сече } \text{гн. } \text{гн. } \angle DAS \Rightarrow \underline{d(S, A'B') = d(S, A'D') = r} \quad (*)$$

$$\text{Аналогно, } B'S \text{ сече } \text{гн. } \angle ABC \Rightarrow d(S, AB') = d(S, BC') \quad (**)$$

$$\text{---} \vee \text{---} C'S \text{ ---} \vee \text{---} \angle B'CD' = d(S, B'C) = d(S, C'D) \quad (***)$$

$$\text{---} \vee \text{---} DS \text{ ---} \vee \text{---} \angle C'DA' = d(S, C'D) = d(S, D'A') \quad (****)$$

$$(*), (**), (***), (****) \Rightarrow d(S, AB') = d(S, BC') = d(S, C'D) = d(S, D'A') = r \Rightarrow \text{гн. } \square ABC'D' \text{ може уписати } k(S, r) \Rightarrow \square ABC'D' \text{ ТАНГЕНТАН.}$$

Како ивнороугао може уписати $BD \perp AC$, $\square ABC'D'$ може уписати $\square ABCD$

$$\angle DAS = \alpha' - \angle SAB, \quad \angle DC'S = \beta' = \angle SC'B$$

$$\square D'SC'D' \text{ ивнороугао} \Rightarrow \angle D'C'S = \beta' = \angle D'DS$$

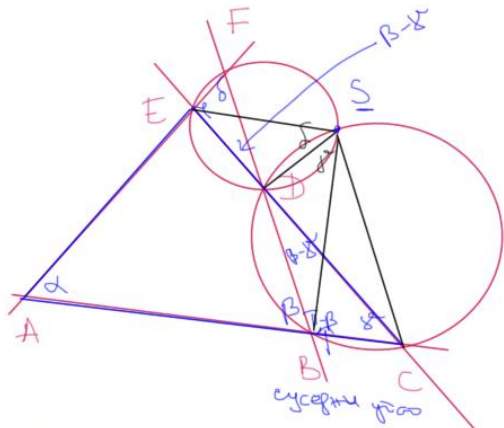
$$(1) \Rightarrow \angle DAS = \alpha' = \angle DA'S$$

$$\triangle ASD : \alpha' + \beta' + \frac{\pi}{2} = \pi \Rightarrow \boxed{\alpha' + \beta' = \frac{\pi}{2}}$$

$$\square A'B'C'D' : \angle D'A'B' + \angle D'C'B' = 2 \cdot \alpha' + 2 \cdot \beta' = 2(\alpha' + \beta') = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$$

$\Rightarrow \square A'B'C'D' \text{ ивнороугао, } \square \text{ "D"}$

8. (Микелова теорема) Четири праве у општем положају у равни одређују четири троугла. Доказати да се описани кругови тих троуглова секу у једној тачки.



$$\left. \begin{aligned} k_{EDF} &= k(E, D, F) \\ k_{DBC} &= k(D, B, C) \end{aligned} \right\} \Rightarrow D$$

$$k_{ABF} = k(A, B, F)$$

$$k_{ACE} = k(A, C, E)$$

$$\angle EAB = \alpha, \angle ABF = \beta, \angle ACE = \gamma$$

$$(\angle DEF = \varphi) \quad \angle EFD = \delta$$

Кругови се не могу сјети у ваљану D јер $D \in$ сјечању BF ΔABF и EC ΔACE , да не може сјечању и алименту кругови се не могу сјечању.

$$k_{EDF} \cap k_{DBC} = \{D, S\}, S \neq D$$

$$\Delta BCD: \angle BDC = \pi - \gamma - (\pi - \beta) = \pi - \gamma - \pi + \beta = \beta - \gamma$$

$$\Delta EDF: \varphi + \delta + \beta - \gamma = \pi$$

$$\Delta ABF: \alpha + \beta + \delta = \pi \Rightarrow \alpha = \pi - \beta - \delta$$

$$\varphi = \alpha + \gamma$$

$$S \in k_{ACE}: S \in k_{EDF} \Rightarrow \angle ESD = \angle EFD \quad (1) \text{ (вериф. наг. } \widehat{ED})$$

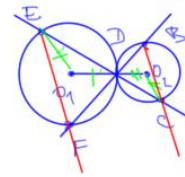
$$S \in k_{DBC} \Rightarrow \angle DSB = \angle DCB = \gamma \quad (2) \text{ (вериф. наг. } \widehat{DB})$$

$$\Rightarrow \angle BSC = \angle BDC = \beta - \gamma \quad (3) \text{ (вериф. наг. } \widehat{BC})$$

$$\angle EAC + \angle ESC = \alpha + \angle ESD + \angle DSB + \angle BSC \stackrel{(1)}{=} \alpha + \delta + \beta - \gamma \stackrel{(2)}{=} \alpha + \delta + \beta \stackrel{(3)}{=} \pi \Rightarrow \square ACSE \text{ уписан у } \triangle ABF$$

Аналогно, $S \in k_{ABF}$.

$$m. k_{EDF} \cap k_{DBC} = \{D\} \text{ и } k_{ABF} \cap k_{ACE} = \{S\}$$



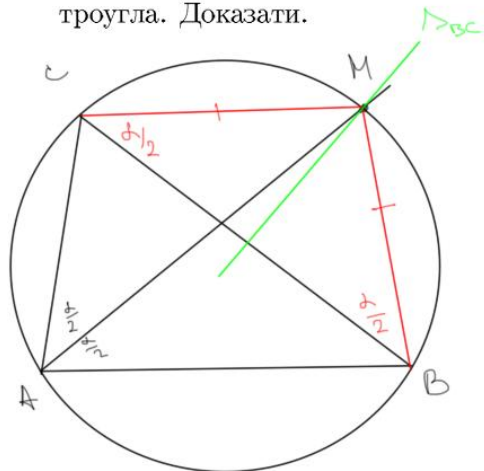
$$\Delta O_1ED, \Delta O_2CD \text{ једнакокрални}$$

$$\Rightarrow \angle O_1ED = \angle O_1DE \Rightarrow \angle O_2DC = \angle O_2CE$$

$$\Rightarrow \angle EOD = \angle COD \Rightarrow \angle EFD = \angle CBD \text{ (вериф.)}$$

$\Rightarrow$ једнакост са "||" крај $\Rightarrow EF \parallel BC$ $\Rightarrow$ једнакост са "||" крај $\Rightarrow EF \parallel BC$ $\Rightarrow$ једнакост са "||" крај $\Rightarrow EF \parallel BC$ $\Rightarrow$ једнакост са "||" крај $\Rightarrow EF \parallel BC$

9. Медијатриса странице и бисектриса наспрамног угла троугла секу се у тачки која припада описаном кругу тог троугла. Доказати.



$$\angle BAC = \alpha, \quad \angle K_{BAC} = \angle_{\alpha} \quad \Rightarrow \quad \angle CAM = \angle MAB = \frac{\alpha}{2}$$

$$\angle_{\alpha} \cap k = \{M\}, M \neq A, k = k(A, B, C)$$

$$\square ABC \text{ вписан} \Rightarrow \angle CBM \overset{\text{вериф. утвр. над } \widehat{CM}}{=} \angle CAM = \frac{\alpha}{2} \quad (1)$$

$$\Downarrow \angle MCB = \angle MAB = \frac{\alpha}{2} \quad (2)$$

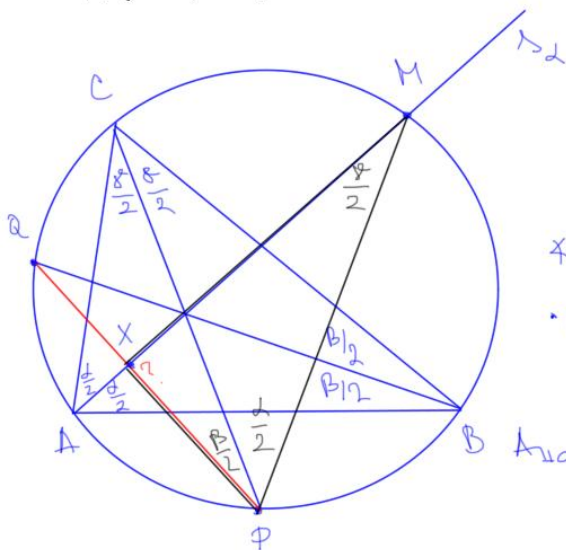
↑
вериф. над $\widehat{MB}$

$$\Rightarrow \triangle CMB \text{ једнакокран, ш. } MC = MB$$

$$\Rightarrow \text{тачка из } M, \text{ симетрана утвр. } \angle CMB, \\ \text{симетрана } CB \text{ оклађу} \Rightarrow$$

$$M \in \angle_{CB}$$

10. Нека су P и Q средишта лукова AB и AC круга описаног око троугла ABC и s_α бисектриса угла $\angle BAC$. Доказати да је $PQ \perp s_\alpha$.



$PQ \perp s_\alpha$?

$$s_\alpha \cap k = \{M\}, M \neq A, k = k(A, B, C)$$

$$\angle CAB = \alpha, \angle ABC = \beta, \angle ACB = \gamma$$

$$\angle CAM = \angle MAB = \frac{\alpha}{2} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \bullet Q = S(AC) &\Rightarrow QC = QA \Rightarrow Q \in s_{AC} \stackrel{(9)}{\Rightarrow} Q \in s_\beta \\ &\Rightarrow \angle CBQ = \angle QBA = \frac{\beta}{2} \quad (2) \end{aligned}$$

$$\text{Аналогно, } P \in s_\gamma \Rightarrow \angle ACP = \angle PCB = \frac{\gamma}{2}$$

$$s_\alpha \cap PQ = \{X\} \quad \downarrow \text{вершица } \widehat{AP}$$

$$\bullet \angle XMP = \angle AMP = \angle ACP = \frac{\gamma}{2} \quad (x)$$

$$\bullet \angle XPM = \angle XPC + \angle CPM = \angle QPC + \angle CPM \quad \begin{matrix} (3) \\ (4) \end{matrix} \quad \frac{\beta}{2} + \frac{\alpha}{2} \quad (xx)$$

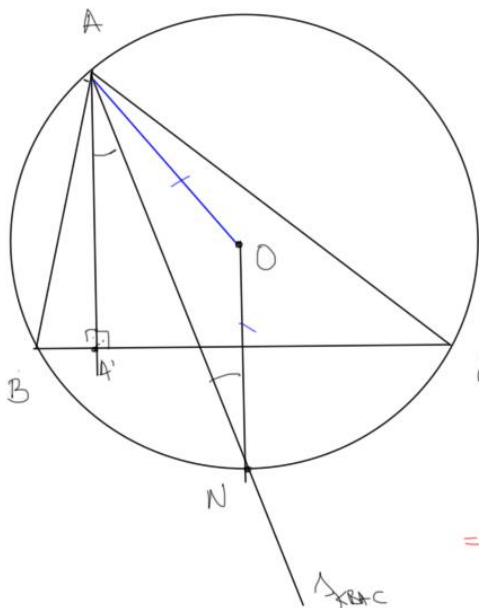
$$(3) \angle QPC = \angle QBC = \frac{\beta}{2} \quad (\text{вершица } \widehat{QC})$$

$$(4) \angle CPM = \angle CAM = \frac{\alpha}{2} \quad (\text{вершица } \widehat{CM})$$

$$\begin{aligned} \stackrel{(x)}{\Rightarrow} \angle PXM &= \pi - \angle XMP - \angle XPM = \pi - \frac{\gamma}{2} - \left(\frac{\beta}{2} + \frac{\alpha}{2} \right) = \\ &= \pi - \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow PQ \perp s_\alpha \quad \square$$

11. Нека су A' , N и O редом подножје висине из A , пресек бисектрисе угла $\angle BAC$ са описаном кругом троугла ABC ($AB < AC$) и центар описаног круга, доказати $\angle A'AN = \angle ANO = \angle NAO = \frac{1}{2}(\angle ABC - \angle ACB)$.



$$\Rightarrow \triangle_{\angle BAC} \cap \triangle_{BC} = \{N\}, N \in k(A, B, C)$$

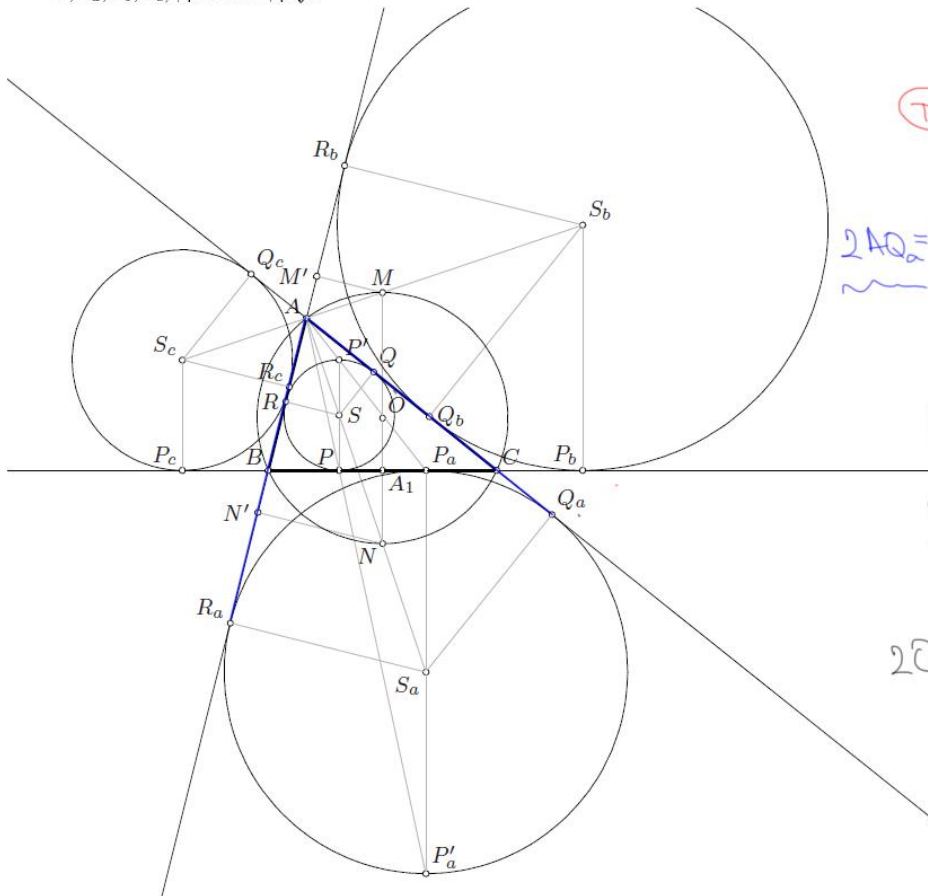
ON

$$\left. \begin{array}{l} AA' \perp BC \\ ON \perp BC \end{array} \right\} \Rightarrow AA' \parallel ON \Rightarrow \angle A'AN = \angle ANO \text{ — унутрашње „||“ крајеве (*)}$$

$$OA = ON = r \Rightarrow \triangle AON \text{ једнакокрачан} \Rightarrow \angle ANO = \angle NAO \text{ (**)}$$

$$\begin{aligned} \angle A'AN &= \angle BAN - \angle BAA' = \frac{1}{2} \angle BAC - \angle BAA' = \frac{1}{2} \angle BAC - (\pi - \angle ABA' - \angle BAA') = \\ &= \frac{\angle BAC}{2} - \frac{\pi}{2} + \angle ABA' = \frac{\angle BAC}{2} - \frac{\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB}{2} + \angle ABC = \frac{\angle BAC - \angle ABC - \angle BCA - \angle CAB + 2\angle ABC}{2} \\ &= \frac{\angle ABC - \angle BCA}{2} = \frac{1}{2} (\angle ABC - \angle ACB) \end{aligned}$$

12. (Велики задатак) Ако са A_1, B_1 и C_1 обележимо средишта ивица $BC = a, CA = b, AB = c$ троугла ABC ($b > c$), са p полубим тог троугла, са $l(O, r)$ описани круг тог троугла, са P, Q, R тачке у којима уписани круг $k(S, \rho)$ додирује праве BC, CA, AB , са P_i, Q_i, R_i ($i = a, b, c$) тачке у којима споља уписани круг $k_i(S_i, \rho_i)$ додирује редом праве BC, CA, AB , са M и N тачке у којима медијатриса ивице BC сече круг l , при чему је M на луку BAC , са M' и N' подножја управних из тачака M и N на правој AB , са P', P'_a, P'_b, P'_c дијаметрално супротне тачке тачкама P, P_a, P_b, P_c , доказати да је:



2) $AQ_a = AR_a = p, \quad QQ_a = RR_a = a, \quad Q_bQ_c = R_bR_c = a;$

$$\left. \begin{array}{l} S_a R_a = S_c = S_c Q_a \\ \neq AR_a S_c = \frac{1}{2} \neq AQ_a S_a \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta AR_a S_c \cong \Delta AQ_a S_a$$

$$\Downarrow$$

$$AR_a = AQ_a$$

(TB*) Ако су X и Y године тачке вандрени из A на bc
 $\Rightarrow AX = AY$ (т. јер тачкоу) „вандрених“ цртају

$$2AQ_a = AQ_a + AR_a = AB + BR_a + AC + CQ_a = AB + AR + BP_a + CP_a = AB + AC + BC = 2p$$

(TB*) (TB*)
 $BP_a \quad CP_a$

$$AQ_a = AR_a = p$$

$$QQ_a = AQ_a - AQ \stackrel{TB*}{=} AR_a - AR = RR_a$$

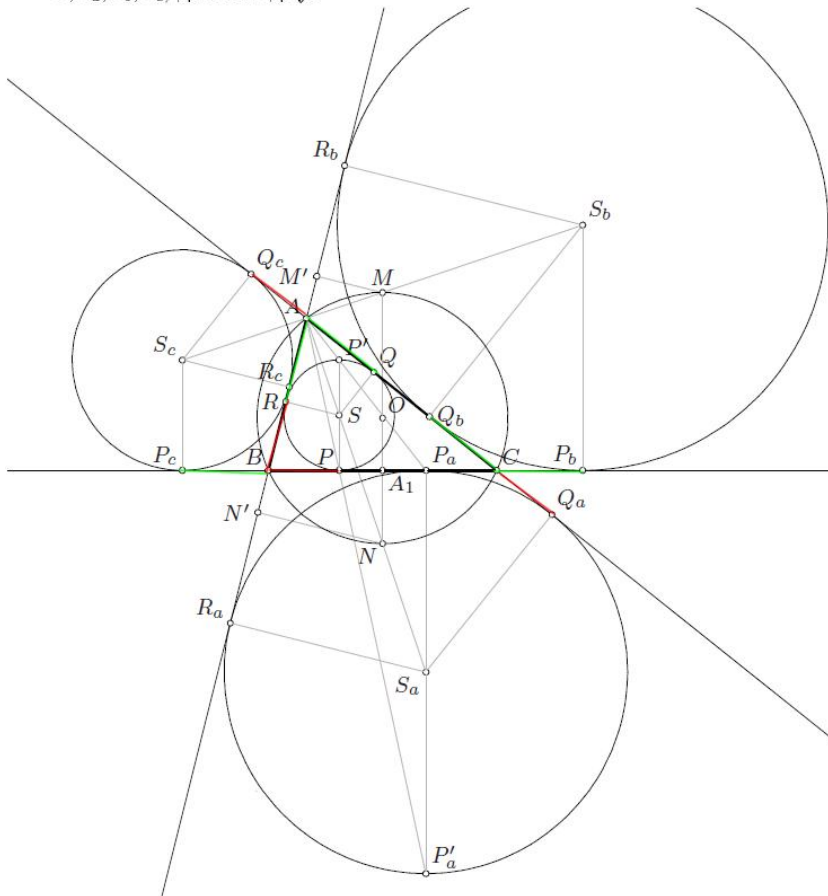
(TB*)
 AR

$$2QQ_a = QQ_a + RR_a = QC + CQ_a + RB + BR_a = CP + CP_a + BP + BP_a = BC + BC = 2a$$

$$\begin{array}{ccccccc} (TB*) & \Rightarrow & \parallel & \parallel & \parallel & \parallel & \parallel \\ & & CP & CP_a & BP & BP_a & \end{array}$$

$$QQ_a = RR_a = a$$

12. (Велики задатак) Ако са A_1, B_1 и C_1 обележимо средишта ивица $BC = a, CA = b, AB = c$ троугла ABC ($b > c$), са p полубим тог троугла, са $l(O, r)$ описани круг тог троугла, са P, Q, R тачке у којима уписани круг $k(S, \rho)$ додирује праве BC, CA, AB , са P_i, Q_i, R_i ($i = a, b, c$) тачке у којима споља уписани круг $k_i(S_i, \rho_i)$ додирује редом праве BC, CA, AB , са M и N тачке у којима медијатриса ивице BC сече круг l , при чему је M на луку BAC , са M' и N' подножја управних из тачака M и N на правој AB , са P', P'_a, P'_b, P'_c дијаметрално супротне тачке тачкама P, P_a, P_b, P_c , доказати да је:



3) $AQ = AR = BR_c = BP_c = CP_b = CQ_b = p - a;$

$AQ = AR$ $BR_c = BP_c$ $CP_b = CQ_b$

$$2AQ = AQ + AR = AC - CQ + AB - BR = AC + AB - (CQ + BR) = AC + AB - BC = 2p - 2BC = 2(p - a) \Rightarrow AQ = AR = p - a$$

Аналогно, $BR_c = BP_c = p - a, CP_b = CQ_b = p - a$

$BP = BR = AQ_c = AR_c = CQ_a = CP_a = p - b$
 $CP = CQ = AR_b = AQ_b = BR_a = BP_a = p - c$

4) $PP_a = b - c, P_bP_c = b + c;$

$PP_a = BP_a - BP = (p - c) - (p - b) = p - c - p + b = b - c$

5) $PA_1 = P_aA_1, P_cA_1 = P_bA_1;$

$PA_1 = BA_1 - BP = \frac{1}{2}BC - (p - b) = \frac{a}{2} - \frac{a+b+c}{2} + b = \frac{a}{2} - \frac{a}{2} - \frac{b}{2} - \frac{c}{2} + b = \frac{b-c}{2}$

$\Rightarrow PP_a = b - c$

$PA_1 = BP_a - BA_1 = b - c - \frac{b-c}{2} = \frac{b-c}{2}$

$\Rightarrow PA_1 = A_1P_a = \frac{b-c}{2}$

7) $A_1M = \frac{1}{2}$

$\square PP_a S_a S$ Her...

мысль Her...

$$S, S_\alpha, N \in \mathcal{N}_{KBAC} \Rightarrow \text{kompatible}$$
$$\begin{aligned} \text{5)} \quad A_n &= S(PPa) > (*) \\ A_n N &\perp BC \end{aligned}$$
$$\Rightarrow N = S(S_a)$$
$$\Rightarrow NS = NS_a \quad (1)$$
$$N \in \Delta_{BC} \Rightarrow \boxed{NB = NC} \quad (2)$$

BS-cwewapana ya yote kufi B } $\Rightarrow$ BS $\perp$ BSa wj. $\angle$ SBCa = $\frac{\pi}{2}$
BSa - 1L wana - 1L

$\Rightarrow$ yes! Has $\downarrow$ permutation $S_c \Rightarrow \boxed{NB = NS = NS_{A(3)}}$
 $N = S(SS_c)$

$$(1, 2)(3) \Rightarrow NS = NS_{\infty} - NB = NC$$
$$7) \quad A_1 M = \frac{1}{2}(\rho_b + \rho_c), \quad A_1 N = \frac{1}{2}(\rho_a - \rho);$$

□ TP_aS_aс керектен уағыз, $t_1 N$ сөзін
минга керектен уағыз $\Rightarrow t_1 N = \frac{1}{2}(S_1 P_a - S P)$
 $= \frac{1}{2}(S_a - S)$

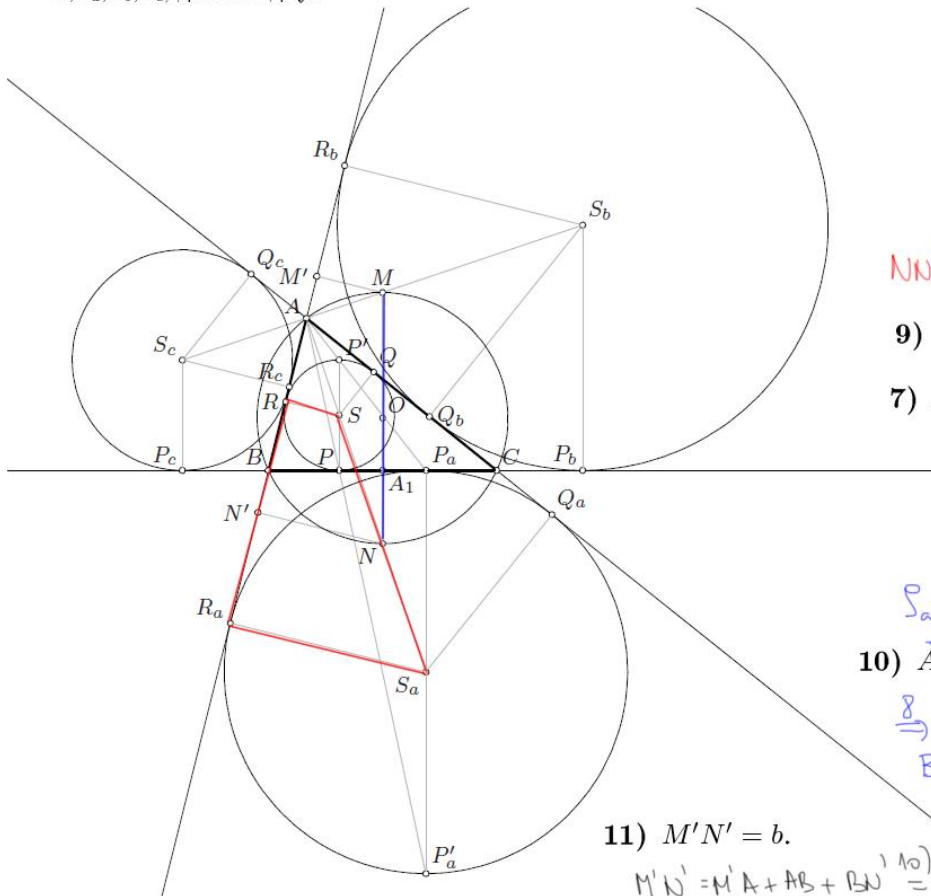
$(x) \Downarrow (xx)$
 $A_n N$ среднего уровня $\Delta p_{\text{взв}} =$
 (необорачиваем)

Teorijski smo imali je konstantu
ako kažemo da su te gube koje
su opadale u toku vremena.

① 1^o Средња митија КОНВЕКЦИОТ ПРИБЕЗ ЈУТАС
је новобити здра оштвља.

2° Средна митра HERMENEUTIC изражава
једнако је владомити разлике основца.

12. (Велики задатак) Ако са A_1, B_1 и C_1 обележимо средишта ивица $BC = a, CA = b, AB = c$ троугла ABC ($b > c$), са r полубим тог троугла, са $l(O, r)$ описани круг тог троугла, са P, Q, R тачке у којима уписани круг $k(S, \rho)$ додирује праве BC, CA, AB , са P_i, Q_i, R_i ($i = a, b, c$) тачке у којима споља уписани круг $k_i(S_i, \rho_i)$ додирује редом праве BC, CA, AB , са M и N тачке у којима медијатриса ивице BC сече круг l , при чему је M на луку BAC , са M' и N' подножја управних из тачака M и N на правој AB , са P', P'_a, P'_b, P'_c дијаметрално супротне тачке тачкама P, P_a, P_b, P_c , доказати да је:



$$8) MM' = \frac{1}{2}(\rho_b - \rho_c), \quad NN' = \frac{1}{2}(\rho + \rho_a);$$

$$\Rightarrow N = S(SS_a)$$

$$\left. \begin{array}{l} SR \perp AB \\ S_a R_a \perp AB \end{array} \right\} \Rightarrow \square R_a S_a S R \text{ правоугли } \Rightarrow N = S(SS_a) \quad NN' \perp AB$$

$$NN' \text{ срез лика конвексног правоуглига } \Rightarrow NN' = \frac{1}{2}(SR + S_a R_a) = \frac{1}{2}(\rho + \rho_a)$$

$$9) \rho_a + \rho_b + \rho_c = 4r + \rho;$$

$$7) A_1 M = \frac{1}{2}(\rho_b + \rho_c), \quad A_1 N = \frac{1}{2}(\rho_a - \rho);$$

$$MN = 2r$$

$$MA_1 + A_1 N = \frac{1}{2}(\rho_b + \rho_c) + \frac{1}{2}(\rho_a - \rho) = \frac{1}{2}(\rho_a + \rho_b + \rho_c - \rho)$$

$$\rho_a + \rho_b + \rho_c - \rho = 4r \quad \text{пошто} \quad \rho_a + \rho_b + \rho_c = 4r + \rho$$

$$10) AM' = \frac{1}{2}(b - c) = BN', \quad AN' = \frac{1}{2}(b + c) = BM';$$

$$\Rightarrow N' = S(RR_a), \quad M' = S(RR_b)$$

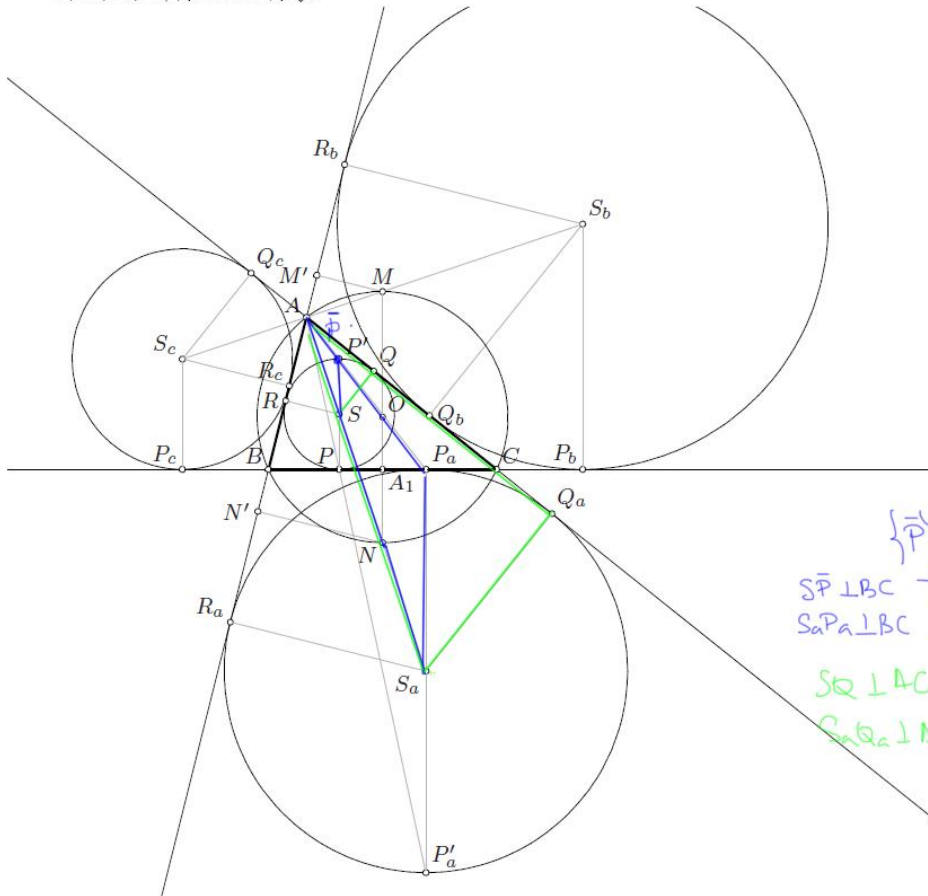
$$BN' = N'R - BR = \frac{1}{2}RR_a - BR \stackrel{2)}{=} \frac{1}{2}a - BR \stackrel{3)}{=} \frac{1}{2}a - (pb) = \frac{1}{2}a - \frac{a}{2} - \frac{b}{2} - \frac{c}{2} + b = \frac{b-c}{2}$$

$$AM' = AR - M'R \stackrel{3)}{=} p - c - \frac{1}{2}Rb \stackrel{2)}{=} \frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{2} - c - \frac{a}{2} = \frac{b-c}{2}$$

$$11) M'N' = b.$$

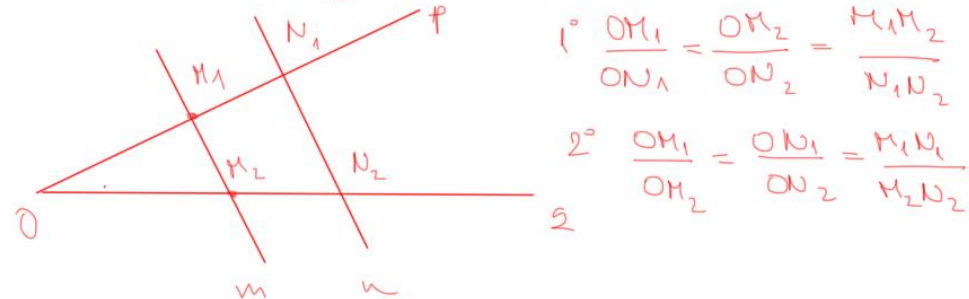
$$M'N' = M'A + AB + BN' \stackrel{10)}{=} \frac{1}{2}(b-c) + c + \frac{1}{2}(b-c) = b - c + c = b$$

12. (Велики задатак) Ако са A_1, B_1 и C_1 обележимо средишта ивица $BC = a, CA = b, AB = c$ троугла ABC ($b > c$), са p полубим тог троугла, са $l(O, r)$ описани круг тог троугла, са P, Q, R тачке у којима уписани круг $k(S, \rho)$ додирује редом праве BC, CA, AB , са P_i, Q_i, R_i ($i = a, b, c$) тачке у којима споља уписани круг $k_i(S_i, \rho_i)$ додирује редом праве BC, CA, AB , са M и N тачке у којима медијатриса ивице BC сече круг l , при чему је M на луку BAC , са M' и N' подножја управних из тачака M и N на правој AB , са P', P'_a, P'_b, P'_c дијаметрално супротне тачке тачкама P, P_a, P_b, P_c , доказати да је:



ПОСЛЕДИЦА ТАЛЕСОВЕ ТЕОРЕМЕ:

Нека се праве p и z секу у тачки O и нека су m и n две праве које не садрже тачку O , редом праве p и z секу у тачкама редом M_1, M_2 и N_1, N_2 . Ако су m и n две паралелне праве ваља је



$$1^\circ \frac{OM_1}{ON_1} = \frac{OM_2}{ON_2} = \frac{M_1M_2}{N_1N_2}$$

$$2^\circ \frac{OM_1}{OM_2} = \frac{ON_1}{ON_2} = \frac{M_1N_1}{M_2N_2}$$

- 1) $B(A, P', P_a), B(A, P, P'_a), B(P_c, A, P'_b), B(P_b, A, P'_c);$

$$\begin{aligned} \{\bar{P}\} &= AP_a \cap SP & A, S, S_a \text{ коллинеарне}, B(A, S, S_a) &\Rightarrow B(A, \bar{P}, P_a) \\ \left. \begin{array}{l} S\bar{P} \perp BC \\ S_a P_a \perp BC \end{array} \right\} &\Rightarrow S\bar{P} \parallel S_a P_a \xrightarrow{MTT} \underline{S\bar{P} : S_a P_a = AS : AS_a} \quad (1) \\ \left. \begin{array}{l} SQ \perp AC \\ S_a Q_a \perp AC \end{array} \right\} &\Rightarrow SQ \parallel S_a Q_a \xrightarrow{MTT} \underline{SQ : S_a Q_a = AS : AS_a} \quad (2) \\ &\Rightarrow S\bar{P} : S_a P_a = SQ : S_a Q_a \\ &\Rightarrow S\bar{P} = SQ \Rightarrow \underline{\bar{P} \in k} \\ k \cap SP &= \{P, P'\} \text{ од } \bar{P} = P \text{ љ } \bar{P} \neq P \text{ од } P = P_a \text{ (6.2)} \Rightarrow \bar{P} = P' \\ &\Rightarrow \underline{B(A, P', P_a)} \end{aligned}$$