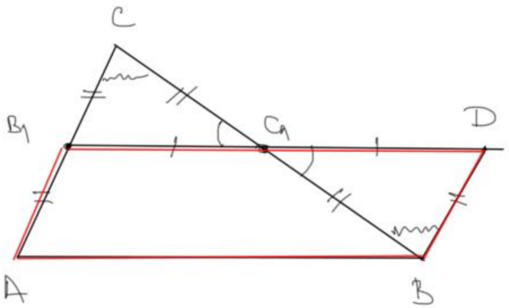
1



? $B_1C_1 \parallel AB$, $B_1C_1 = \frac{1}{2}AB$?

D: $\mathcal{B}(B_1, C_1, D)$, $B_1C_1 = C_1D$ тј. $D = S_{C_1}(B_1)$

$$\left.\begin{array}{l} B_1C_1 = C_1D \text{ (УЗ)} \\ B_1 = S(CB),\ CC_1 = C_1B \\ \measuredangle B_1C_1C = \measuredangle BC_1D \end{array}\right\} \overset{СУС}{\Rightarrow} \triangle B_1C_1C \cong \triangle BC_1D \Rightarrow \measuredangle B_1CC_1 = \measuredangle DBC_1 \ (1)$$

C, C_1, B колинеарне

$\Rightarrow$ углови са „||" крацима $\Rightarrow B_1C \parallel BD$ (3)

$$\Downarrow$$

$B_1C = BD$ (2)

$$\left.\begin{array}{l} B_1C,\ B_1C \parallel BD \Rightarrow AB_1 \parallel BD \\ \ \ \ni \\ \ \ A \\ B_1C = B_1A,\ (2) \Rightarrow AB_1 = BD \end{array}\right\} \overset{Т}{\Rightarrow} \square\ ABDB_1 \text{ паралелограм}$$

$$\Downarrow$$

$B_1D \parallel AB \Rightarrow B_1C_1 \parallel AB$
$\ni C_1$

$B_1D = AB$, $C_1 = S(B_1D) \Rightarrow \underset{\substack{\parallel \\ AB}}{B_1D} = 2 \cdot B_1C_1 \Rightarrow B_1C_1 = \frac{1}{2}AB$

Т Два троугла су подударна $\Leftrightarrow$ је задовољен један од сл. ставова

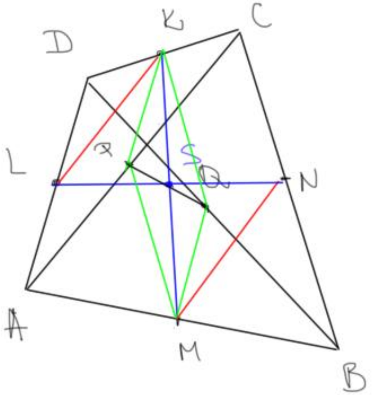
1° ССС
2° СУС
3° УСУ
4° ССУ ← угао је наспрам веће странице
5° УУС

Деф: ПАРАЛЕЛОГРАМ је четвороугао чије су наспрамне ивице међусобно паралелне.

Т Наспрамне ивице произвољног четвороугла су међусобно подударне $\Leftrightarrow$ „□" ПАРАЛЕЛОГРАМ

Т Пресек дијагонала произвољног четвороугла је средиште сваке од дијагонала $\Leftrightarrow$ „□" ПАРАЛЕЛОГРАМ.

②



а) $MN \stackrel{?}{=} KL$ $(MP \stackrel{?}{=} QK)$ $(NP \stackrel{?}{=} QL)$

$\left.\begin{array}{l} M = S(AB) \\ N = S(BC) \end{array}\right\} \Rightarrow MN$ ср. лин. $\triangle ABC \Rightarrow MN \parallel AC$ (1)

$MN = \frac{1}{2} AC$ (2)

$\left.\begin{array}{l} L = S(AD) \\ K = S(CD) \end{array}\right\} \Rightarrow KL$ ср. лин. $\triangle ACD \Rightarrow KL \parallel AC$ (3)

$KL = \frac{1}{2} AC$ (4)

$\left.\begin{array}{l} (1),(3) \Rightarrow \underline{MN \parallel KL} \\ (2),(4) \Rightarrow \underline{MN} = \frac{1}{2} AC = \underline{KL} \end{array}\right\} \Rightarrow \square MNKL$ паралелограм

Аналогно, $MP = QK$, $NP = QL$

б) LN, MK, PQ имају заједничко средиште?

$\stackrel{а)}{\Rightarrow} \square MNKL$ паралелограм $\Rightarrow$ дијагонале LN и KM се полове тј. $\underline{S = S(LN) = S(KM)}$ (*)

Аналогно, $\square PMQK$ је паралелограм $\Rightarrow$ дијагонале MK и PQ се полове $\Rightarrow$ тј. $S' = S(MK) = S(PQ)$ (**

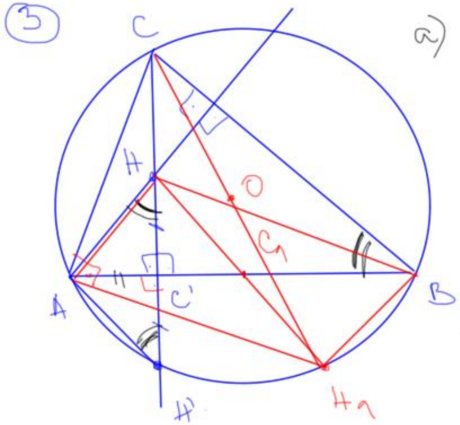
(*), (**) $\Rightarrow$ $\underset{S'}{\underset{\parallel}{S(KM)}} = S$ $\exists!$ средиште дужи $\Rightarrow$ $S \equiv S'$ $\Rightarrow$ $\underline{S = S(LN) = S(KM) = S(PQ)}$

в) $\underset{\measuredangle(BC,AD)}{\underset{\parallel}{\measuredangle PMQ}}$, $\underset{\measuredangle(AB,CD)}{\underset{\parallel}{\measuredangle PNQ}}$, $\underset{\measuredangle(AC,BD)}{\underset{\parallel}{\measuredangle LMN}}$

$\left.\begin{array}{l} PM \text{ ср. л. } \triangle ABC \Rightarrow PM \parallel BC \\ MQ \text{ -}\parallel\text{- } \triangle ABD \Rightarrow MQ \parallel AD \end{array}\right\} \stackrel{\text{углови са „}\parallel\text{“ крак.}}{\Rightarrow} \underset{\underline{\measuredangle PMQ}}{\underset{\parallel}{\measuredangle(PM,MQ)}} = \underline{\measuredangle(BC,AD)}$

Аналогно, за остале.

③



а) $H' = S_{AB}(H)$, C' подножје нормале из C $\triangle ABC$ на AB

$\Updownarrow$

$(H'C' = C'H$, $H \neq H'$, H, C', H' колинеарне$)$

$H' \overset{?}{\in} k = k(A,B,C)$

$\left.\begin{array}{l} HC' = C'H' \ (У3) \\ \measuredangle HC'A = \frac{\pi}{2} = \measuredangle H'C'A \\ AC' = AC' \end{array}\right\}$ СУС $\Rightarrow \triangle AC'H \cong \triangle AC'H'$

$\Downarrow$

$\measuredangle AHC' = \measuredangle AH'C' = \measuredangle AH'C$ (1)

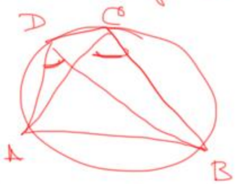
• $\left.\begin{array}{l} AH \perp BC \\ HC' \perp AB \end{array}\right\} \Rightarrow \measuredangle AHC' = \measuredangle ABC$ (2)

углови са „⊥" крацима

$\Rightarrow \measuredangle ABC = \measuredangle AH'C \Rightarrow H' \in k(A,B,C)$.

је периф над AC

Т Ако су у ⊡ABCD углови ∡ADB и ∡ACB подударни онда је тај четвороугао ТЕТИВАН



Т Збир наспрамних углова ⊡ABCD је π ⇔ „⊡" ТЕТИВАН

(⊙). Пер. угао над пречником је $\frac{\pi}{2}$.

б) $C_1 = S(AB)$, $H_1 = S_{C_1}(H)$ $\quad H_1 \overset{?}{\in} k$

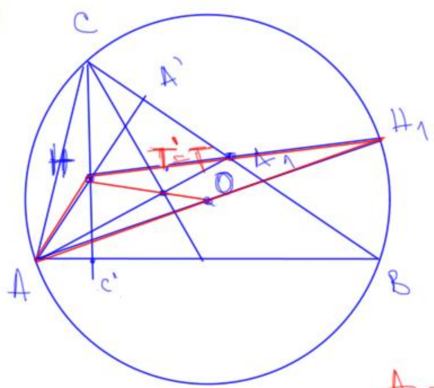
$\left.\begin{array}{l} C_1 = S(AB) \\ \quad = S(HH_1) \end{array}\right\} \Rightarrow$ ⊡AH_1BH паралелограм $\Rightarrow$ $AH_1 \parallel BH$ (*), $AH \parallel BH_1$ (**)

$\left.\begin{array}{l} BH \perp AC \ (\text{висина из } B \text{ у } \triangle ABC) \\ BH \parallel AH_1 \ (*) \end{array}\right\} \Rightarrow AH_1 \perp AC$ тј. $\boxed{\measuredangle H_1AC = \frac{\pi}{2}}$ + Означимо $O = S(CH_1) \overset{(⊙)}{\Rightarrow} C, A, H_1 \in k(O, OC)$ (I)

Аналогно, (**) $\left.\begin{array}{l} AH \perp BC \\ AH \parallel BH_1 \end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp BH_1$ тј. $\boxed{\measuredangle H_1BC = \frac{\pi}{2}}$ + $O = S(CH_1) \overset{(⊙)}{\Rightarrow} H_1, B, C \in k(O, OC)$ (II)

(I), (II) $\Rightarrow A, B, C, H_1 \in k(O, OC)$ тј. $H_1 \in k$

(4)



$\vec{HT} = 2\vec{TO}$ тј. $(\mathcal{B}(H,T,O),\ HT = 2TO)$

T – теж. $\triangle ABC$, H – ортоцентар $\triangle ABC$, O – центар описаног круга око $\triangle ABC$

$H_1 = S_{A_1}(H)$, $A_1 = S(BC)$ $\xRightarrow{3д}$ AH_1 пречник $k(ABC)$, $H_1 \in k$

$O = S(AH_1) \Rightarrow HO$ теж. дуж $\triangle AH_1H$
T' тежиште $\triangle AHH_1$ $\Big\}\Rightarrow HT' : T'O = 2:1$ (1)

$A_1 = S(HH_1) \Rightarrow AA_1$ теж. дуж $\triangle AH_1H \Rightarrow AT' : T'A_1 = 2:1$ (2)

$\{T'\} = AA_1 \cap HO$

• $A_1 = S(BC) \Rightarrow AA_1$ теж. дуж $\triangle ABC \underset{T \text{ теж. } \triangle ABC}{\Rightarrow} AT : TA_1 = 2:1$ (3)

(2),(3) T, T' деле дуж AA_1 у истом односу $\xRightarrow{\exists!\ \text{тачка која неку дуж дели у датом односу}}$ $\underline{T \equiv T'}$ $\xrightarrow{(1)}$ $\underset{T\equiv T'}{\Rightarrow}$ $\underline{HT : TO = 2:1}$ $\Bigg\}\Rightarrow \underline{\vec{HT} = 2\vec{TO}}$

• $\triangle AH_1H$, $O \in AH_1$, T' – тежиште $\triangle AHH_1$, $T' \in \text{int}\,\triangle AH_1H \Rightarrow \mathcal{B}(H, \underset{T}{T'}, O)$

(5) A', B', C' подножја висина из A, B, C редом

A_1, B_1, C_1 средишта BC, CA, AB редом

$A', B', C', A_1, B_1, C_1, D, E, F \in k$

$D = S(AH)$, $E = S(BH)$, $F = S(CH)$

$\left.\begin{array}{l} D = S(AH) \\ E = S(BH) \end{array}\right\} \Rightarrow DE$ ср. лин. $\Delta ABH \Rightarrow DE \parallel AB$ (1), $DE = \frac{1}{2}AB$ (2)

$\left.\begin{array}{l} A_1 = S(BC) \\ B_1 = S(AC) \end{array}\right\} \Rightarrow A_1B_1$ −||− $\Delta ABC \Rightarrow A_1B_1 \parallel AB$ (3), $A_1B_1 = \frac{1}{2}AB$ (4)

$\overset{(1),(3)}{\Longrightarrow}$ $DE \parallel A_1B_1$ (*)

$\overset{(2)(4)}{\Longrightarrow}$ $DE = \frac{1}{2}AB = A_1B_1$ (**)

(*), (**) $\Rightarrow$ $\boxed{\square DEA_1B_1 \text{ паралелограм}}$ (5)

Аналогно, B_1D је ср. лин. $\Delta AHC \Rightarrow B_1D \parallel CH$

CH висина $\Delta ABC \Rightarrow CH \perp AB$

$\overset{+(1)}{\Longrightarrow}$ $B_1D \perp DE$ тј. $\boxed{\measuredangle B_1DE = \frac{\pi}{2}}$ (6)

(5), (6) $\Rightarrow$ правоугаоник је $\square DEA_1B_1$ $\Rightarrow$ можемо описати круг $O = S(B_1E) = S(A_1D)$

$\Rightarrow B_1, D, E, A_1 \in k(O, OB)$

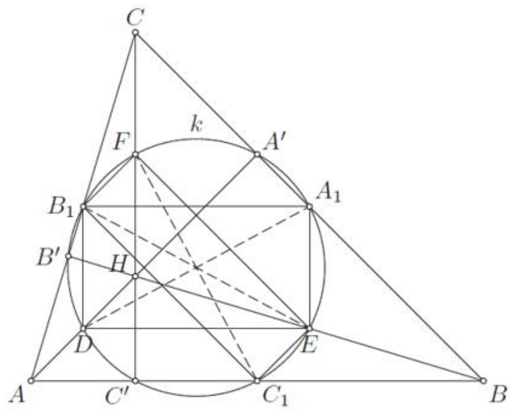
Аналогно, $\square B_1C_1EF$ је правоугаоник $\Rightarrow$ може се описати круг $B_1, C_1, E, F \in k(O, OB)$

$A_1, B_1, C_1, E, F, D \in k = k(O, OB)$ (I)

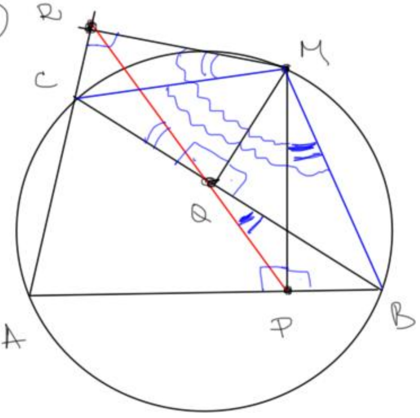
$\cdot$ $\underset{E,B'}{BH} \perp \underset{B'B_1}{AC}$ $\Rightarrow EB' \perp B'B_1$ тј. $\measuredangle EB'B_1 = \frac{\pi}{2}$ + $k = k(O, OB)$ је пречника B_1E $\Rightarrow$

$\Rightarrow B' \in k$ (периф. угао над пречником)

Аналогно, $A', C' \in k \Rightarrow A', B', C', A_1, B_1, C_1, D, E, F \in k$ ∎



(6)



P,Q,R колинеарне? Ду. $M \in \overset{\frown}{BC} \not\ni A$

- $\measuredangle MPB = \frac{\pi}{2} = \measuredangle MQB \Rightarrow \square PBMQ$ тетиван $\Rightarrow \underline{\measuredangle PQB = \measuredangle PMB}^{(1)}$ периф. над $\overset{\frown}{PB}$
- $\measuredangle MRC + \measuredangle MQC = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi \rightarrow \square MRCQ$ тетиван $\Rightarrow \underline{\measuredangle CQR = \measuredangle CMR}$ (2) периф. угла над $\overset{\frown}{CR}$
- $\underset{\frac{\pi}{2}}{\underset{\shortparallel}{\measuredangle MRA}} + \underset{\frac{\pi}{2}}{\underset{\shortparallel}{\measuredangle MPA}} = \pi \Rightarrow \square APMR$ тетиван $\Rightarrow \underline{\measuredangle RMP + \measuredangle RAP = \pi}$ (3)

$M \in k = k(A,B,C) \Rightarrow \square ABMC$ тетиван $\Rightarrow \underline{\measuredangle CAB + \measuredangle CMB = \pi}$ (4)

$\measuredangle RAP = \measuredangle CAB$, (3), (4) $\Rightarrow \underline{\measuredangle CMB = \measuredangle RMP}$ (*)

$$\left.\begin{array}{l} \measuredangle CMB = \underline{\measuredangle CMP + \measuredangle PMB} \\ \shortparallel (*) \\ \measuredangle RMP = \underline{\measuredangle RMC + \measuredangle CMP} \end{array}\right\} \Rightarrow \underset{\measuredangle PQB}{\underset{\shortparallel (1)}{\measuredangle PMB}} = \underset{\measuredangle RQC}{\underset{\shortparallel (2)}{\measuredangle RMC}} \quad (**) \Rightarrow \boxed{\measuredangle RQC = \measuredangle PQB} \quad (\mathrm{I})$$

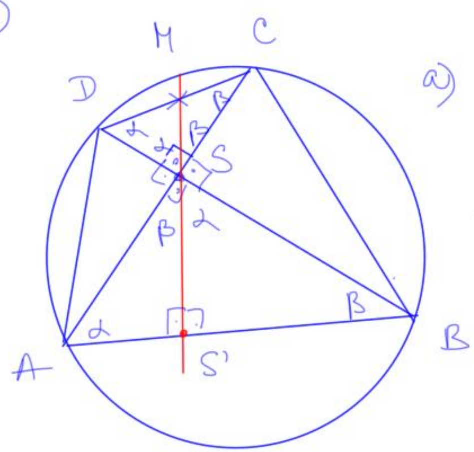
- $M \in \overset{\frown}{BC} \not\ni A \Rightarrow P, R \div BC$ (II)

$\Rightarrow$ унакрсни

$\Downarrow$

P,Q,R колинеарне

(7)



a) S' подножје нормале из S на AB

$\{M\} = SS' \cap CD$

$M \overset{?}{=} S(CD)$

• $\sphericalangle SAB = \alpha$

$\sphericalangle SBA = \beta$

$\underline{\Delta ABC}$: $\underbrace{\sphericalangle SAB}_{\alpha} + \underbrace{\sphericalangle SBA}_{\beta} + \underbrace{\sphericalangle ASB}_{\frac{\pi}{2}} = \pi \Rightarrow \boxed{\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}}$ (*)

• $\underline{\Delta AS'S}$: $\sphericalangle AS'S = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sphericalangle ASS' = \frac{\pi}{2} - \alpha \overset{(*)}{=} \beta$

• $\underline{\Delta S'BS}$: $\sphericalangle SS'B = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sphericalangle S'SB = \frac{\pi}{2} - \beta \overset{(*)}{=} \alpha$

• $\sphericalangle MSC = \sphericalangle ASS' = \beta$, $\sphericalangle MSD = \sphericalangle BSS' = \alpha$

унакрсни унакрсни

• $\square ABCD$ је тетиван $\Rightarrow \sphericalangle CDB = \sphericalangle CAB$ ($=\alpha$) периферни над $\overset{\frown}{CB}$

$\Rightarrow \sphericalangle DCA = \sphericalangle DBA = \beta$ — || — $\overset{\frown}{DA}$

$\Rightarrow \Delta MDS$ једнакокраки $\Rightarrow MS = MD$

ΔMSC — || — $\Rightarrow MS = MC$ $\Big\} \Rightarrow \boxed{MC = MD}$ (1)

* ΔASB правоугли SS' висина из S ($\sphericalangle ASB = \frac{\pi}{2}$) $\Rightarrow \mathcal{B}(A, S', B)$ тј. $SS' \in \operatorname{int}(\underbrace{\sphericalangle ASB}_{\sphericalangle DSC})$

$\Rightarrow SS' \in \operatorname{int} \sphericalangle(DSC) \Rightarrow \boxed{\mathcal{B}(D, M, C)}$ (2) ; (1), (2) $\Rightarrow \underline{M = S(CD)}$ ∎