

12. Праве p и q су паралелне. Одредити праву a паралелну правој q у одређеном смеру и нормалну на правој p .

$p \nmid 2$, $a = ?$, $a \nmid 2$ y обратное число, $a \perp p$; Hence $x \in X \Rightarrow p \nmid 2$

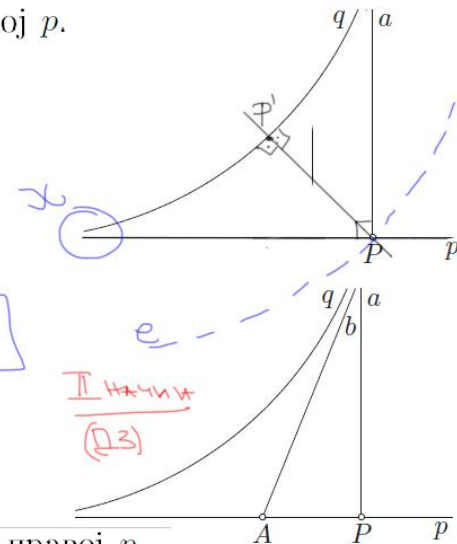
Ако да $a \in X \Rightarrow a \perp p, a \perp p^\perp \Leftrightarrow a \perp Z$ у гласан ереру H оо u до z $p \perp Z$

Лема 1: Означимо $\alpha(p) = \{p\}$. Тврдјење је T' вистинито понављање из T на основу α .
Тврдјење је е-еквивалентно (ПП) са α и важи $\alpha = \alpha(p)$.

Itarice $\{P\} = e \cap p$

Since $\{P\} = e \cap P$
 $p \parallel q, PP' \perp q \Rightarrow \angle P'Pp = \angle(P'P) = \varphi$
 $q \parallel a, PP' \perp q \Rightarrow \angle P'Pa = \angle(PP')$
 $\Rightarrow \angle P'Pp + \angle P'Pa = \angle(P'P) + \angle(PP') = \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{\varphi = \frac{\pi}{4} = 45^\circ}$
 n direction $\Rightarrow PP' = \Pi^{-1}(45^\circ)$

e-elonguatare ca oca 2 u $h = \pi^{-1}(45^\circ)$; $|p| = e \cap p$

$$a; a \in \mathcal{P}, a \perp p$$


13. Праве p и q су хиперпаралелне. Одредити праву a паралелну правој q у одређеном смеру и нормалну на правој p .

II teorema: $p \perp h_2 \Rightarrow \exists!$ zajednička normala za p i h_2 . Here je P_1 proizvoljna, $P_1 \in p$. Ostavimo p_1 : $p_1 \in P_1, p_1 \perp p$

(Ако $p_1 \cap q = \emptyset \Rightarrow \underline{a = p_1}$); Остатком $p_1 \cap q = \{q_1\}$. Ако је e -единакавосте са оном p и бисител $h = p_1 q_1$. Остатком $\{q_2\} = e \cap q$. Ако је $p_2 : p_2 \supset q_2, p_2 \perp p, p_2 \cap p = \{p_2\}$.
Ако је $P = S(p_1 p_2), Q = S(q_1 q_2) \stackrel{①}{\Rightarrow}$ то заједничке нормале $3 \subset p \cup q$. $\checkmark$

Here is t as $t \in P, t \in X_{a,9}$.

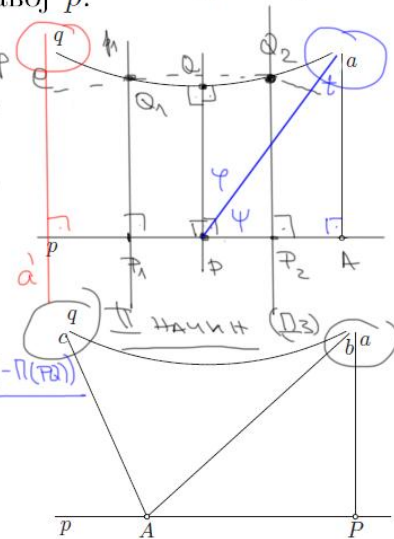
• $PQ \perp z$, $t \parallel z \Rightarrow \angle QPt = \angle P = 90^\circ$

- $a \perp p \Rightarrow PA \perp a$, $\forall a \Rightarrow \uparrow_{\substack{a \\ \perp n}} \quad \& AP \perp = \cap (PA) = \psi$

$$A, A': |PA| = |PA'| = \sqrt{\left(\frac{\pi}{2} - \angle(PQ)\right)}, A, A' \in \mathbb{P}$$

$$a, a' : a \Rightarrow A, a' \Rightarrow A' \quad , \quad a, a' \perp p$$

$$\left\{ \begin{array}{l} PQ \perp P \\ \Rightarrow \psi + \psi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \psi = \frac{\pi}{2} - \varphi = \frac{\pi}{2} - \pi(PQ) \Rightarrow \pi\text{-Dyckings} \\ \pi(PA) \end{array} \right.$$



14. Нека су a, b и c међусобно паралелне праве, али не све у истом смеру. Нека су b' и c' управне из тачке A праве a на правама b и c . Одредити угао између правих b' и c' .

• Ако допустимо да две суседне ивице додирују не другу јуни вет сапаралелне ивице, одлучити их збого АСИМПТОТСКИ ПОЛИГОН са НЕСВОЈСТВЕНИМ ТЕМЕТОМ.

Означимо $b \cap b' = \{B\}$, $c \cap c' = \{C\}$. Нека је $p: p \in A, p \in \mathcal{L}_{b,c}$

$$\bullet AB \perp b, a \parallel b \stackrel{y.n.}{\Rightarrow} \angle AAB = \pi(Ab) = \varphi$$

$$\bullet AB \perp b, p \parallel b \stackrel{y.n.}{\Rightarrow} \angle BAp = \pi(AB)$$

$$\bullet AC \perp c, p \parallel c \stackrel{y.n.}{\Rightarrow} \angle pAC = \pi(AC) = \psi$$

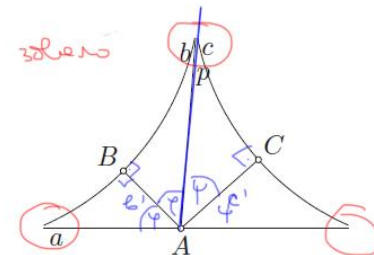
$$\bullet AC \perp c, a \parallel c \stackrel{y.n.}{\Rightarrow} \angle cAa = \pi(AC)$$

$\left. \begin{array}{l} \bullet AB \perp b, a \parallel b \stackrel{y.n.}{\Rightarrow} \angle AAB = \pi(Ab) = \varphi \\ \bullet AB \perp b, p \parallel b \stackrel{y.n.}{\Rightarrow} \angle BAp = \pi(AB) \\ \bullet AC \perp c, p \parallel c \stackrel{y.n.}{\Rightarrow} \angle pAC = \pi(AC) = \psi \\ \bullet AC \perp c, a \parallel c \stackrel{y.n.}{\Rightarrow} \angle cAa = \pi(AC) \end{array} \right\} \Rightarrow_{A \in a}$

$$\pi = \angle AAB + \angle BAp + \angle pAC + \angle cAa = 2\varphi + 2\psi = 2(\varphi + \psi)$$

$$\Rightarrow \varphi + \psi = \pi/2$$

$$\angle(b', c') = \angle BAp + \angle pAC = \varphi + \psi = \frac{\pi}{2}$$



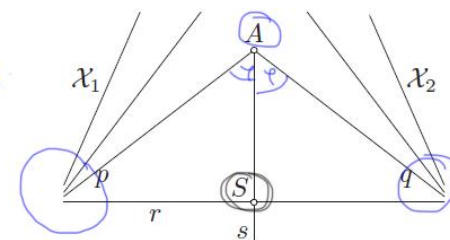
15. Два разна параболичка прамена имају заједничку праву. Доказати.

Нека су $\mathcal{X}_1$ и $\mathcal{X}_2$ два сапараболичке прамена. Нека је A произвољна. Нека је $A_1 \in \mathcal{X}_1, A_2 \in \mathcal{X}_2$.

• Ако A_1, A_2 нису право, онда је то правна права која уклапаје обема праменова.

• Ако A_1, A_2 не нису право $\Rightarrow \angle PA_2 < \pi$

Нека је A_1 дисекториса $\angle PA_2 < \pi$. $\varphi: \angle PA_1 = \angle A_1 A_2 = \varphi < \frac{\pi}{2}$



Како $A_1 \in \mathcal{X}_1 \Rightarrow d = \pi^{-1}(\varphi)$; Означимо $S: S \in \mathcal{L}, AS = d$; Означимо $r: r \in \mathcal{L}, r \perp A_1$

$r \perp A_1, A_1 \in \mathcal{L}, \pi(AS) = \varphi \Rightarrow r \parallel A_1$, аналогно $r \parallel A_2$.

$\varphi: r \in \mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$

$$\pi > \angle PA_2 = \angle PA_1 + \angle A_1 A_2 = 2\varphi$$

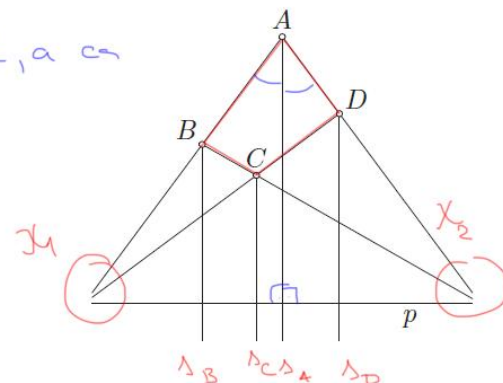
16. Нека су A, B, C, D тачке такве да су редом полуправе AB и DC , односно BC и AD паралелне. Доказати да су симетрале унутрашњих углова код темена A и C и спољашњих углова код темена B и D праве истог прамена.

Нека је $\chi_1 \ni \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}$, $\chi_2 \ni \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}$. Означимо са Δ_A, Δ_C симетрале ун. углова код A и C , а са Δ_B, Δ_D симетрале спољ. углова код B и D .

(15) $\Rightarrow \exists p \in \chi_1, \chi_2$, Δ_A је симетр. $\angle BAD$, $AB \in \chi_1, AD \in \chi_2 \Rightarrow \Delta_A \perp p$.

(15) $\Rightarrow \Delta_A \perp p, \Delta_B \perp p, \Delta_C \perp p, \Delta_D \perp p \Rightarrow p \perp \Delta_A, \Delta_B, \Delta_C, \Delta_D \Rightarrow$

$\Delta_A, \Delta_B, \Delta_C, \Delta_D$ су праве хидеробилној ортотена.



17. Доказати да за три неколинеарне тачке A, B, C важи $\Pi(\frac{BC}{2}) < \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC)$.

Нека су $P = S(AB)$, $Q = S(AC)$; A', B', C' регул ортотенија ортотена из A, B, C на PQ .

(5) $\Delta BPP' \cong \Delta APA' \Rightarrow \angle B'BP = \angle PAA' \Rightarrow \angle B'BA = \angle BAA' \quad (1)$

(5) $\Delta AA'Q \cong \Delta CC'Q \Rightarrow \angle A'AC = \angle C'CA \quad (2)$

(5) $BB' = CC', \angle B'BC' = \frac{\pi}{2} = \angle C'CB' \Rightarrow \square B'BCC'$ Сакеруел; Означимо $A_1 = S(BC)$, $B_1 = S(B'C')$ $\Rightarrow A_1B_1 \perp B'C', BC$

Нека је $B_2: B_2 \parallel A_1B_1$ ит. $\Delta, B_2, A_1 \perp BC$. $BA_1 = \frac{BC}{2}$, $BA_1 \perp A_1B_1$, $B_2 \parallel A_1B_1 \Rightarrow \angle A_1B_2A = \Pi(BA_1) = \Pi(\frac{BC}{2}) \quad (*)$

$\bullet BB', A_1B_1 \perp PQ \Rightarrow BB', A_1B_1$ су хидеробилне
 B_2, A_1B_1 паралелне

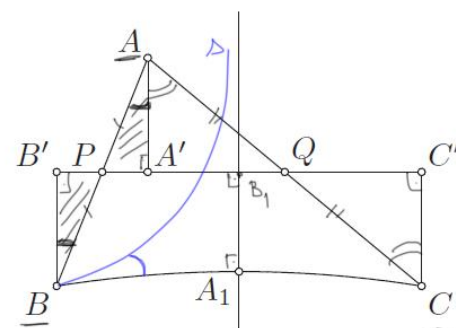
$\Rightarrow \angle B'BA_1 > \angle A_1B_2A = \angle CB_2A$

$\Rightarrow \Pi(\frac{BC}{2}) < \angle B'BA_1 = \angle B'BC$

$\square BB'C'C$ Сакеруел $\Rightarrow \angle B'BC = \angle C'CB$

$\angle B'BC = \frac{1}{2}(\angle B'BC + \angle C'CB) = \frac{1}{2}(\angle B'BA_1 + \angle ABC + \angle C'CA + \angle ACB) \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB + \angle BAA' + \angle A'AC) = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC)$

$\Rightarrow \Pi(\frac{BC}{2}) < \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC)$



18. Ако је у равни Лобачевског дат троугао ABC код кога је $\angle C$ прав, тј. $\angle C = R$, затим $\angle A = \Pi(a')$, $\angle B = \Pi(b')$, $BC = a$ и $AB = c$, доказати да је:

а) $\angle A = \Pi(b) - \Pi(c + b')$; *Нека је $D: B(A, BD), BD = b' \Rightarrow AD = AB + BD = c + b'$. Нека је $r: r \perp AB, r \ni D$*

$BD \perp r$, $\angle CBA = \angle DBP$ догађају $\overline{CB} = \overline{CP}$, $b' = BD \Rightarrow \angle DBP$ је угао $\Pi A P$ за r и $B P$ сј. $B P \parallel r$

Нека је $A_2 \in \mathcal{L}_{r, BP}$

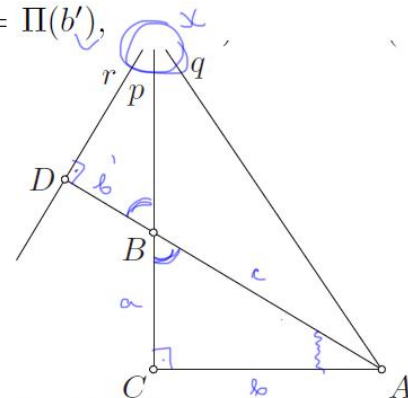
$AD \perp r, r \parallel g \xRightarrow{y.n} \angle DA_2 = \Pi(AD) = \Pi(c + b') \quad (1)$

$AC \perp BP, BP \parallel g \xRightarrow{y.n} \angle CA_2 = \Pi(AC) = \Pi(b) \quad (2)$

*Како AD сече CP у тачки B , а $g \parallel CP \Rightarrow$
 $\angle CA_2 > \angle CAB \Rightarrow$*

$\angle CA_2 - \angle CAB + \angle BA_2 = \angle A + \angle DA_2 \stackrel{(1)}{=} \angle A + \Pi(c + b')$

$\Rightarrow \angle A = \Pi(b) - \Pi(c + b')$



б) $\angle A = \begin{cases} \Pi(c - b') - \Pi(b) & , \text{ за } b' < c \\ 2R - \Pi(b) - \Pi(b' - c) & , \text{ за } b' > c \end{cases}$

$b' < c$

Нека је $D: B(A, D, B), BD = b' \Rightarrow AD = AB - BD = c - b'$

Нека је $r: r \ni D, r \perp AB$.

$\angle B = \angle(\overline{BC}, \overline{BD}) \xRightarrow{y.n} \angle B = \Pi(b')$

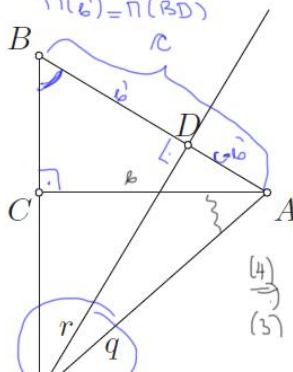
Нека је $A_2: A_2 \in \mathcal{L}_{\overline{BC}, r}$

$r \perp AD, r \parallel g \xRightarrow{y.n} \angle 2AD = \Pi(AD) = \Pi(c - b') \quad (3)$

$AC \perp \overline{BC}, \overline{BC} \parallel g \xRightarrow{y.n} \angle CA_2 = \Pi(AC) = \Pi(b) \quad (4)$

$BD = AC, g \parallel CA \Rightarrow \angle 2AC + \angle CAB = \angle 2AD$

$\Pi(b) + \angle A = \Pi(c - b') \Rightarrow \angle A = \Pi(c - b') - \Pi(b)$



$b' > c$

Нека је $D: B(B, AD), BD = b' \Rightarrow AD = BD - AB = b' - c$

Нека је $r: r \ni D, r \perp BA$.

$\angle(\overline{BC}, \overline{BD}) = \angle B = \Pi(b') = \Pi(BD) \xRightarrow{y.n} \angle B = \Pi(b')$

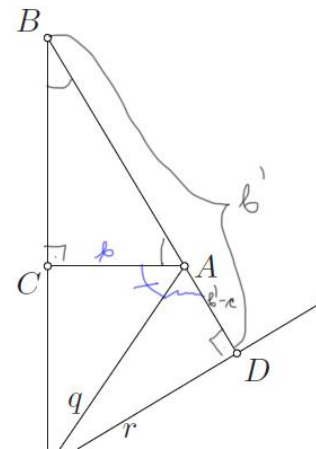
Нека је $A_2 \in \mathcal{L}_{\overline{BC}, r}$

$AD \perp r, g \parallel r \xRightarrow{y.n} \angle 2AD = \Pi(AD) = \Pi(b' - c) \quad (5)$

$AC \perp BC, \overline{BC} \parallel g \xRightarrow{y.n} \angle CA_2 = \Pi(AC) = \Pi(b) \quad (6)$

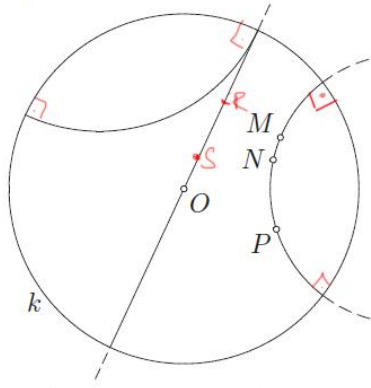
$B(B, AD) \Rightarrow \Pi = \angle BAC + \angle CA_2 + \angle 2AD = \stackrel{(6)}{\angle A} + \Pi(b) + \Pi(b' - c)$

$\Rightarrow \angle A = \Pi - \Pi(b) - \Pi(b' - c)$



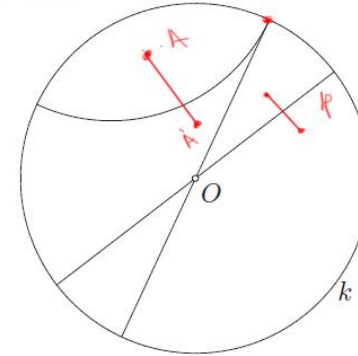
Поенкареов диск модел

Нека је k произвољан круг еуклидске равни и нека је O његов центар. Круг k се назива апсолутом, а његова унутрашњост (отворени диск) представља једну h -раван. Сама апсолута није у оквиру модела, тј. није део h -равни и сматра се да су на њој бесконачно далеке тачке. Тачке тог отвореног диска називамо h -тачкама. Отворене пречнике апсолуте, односно отворене тетиве круга k које садрже његов центар, као и отворене кружне лукове кругова који су управни на апсолути, чије су крајње тачке на апсолути, називамо h -правима. Дакле, h -праве су делови еуклидских правих ако садрже центар апсолуте, односно делови еуклидских кругова који су управни на апсолути, ако не садрже центар апсолуте.



Ако две разне h -тачке припадају h -правој која је део еуклидске праве, онда еуклидска дуж која их спаја представља уједно и h -дуж. Ако две разне h -тачке M, P припадају h -правој која је део еуклидског круга, онда краћи лук $\widehat{MP}$ тог круга представља h -дуж MP .

h -праве су h -паралелне ако се додирују у тачки која припада апсолути.
 h -праве су h -хиперпаралелне ако су дисјунктне и нису h -паралелне



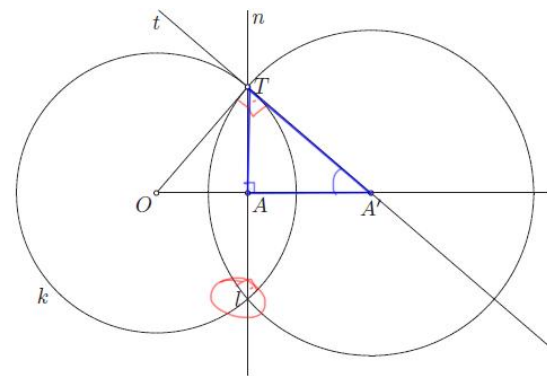
h -рефлексија (симетрија)

- Ако је h -права p део еуклидске праве (означимо је такође са p), дефинишимо h -рефлексију $\mathcal{S}_p^h$ као рестрикцију еуклидске осне рефлексије $\mathcal{S}_p$ на тачке h -равни, односно на унутрашњост апсолуте k
- Ако је h -права p део еуклидског круга (означимо га такође са p), дефинишимо h -рефлексију $\mathcal{S}_p^h$ као рестрикцију еуклидске инверзије ψ_p на тачке h -равни, односно на унутрашњост апсолуте k .

ПОМОЋНА КОНСТРУКЦИЈА h -СИМЕТРАЛЕ h -ПРАВЕ OA , где је O -центар апсолуте:

Нека је $n: n \neq A, n \perp OA$ у еуклидеском смислу ортогонална, тј. апсолута $= \{T\}$ у е.с. Нека је t -тангентна у T на апсолуту у е.с. Означимо $t \cap OA = \{A'\}$ у е.с. $\bar{l}$ -криву у е.с. $\bar{l}(A', AT)$; l - h -симетрале h -праве OA од. је она гео еуклидеској кривој $\bar{l}$ који пролази h -правом. $\square$. $\Psi_e(A) = 0$

$$\begin{array}{c} \triangle OTA' \sim \triangle TAA' \\ \uparrow \\ \text{у е.с.} \\ \dots \end{array} \Rightarrow \frac{AA'}{AT} = \frac{AT}{AO} \Rightarrow AO \cdot AA' = AT^2 \Rightarrow \Psi_e(A) = 0 \quad \square$$



1. У Поенкареовом диск моделу хиперболичке равни дате су h -права a и h -тачка A . Одредити h -праву n која садржи тачку A и управна је на праву a .

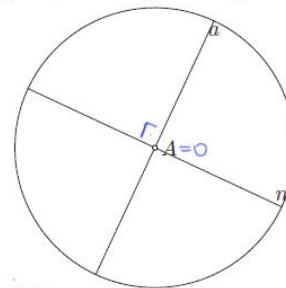
1° $A=O$: 1° $a \neq A$: $\Rightarrow a \neq O \Rightarrow a$ - h -права која је гео еуклидеска права
 $n \neq A \Rightarrow n \neq O \Rightarrow n$ — $||$ — $||$ — $||$ — $||$ —

$\Rightarrow n$ - h -права која је гео еуклидеска од. садржи центар апсолуте O и
 је ортогонална на a у е.с.

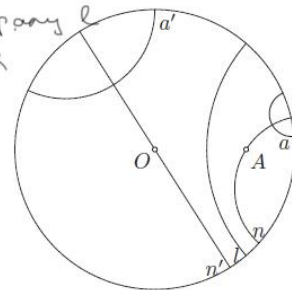
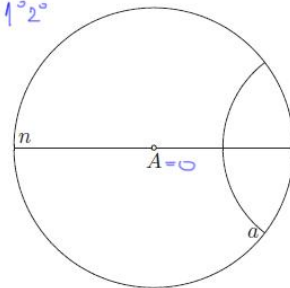
1° $a \neq A \Rightarrow a \neq O \Rightarrow a$ - h -права која је гео еуклидеска крива $\Rightarrow n$ - h -права која је
 еуклидеска права која мора да садржи центар у еуклидеском смислу крива није гео h -права a
 (у е.с. права је „ $\bar{l}$ крива ако садржи неки центар“)

2° $A \neq O$: Пронађемо h -симетралу h -праве OA (n_k). $\Psi_e(A) = 0$; h -симетрала Ψ_e је h -права a' у h -праву a' $\Rightarrow n'$ - h -права која садржи O и ортогонална је на h -праву a' .
 h -симетрала у односу на h -симетралу l пресликава h -праву n' у ортогоналну
 h -праву n . ($n' \neq O, n' \perp a' \Rightarrow n \neq A, n \perp a$) $\blacksquare$

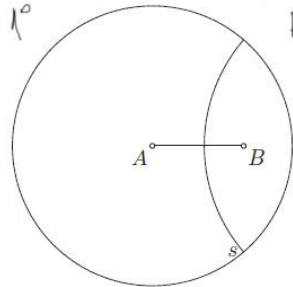
1°1°



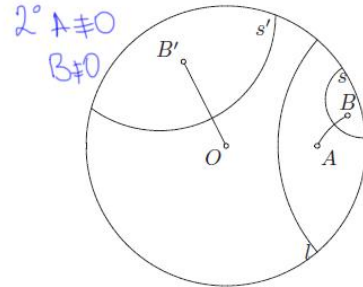
1°2°



2. У Поенкареовом диск моделу дате су h -тачке A и B . Одредити h -симетралу дужи AB .

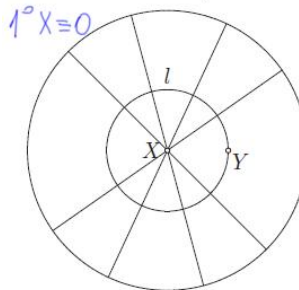


$A \equiv O$ ($\vee B \equiv O$)
 s - h -симетрала
 h -дужи OB (hK).

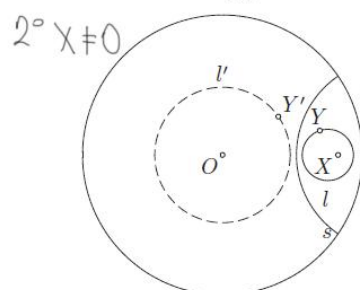


O је центар диска.
 Нека је l - h -симетрала h -дужи OA . (hK) h -симетрија у односу на h -симетралу l , h -тачке AB се појављују симетрично у односу на h -симетралу l .
 $\Rightarrow s'$ - h -симетрала h -дужи OB'
 h -симетрија у односу на h -симетралу l пресиче s' у s - h -симетралу h -дужи AB .

3. У Поенкареовом диск моделу дате су тачке X и Y . Конструисати h -круг l са центром у тачки X који садржи тачку Y .



Правим h -круг l је
 круг у еуклидском
 смислу од $l(O, OX)$.



Нека је s - h -симетрала h -дужи OX (hK). h -симетрија у односу на h -симетралу s се изводи X и слика у h -симетрији O је O' .
 $\Rightarrow l'$ - h -круг са центром у O који садржи h -тачку Y' .
 h -симетрија у односу на h -симетралу s , h -круг l' се слика у h -круг l са центром у h -тачку X који садржи h -тачку Y .

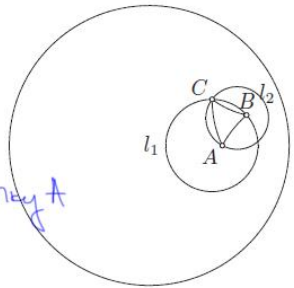
*Инверзија у односу на круги центар круга се НЕ ПРЕСЛИКАВА у центар круга.

НАПОМЕНА: X -није центар круга у еук. смислу
 h -ЦЕНТАР КРУГА $\neq$ ЦЕНТАР КРУГА у E . (осим када је $X \equiv O$)

4. У Поенкареовом диск моделу хиперболичке равни дате су h -тачке A и B . Конструисати h -тачку C такву да је h -троугао ABC правилан. ($\sum \angle < \pi$)

↑
ЈЕДНАКОКРАК (СВЕ СТРАНИЦЕ ЈЕДНАКЕ)

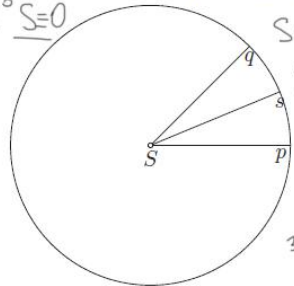
③ $\Rightarrow h$ -крж l_1 са центром у A који садржи B и h -крж l_2 са центром у h -тачки B који садржи h -тачку A
 $l_1 \cap l_2 = \{C\}$, h -крж l_1, l_2 се секу у h -тачки C (враћена тачка).



5. У Поенкареовом диск моделу дате су две праве које се секу. Одредити h -бисектрису угла којег одређују.

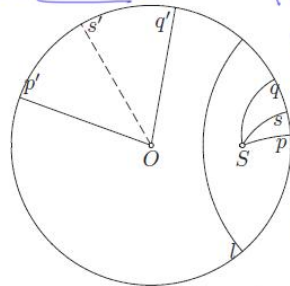
Нека је $p \cap q = \{S\}$, h -тачка S

1° $S \neq O$



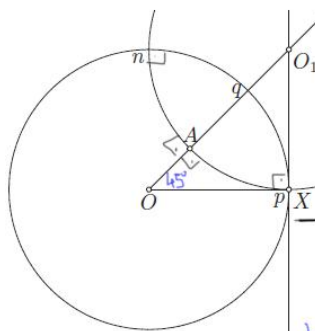
$S \in p, q \Rightarrow p, q$ h -праве које су
 делови еуклидсових права
 $\Rightarrow S$ - h бисектриса је
 бисектриса у
 еуклидсовом смислу
 за p и q .

2° $S \neq O$



Нека је l h -симултане h -гуж OS (пк). h -симултан у односу
 на h -симултану l h -праве p и q се секу у h -тачки
 $p' \cap q' = \{S'\}$, $\psi_l(S) = O$, $1^\circ \Rightarrow S'$ h -бисектриса $p' \cap q'$ h -права
 h -симултан у односу на h -симултану l пресиче h -праву l у
 враћено h -бисектрису h -права p и q .

6. У Поенкареовом диск моделу конструисати h -дуж мере $\Pi^{-1}(\frac{R}{2})$.



Нека су p и q h -праве које су делови еуклидсових права и $p, q \ni O$ - центар диска и $\angle pOq = 45^\circ$

Означимо еуклидсов пресек h -права p и q са X ; Y е.с. констр. тангенту t у X на h -праву q

Означимо l h -симултану h -праву p и q са O_1 ; Означимо l еуклидсову h -праву q са O_1 и X

$O_1X \perp OX \Rightarrow l \perp h$ -праву $q \Rightarrow l$ h -дуж мере $\Pi^{-1}(\frac{R}{2})$ је у h -равни h -праву q

$\{X\} = p \cap q \Rightarrow h$ -праве p и q ПАРАЛЕННЕ

$q \ni O_1 \Rightarrow q$ е.с. $q \perp l \Rightarrow h$ -праве q и l су ОРТОГОНАЛНЕ

t Означимо $p \cap q = \{A\}$ - h -тачка: $OA \perp p$, $OP \parallel p \Rightarrow \angle AOP = \Pi(OA)$ и $\angle pOq = \Pi(OA) \Rightarrow OA = \Pi^{-1}(\frac{R}{2})$