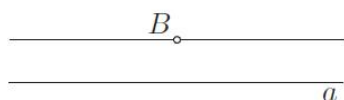


Хиперболичка геометрија

AKSIOMATI

групе аксиома (инциденције, распореда, подударности, непрекидности)

Аксиома (Плејфер). *Постоје права a и тачка B која јој не припада такве да у њима одређеној равни не постоји више од једне праве која садржи тачку B , а с правом a нема заједничких тачака.*

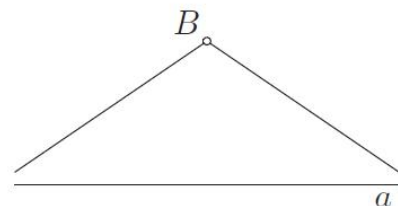


$$\sum \angle \Delta = 180^\circ$$

AKSIOMATI

групе аксиома (инциденције, распореда, подударности, непрекидности)

Аксиома (Лобачевски). *Постоје права a и тачка B која јој не припада такве да у њима одређеној равни постоји више од једне праве која садржи тачку B , а с правом a нема заједничких тачака.*



$$\sum \angle \Delta < 180^\circ \rightarrow \sum \angle \square < 360^\circ$$

$$\delta \equiv \text{DEFECT} = 180^\circ - \alpha - \beta - \gamma, \alpha, \beta, \gamma - \text{углови } \Delta ABC$$

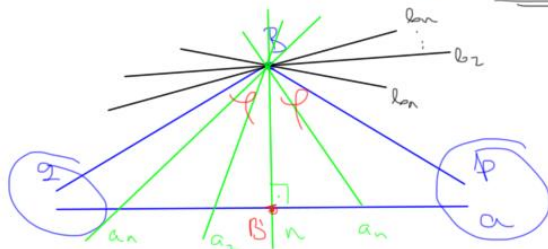
* НЕ ПОСТОЈИ СЛИЧНОСТ $\rightarrow$ ЈОШ ЈЕДАН СТАР ПОДУДАРНОСТИ: УУУ

СТАВ: Што је троугао већи, то је збир углова троугла мањи.

2. p: $k_2 \parallel a$ ПАРАЛЕЛНЕ у одређеној смеру ($\exists_2$) (ГРАНИЧНЕ ПРАВЕ)

$b_1, b_2, \dots, b_n \parallel a$ ХИПЕРПАРАЛЕЛНЕ са a („ ∞ “ метода)

$a_1, a_2, \dots, a_n$ секу a
 $B': BB' \perp a, R' \in a$ $\angle(BB', Bp) = \gamma = \angle(B_2, BB') < \frac{\pi}{2}$, γ - УГАО ПАРАЛЕЛНОСТИ (УВЕК ОШТАР)



Ставови апсолутне геометрије:

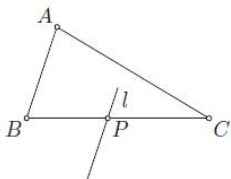
- ставови о подударности троуглова
- постојање јединствене праве једне равни која садржи дату тачку и управна је на датој правој
- постојање јединствене праве у простору која садржи дату тачку и управна је на датој равни
- збир две странеце троугла већи је од треће
- спољашњи угао у троуглу већи је од било ког несуседног унутрашњег угла
- наспрам једнаких странаца троугла налазе се једнаки углови
- наспрам веће странеце троугла налази се већи угао
- итд...

Ставови хиперболичке геометрије: (+ садржи акси. теореме)

- Збир углова троугла је мањи од 180° .
- Збир углова простог, равног четвороугла је мањи 360°
- Постоји права у равни нормална на једном краку оштрог угла која не сече његов други крак.
- Централни угао је већи од двоструког одговарајућег периферијског угла.
- Постоји троугао око којег се не може описати круг.
- итд...

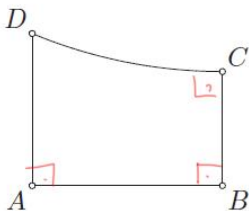
$$\sum \angle \Delta \leq 180^\circ$$

Аксиома (Паш). Нека су A, B, C три неколинеарне тачке и l права равни ABC која не садржи тачку A и сече праву BC у тачки P таквој да важи $B(B, P, C)$. Тада она сече праву CA у тачки Q таквој да важи $B(C, Q, A)$ или сече праву AB у тачки R таквој да важи $B(A, R, B)$.

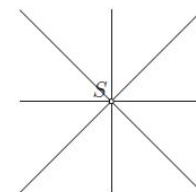


Теорема Две праве у равни су хиперпаралелне ако и само ако постоји права n која је управна на обема. Ако таква права постоји, она је јединствена.

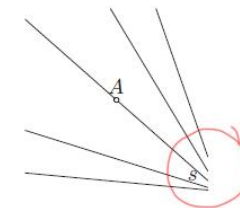
Дефиниција Нека је $ABCD$ четвороугао који има три права угла. Овакав четвороугао назива се *Ламбертовим четвороуглом*. Ако су углови $\angle DAB, \angle ABC, \angle BCD$ прави, онда су стране AB, BC основне стране Ламбертовог четвороугла $ABCD$.



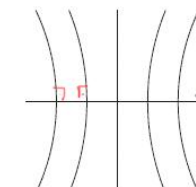
Дефиниција 1. Скуп свих правих једне равни које садрже неку тачку S те равни чине *елиптички прамен*, тј. *прамен конјурентних правих*. Тачка S је *средиште* тог прамена.



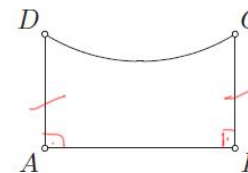
2. Скуп свих правих једне равни које су паралелне некој полуправој As те равни, заједно са правом која садржи ту полуправу, чине *параболички прамен*, тј. *прамен паралелних правих* (у истом смеру).



3. Скуп свих правих једне равни које су управне на некој правој s те равни чине *хиперболички прамен*, тј. *прамен хиперпаралелних правих* које имају исту заједничку нормалу s . Права s је *основица* тог прамена.



Дефиниција Нека је $ABCD$ четвороугао у равни такав да важи $\angle DAB = \angle ABC = 90^\circ$ и $AD = BC$. Овакав четвороугао назива се *Сакеријевим четвороуглом*. Страна AB назива се *основицом* Сакеријевог четвороугла, страна CD назива се *противосновицом*, а подударне стране AD, BC називају се *бочним странама* Сакеријевог четвороугла.



1. Праве одређене основицом и противосновицом Сакеријевог четвороугла су хиперпаралелне. Доказати.

? $AB \parallel CD$? $\Rightarrow$ $M = S(AB), N = S(CD)$

$M = S(AB) \Rightarrow AM = MB$

$\square ABCD$ $\Rightarrow \angle DAB = \frac{\pi}{2} = \angle CBA$

$AD = BC$

$\Rightarrow \triangle AMD \cong \triangle BMC \Rightarrow \angle AMD = \angle BMC \quad (1)$

$\angle ADM = \angle BCM \quad (2)$

$DM = MC \quad (3)$

$(3) DM = MC$

$MN = MN$

$N = S(CD) \Rightarrow NC = ND$

$\Rightarrow \triangle DMN \cong \triangle CMN \Rightarrow \angle MDN = \angle MCN \quad (4)$

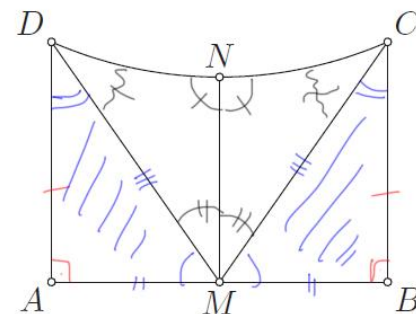
$\angle DMN = \angle CMN \quad (5)$

$\angle DNM = \angle CNM \quad (6)$

$N = S(CD) \Rightarrow B(D, N, C) \Rightarrow \pi = \angle DNC = \angle DNM + \angle CNM \stackrel{(6)}{=} 2 \cdot \angle DNM \Rightarrow \angle DNM = \angle CNM = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{MN \perp CD}$

$M = S(AB) \Rightarrow B(A, M, B) \Rightarrow \pi = \angle AMB = \angle AMD + \angle DMN + \angle NMC + \angle CMB \stackrel{(5)}{=} 2 \cdot (\angle AMD + \angle DMN) \stackrel{(1)}{=} 2 \cdot \angle AMN \Rightarrow \angle AMN = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow MN \perp AM$ $\Rightarrow \boxed{MN \perp AB}$ $\Rightarrow MN$ је заједно нормална за AB и $CD \Rightarrow$ основица AB и противосновица CD хиперпаралелне



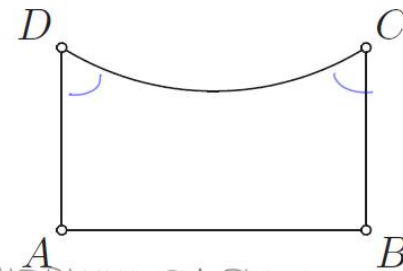
2. Углови на противосновици Сакеријевог четвороугла су подударни и оштри. Доказати.

$\angle ADC \stackrel{(1)}{=} \angle ADM + \angle MDN \stackrel{(2)}{=} \angle BCM + \angle MCN = \angle BCD \stackrel{(3)}{\Rightarrow}$ $\Rightarrow$ углови на противосновици су подударни

$\Rightarrow$ Збир углова у $\square$ је мањи од 2π

$\Rightarrow 2\pi > \angle ABC + \angle BCD + \angle CDA + \angle DAB = 2\pi + 2 \cdot \angle ADC \Rightarrow \angle ADC < \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ углови на противосновици су оштри.

$\frac{\pi}{2} \leftarrow \square ABCD$ је $\rightarrow \frac{\pi}{2}$ Сакеријев



3. Доказати да су два Ламбертова четвороугла $ABCD$ и $A'B'C'D'$ са оштрим угловима D и D' подударна ако је:

а) $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ (у) $\square ABCD, \square A'B'C'D'$ су Ламбертови $\frac{\pi}{2} = \angle DAB = \angle ABC = \angle BCD = \angle CDA = \angle A'B'D' = \angle A'B'C' = \angle B'C'D'$

$$\left. \begin{array}{l} AB = A'B' \\ \angle A = \angle A' \\ BC = B'C' \end{array} \right\} \xrightarrow{Cyc} \triangle ABC \cong \triangle A'B'C' \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \angle CAB = \angle C'A'B' = \varphi \quad (1) \\ \angle ACB = \angle A'C'B' = \psi \quad (2) \\ AC = A'C' \quad (3) \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \angle DAC = \angle D'A'C' \\ \angle DCA = \angle D'C'A' \end{array} \right\} \xrightarrow{Cyc} \triangle ADC \cong \triangle A'D'C' \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} AD = A'D' \quad (4) \\ CD = C'D' \quad (5) \\ \angle ADC = \angle A'D'C' \quad (6) \end{array} \right.$$

б) $AD = A'D'$, $BC = B'C'$ (а) - јер су Ламбертови

$$\xrightarrow{MC} \left\{ \begin{array}{l} AB \neq A'B' \vee BC \neq B'C' \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{AB \neq A'B'} \text{ јер } AB > A'B' \Rightarrow \exists A'', B(A'', B), \boxed{A''B = A'B'}$$

Нека је $n: n \perp AB, n \nsubseteq A''$; $AD, n, BC \perp AB \Rightarrow AD, n, BC$ су хиперпаралелне праве $\Rightarrow$
 AD, n, BC немогу пресектих линија

$$n \cap AB = \{A''\}, B(A'', B)$$

$$\angle DAB = \angle A''BC = \angle BCD' \Rightarrow \square A''BCD' \text{ Ламбертов}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} AB = A'B' \\ BC = B'C' \end{array} \right\} \Rightarrow \square A''BCD' \cong \square A'B'C'D' \Rightarrow A''D' = A'D' = AD \Rightarrow \square AA''D'D \text{ Картезијев (х)}$$

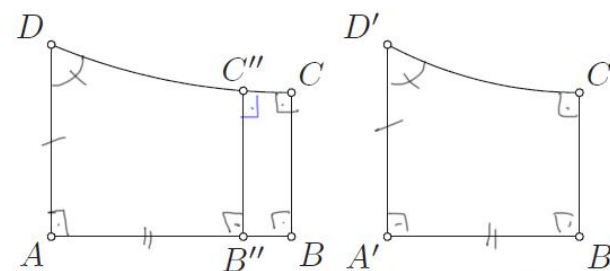
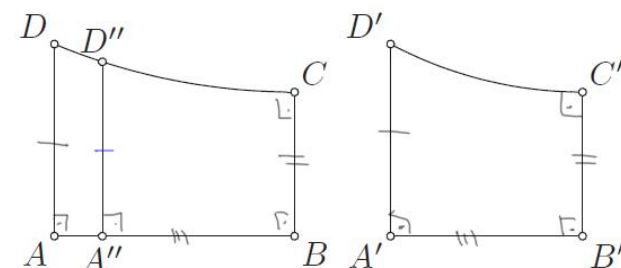
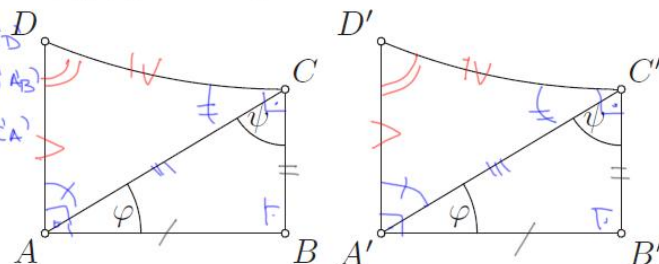
$$\begin{aligned} & \text{а) } \angle D < \frac{\pi}{2}, \text{ (хх)} \Rightarrow \angle A'D'C < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \angle A'D'D + \angle A'D'C < \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi \Rightarrow \square ABCD \cong \square A'B'C'D' \\ & \text{д) } AD = A'D', \angle D = \angle D' \end{aligned}$$

СТАВ: Два четвороугла $\square ABCD$ и $\square A'B'C'D'$ су подударна ако је:

$$\xrightarrow{MC} \left\{ \begin{array}{l} AB \neq A'B' \text{ јер } AB > A'B' \Rightarrow \exists B'': B(A'', B) \text{ } A''B = A'B' \end{array} \right.$$

Нека је $n: n \ni B'', n \perp AB$; $AD, n, BC \perp AB \Rightarrow$ хиперпаралелне + $B(A'', B) \Rightarrow n \cap CD = \{C''\}, B(D, C'', C)$ (немогу пресек)

$$\left\{ \begin{array}{l} \angle CDA = \angle C'D'A' \\ DA = D'A' \\ \angle DAB = \angle D'A'B' = \frac{\pi}{2} \\ AB = A'B' \\ \angle ABC = \angle A'B'C' = \frac{\pi}{2} \end{array} \right\} \xrightarrow{СТАВ} \square A''B''C''D' \cong \square A'B'C'D' \Rightarrow \angle B''C''D = \angle B'C'D \Rightarrow B(D, C'', C) \Rightarrow \angle B''C''C = \pi - \angle B''C''D = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$



$$\begin{aligned} & \square B''BCC' : 2\pi > \angle B''BC + \angle BCC' + \angle CC'B'' + \angle C''B''B = 4 \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi \\ & \Rightarrow \square ABCD \cong \square A'B'C'D' \end{aligned}$$

4. Доказати да су два Сакеријева четвороугла $ABCD$ и $A'B'C'D'$ са основама AB и $A'B'$ подударна ако је: а) $AB = A'B'$, $BC = B'C'$;
 б) $BC = B'C'$, $CD = C'D'$ (Доказати)

Претпоставимо да је $AB \neq A'B'$ и $BC \neq B'C'$.
 а) $\Rightarrow AD, BC$ се не секу + $B(A, B', B) \Rightarrow n \cap CD = \{X\}$, $B(D, X, C)$; Означимо $C'' : C'' \in n, D, C'' = AB'', AD = B''C''$

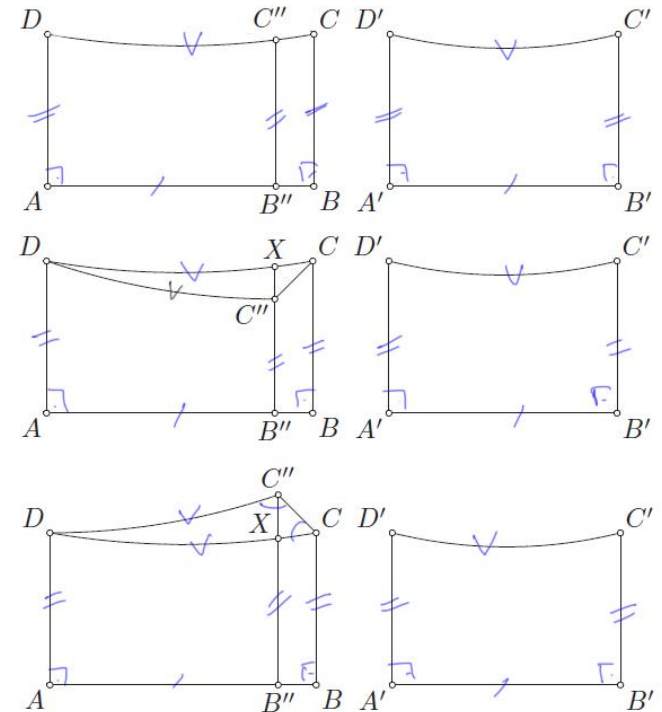
Како је $\angle DAB = \angle A'B''C'' = \frac{\pi}{2}$
 $AD = B''C''$
 $\angle C''B''B = \angle B''BC = \frac{\pi}{2}$
 $B''C'' = AD = BC$
 $\Rightarrow \square AB''C''D$ Сакеријево
 $\Rightarrow \square B''BCC''$ — | —

1° $X = C''$:
 $\angle DC''B'' < \frac{\pi}{2}$, $\angle B''C''C < \frac{\pi}{2}$
 $B(D, C'', C) \Rightarrow \pi = \angle DC''C = \angle DC''B'' + \angle B''C''C < 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$ —

2° $C'' \in \text{int } \square ABCD$:
 $\angle DC''B'' < \frac{\pi}{2}$, $\angle B''C''C < \frac{\pi}{2}$ (1)
 $\square AB''C''D \cong \square A'B''C'D' \Rightarrow C''D = C'D' \stackrel{3}{=} CD \Rightarrow \triangle DC''C$ једнакоугаоно
 $\angle DC''C = \angle DCC'' < \frac{\pi}{2}$ (2)
 $\sum \angle DC''C < \pi$
 $2\pi = \angle DC''C + \angle DC''B'' + \angle B''C''C \stackrel{(1)}{<} \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$ —

3° $C'' \in \text{ext } \square ABCD$:
 $\square AB''C''D \cong \square A'B''C'D' \Rightarrow C''D = C'D' \stackrel{3}{=} CD \Rightarrow \triangle DC''C$ једнакоугаоно
 $\Rightarrow \angle DC''C = \angle DCC''$ (3)
 $\square B''BCC''$ Сакеријево $\Rightarrow \angle BCC'' = \angle CC''B''$ (4)
 $\angle DC''C > \angle B''C''C = \angle BCC'' > \angle DCC''$ — (3)
 $B(A, B', B) \Rightarrow D, C, B''C''$ $C'' \in \text{ext } \square ABCD$

$\square AB''C''D, \square A'B''C'D'$ Сакеријеви + $AB'' = A'B''$
 $B''C'' = BC = AD = B'C'$
 $\square AB''C''D \cong \square A'B''C'D'$ подударни (*)



$\Rightarrow \square ABCD \cong \square A'B'C'D'$

5. Ако су тачке P и Q средишта страница AB и AC троугла ABC , доказати да су праве BC и PQ међу собом хиперпаралелне.

Означимо још једна хорзала из A, B, C редом на PQ са A', B', C' .

$$P = S(AB) \Rightarrow AP = PB$$

$$\angle BPA' = \angle APA' \text{ (унакрсно)}$$

$$\angle AA'P = \frac{\pi}{2} = \angle BB'P$$

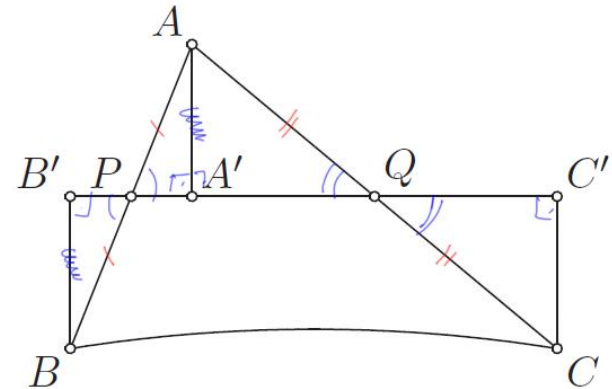
$$\left. \begin{array}{l} \text{уу} \\ \angle BPA' = \angle APA' \\ \angle AA'P = \frac{\pi}{2} = \angle BB'P \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle BB'P \cong \triangle AA'P \Rightarrow \boxed{AA' = BB'}$$

$$\Rightarrow \underline{BB' = CC'} (*)$$

$$\text{Аналогно, } \triangle AA'Q \cong \triangle CC'Q \Rightarrow \boxed{AA' = CC'}$$

$$\angle BB'C' = \frac{\pi}{2} = \angle CC'B' \\ BB' = CC'$$

$\Rightarrow \square BB'C'C'$ Сакеруев $\xrightarrow{①}$ основне BC' и уводивосновне BC хиперпаралелне; $P, Q \in BC'$
 $\Rightarrow PQ \parallel_{\text{h}} BC$



6. Ако су A, B, C три разне тачке неке праве l и O тачка изван те праве, доказати да средишта A', B', C' дужи OA, OB, OC не припадају једној правој.

$A, B, C \in l$; дуо $B(A, B, C)$. Означимо са A_1, B_1, C_1 још једна хорзала из A, B, C редом на l .

$\Rightarrow \exists p$ -правне, $A', B', C' \in p$

$\Rightarrow \square ABB_1A_1, \square BCC_1B_1$ Сакеруеви $\xrightarrow{①} \exists!$ зај. хорзала основне и уводивосновне

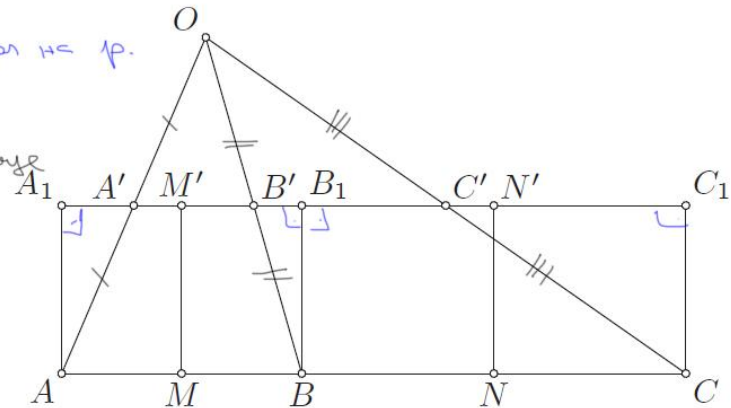
Сакеруеви неов која је одређена њиховим средишњима

$$\text{Означимо } M = S(AB), M' = S(A_1B_1) \Rightarrow MM' \perp AB, A_1B_1 \Rightarrow \boxed{MM' \perp p, l} \quad (1)$$

$$- \text{ } \perp \text{ } N = S(BC), N' = S(B_1C_1) \Rightarrow NN' \perp BC, B_1C_1 \Rightarrow \boxed{NN' \perp p, l} \quad (2)$$

$$B(A, B, C) \Rightarrow B(A_1, B_1, C_1), M = S(AB), N = S(BC) \Rightarrow B(M, B, N) \text{ и аналогно } B(M', B_1, N').$$

$$\square MNN'M': \frac{2\pi}{\sum \angle} \nearrow \angle M'MN + \angle MNN' + \angle NN'M' + \angle N'M'M \stackrel{①}{=} \frac{\pi}{2} \cdot 4 = 2\pi \quad \searrow \Rightarrow A', B', C' \text{ нису јачке једне праве.}$$



7. Доказати да је у Сакеријевом четвороуглу противосновица већа од основице.

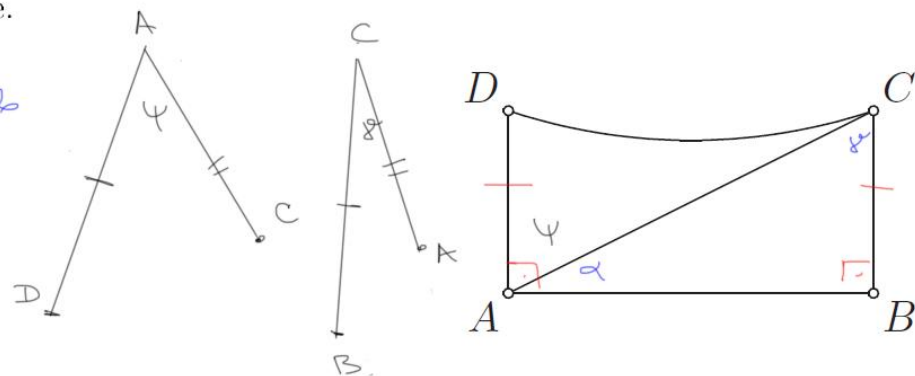
Означимо $\angle CAB = \alpha$, $\angle ACB = \beta \Rightarrow \angle DAC = \angle DAB - \angle CAB = \frac{\pi}{2} - \alpha$
 $\psi'' \quad \psi' \quad \psi \leftarrow \square ABCD \text{ Сакеријев}$

$\triangle ABC$: $\alpha + \beta + \frac{\pi}{2} < \pi \Rightarrow \alpha + \beta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \beta < \frac{\pi}{2} - \alpha$

$\psi = \angle DAC = \frac{\pi}{2} - \alpha > \beta = \angle ACB$
 $AD = BC$
 $AC = AC$

$\Rightarrow DC > AB$

НАСРМ ВЕЋЕГ УГЛА У $\triangle$ ЈЕ ВЕЋА СТРАНИЦА.



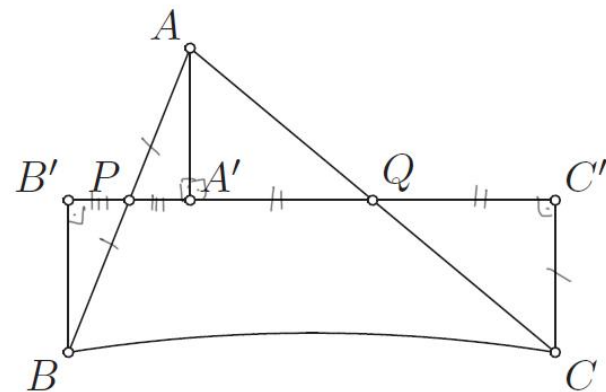
8. Ако су P и Q средишта страница AB и AC троугла ABC , доказати да је $PQ < \frac{1}{2}BC$.

Означе и извођења као у (5) $\Rightarrow \square B'BC'$ Сакеријев четвороугао

(7) $\Rightarrow$ основница $<$ противосновица
 $B'C'$ BC

(5) $\triangle BB'P \cong \triangle AA'P \Rightarrow B'P = A'P$
 $\triangle AA'Q \cong \triangle CC'Q \Rightarrow A'Q = C'Q$
 $\Rightarrow B'C' = B'P + PA' + A'Q + QC' = 2(PA' + A'Q) = 2PQ$

Дакле, $B'C' = 2PQ \Rightarrow PQ = \frac{B'C'}{2} < \frac{BC}{2}$



9. Нека је A_1 средиште хипотенузе BC правоуглог троугла ABC . Доказати да је дуж AA_1 мања од половине хипотенузе.

? $AA_1 < \frac{1}{2} BC$?

ПНС $AA_1 \geq \frac{1}{2} BC$:

$\triangle ACA_1$: $AA_1 \geq \frac{BC}{2} = A_1C \Rightarrow$

$\angle ACA_1 \geq \angle CA_1A$ (1)
 $\parallel$
 $\angle ACB$

$\triangle AA_1B$: $AA_1 \geq \frac{BC}{2} = A_1B$

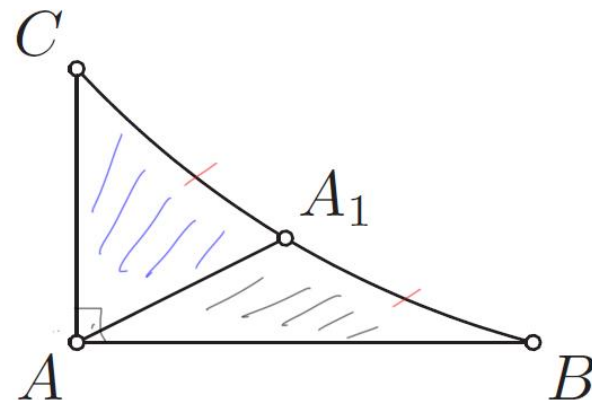
$\Rightarrow \angle ABA_1 \geq \angle A_1AB$ (2)
 $\parallel$
 $\angle ABC$

$\frac{\pi}{2} = \angle BAC = \angle BAA_1 + \angle A_1AC \leq \angle ABC + \angle ACB$ (*)

(2)

$\triangle ABC$: $\pi \geq \angle ABC + \angle ACB + \angle BAC \geq \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi \Leftrightarrow AA_1 < \frac{1}{2} BC$

НАСПРАМ ВЕЋЕ СТРАНИЦЕ У $\triangle$ ЈЕ ВЕЋИ УГЛО



10. Ако је висина еквидистанте већа од нуле тада та еквидистанта није права. Доказати.

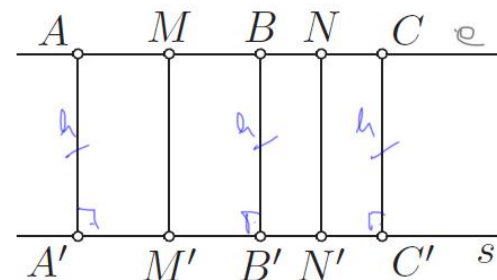
Означимо e -еквидистанту, h -висину, s -осу.
 -еквидистанта је скуп тачака које се налазе на растојању h од осе s .

ПНС e -еквидистанта је права $\Rightarrow \exists A, B, C \in e, B(A, B, C)$

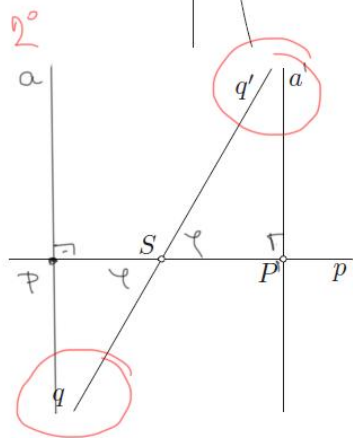
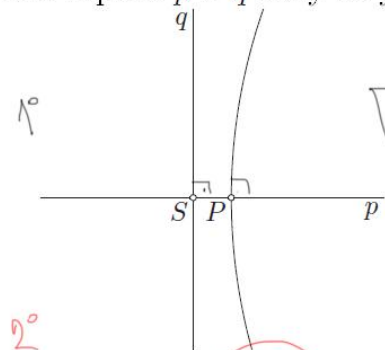
Означимо са A', B', C' пројекције тачака из A, B, C на осу $s \Rightarrow AA' = BB' = CC' = h$

$\Rightarrow \square A'B'BA, \square B'C'CB$ Сатерјеви $\Rightarrow \angle ABB' < \frac{\pi}{2}, \angle B'BC < \frac{\pi}{2}$ (*)
 (2) угао не уравниоштите Сатерјеви неупоредителни

$A, B, C \in e$ -права $\Rightarrow \overset{B(A, B, C)}{\pi = \angle ABC = \angle ABB' + \angle B'BC} < \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi \Leftrightarrow$ еквидистанта, $h > 0$ НИЈЕ ПРАВА.



11. Праве p и q секу се у тачки S . Одредити праву a паралелну правој q у одређеном смеру и нормалну на правој p .



$$p \cap q = \{S\} \quad a = ? \quad a \parallel q, a \perp p$$

$$\boxed{p \perp q}$$

Како $a \perp p$

$\Rightarrow a \parallel q \Rightarrow$ НЕ ПОСТОЈИ ПРАВА a ПАРАЛЕЛНА СА q И $\perp$ НА p У СМ. $p \perp q$.

$$\boxed{p \not\perp q}$$

Остало је ОУТАР УГАО између p и q са φ , тј. $\varphi = \angle(p, q) < \frac{\pi}{2}$

$$\text{Пошто } a \perp p, a \parallel q \Rightarrow \Pi(d) = \varphi$$

$$\stackrel{\Pi\text{-дуге}}{\Rightarrow} d = \Pi^{-1}(\varphi), \quad P, P' \in p \quad \|SP\| = \|SP'\| = d.$$

$$P: \|SP\| = d = \Pi^{-1}(\varphi), \quad P \in p \quad (\text{Авеното } P')$$

$$\Rightarrow a: a \ni P, a \perp p \quad (\text{Авеното } a: a' \ni P', a' \perp p)$$

Деф. (Ф-ја ШВАРЦСКОГ)

Ф-ја $\Pi: \mathbb{R}^+ \mapsto [0, \frac{\pi}{2})$ сг.

$\Pi(d) = \varphi$ је ф-ја која дужици d додељује угао φ мере $\Pi(d)$ (где је d мера растојања између B до праве A).

(ОУТАР) φ
 $\varphi: BA \perp a, A \in a; d = \|BA\| \Rightarrow \Pi(d) = \varphi \leftarrow$ угао пада-
 ланости
 за праве a и $b, b \ni B, a \ni A, a \perp BA$

• Π -је БИЈЕКЦИЈА ($\Rightarrow \Pi^{-1}$ ПОЗНАТО)

