

8. Доказати да је права одређена средиштима страница AC и BD тетраедра $ABCD$ уједно и њихова заједничка нормала ако и само ако је $AB = CD$ и $AD = BC$.

$$RS \perp AC, BD \Leftrightarrow AB = CD, AD = BC$$

Нека су M, N, P, Q, R, S средина страница AB, CD, AD, BC, AC, BD .

$$\boxed{\Leftarrow:} \quad AB = CD, AD = BC$$

$$\left. \begin{array}{l} AB = CD \\ AD = BC \\ BD = BD \end{array} \right\} \text{CCC} \Rightarrow \Delta ABD \cong \Delta CBD \Rightarrow \angle ADB = \angle CBD$$

$$\frac{AD = BC}{\angle ADB = \angle CBD} \left\{ \text{CJC} \Rightarrow \Delta ASD \cong \Delta BSC \Rightarrow AS = SC \Rightarrow \Delta ASC \text{ једнакокрак} (*)$$

$$S = S(BD) \Rightarrow SD = SB$$

Како једнакокраки троугаоник ASD и BSC из центра S до PQ је иста линија и висина из S на AC . Како $R = S(AC) \Rightarrow SR$ вис. $\Rightarrow SR \perp AC$ из S у $\Delta ASC \Rightarrow SR$ висина из $S \Rightarrow \boxed{SR \perp AC}$

Аналогно, из $\Delta RDB \Rightarrow \boxed{RS \perp BD}$

$$\boxed{\Rightarrow:} \quad RS \perp AC, RS \perp BD$$

$$P = S(AD), M = S(AB) \Rightarrow PM \text{ ср. лин. } \Delta ABD \Rightarrow PM \parallel BD$$

$$\text{Аналогно, } QN \parallel BD \Rightarrow QN \parallel BD$$

$$\text{Аналогно, } PN \parallel AC \Rightarrow PN \parallel AC$$

$$MQ \parallel AC \Rightarrow MQ \parallel AC$$

$$RS \perp MP, MQ, QN, PN \Rightarrow RS \perp \pi, \pi \ni M, N, P, Q \Rightarrow RS \perp MN$$

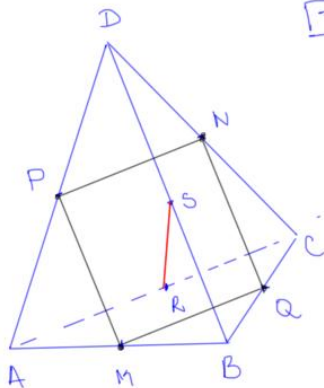
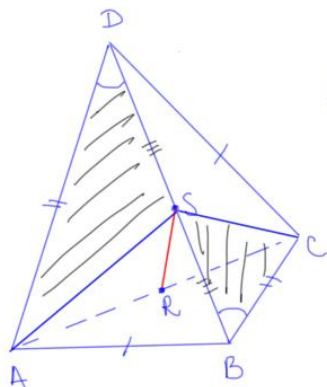
$$\Rightarrow RS \perp PQ \Rightarrow$$

$$\boxed{AD = BC}$$

$$\boxed{AB = CD}$$

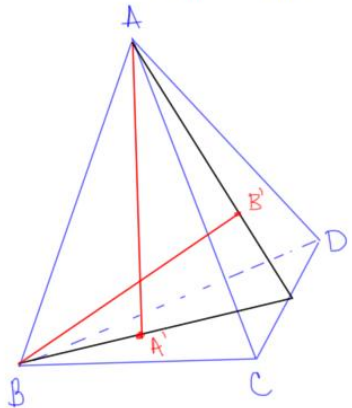
$$\Rightarrow PM, QN \parallel BD + \text{...} \Rightarrow RS \perp BD \Rightarrow RS \perp PM, QN \quad (1)$$

$$\Rightarrow PN, MQ \parallel AC + \text{...} \Rightarrow RS \perp AC \Rightarrow RS \perp PN, MQ \quad (2)$$



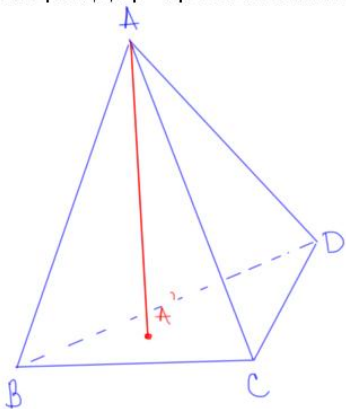
Деф. Тетраедар $ABCD$ је ортогоналан ако важи $AB \perp CD, AC \perp BD, AD \perp BC$.

9. Висине AA' и BB' тетраедра $ABCD$ се секу ако и само ако је $AB \perp CD$. Доказати.



$$\begin{aligned}
 & AA' \cap BB' \neq \emptyset \stackrel{?}{\Leftrightarrow} AB \perp CD \quad AA' \perp (BCD), BB' \perp (ACD) \\
 \Rightarrow & \underbrace{AA' \cap BB' \neq \emptyset}_{\Rightarrow \exists \pi \supset AA', BB'} \Rightarrow \pi \supset AB \\
 & \left. \begin{aligned} AA' \perp (BCD) &\Rightarrow AA' \perp CD \\ BB' \perp (ACD) &\Rightarrow BB' \perp CD \end{aligned} \right\} \Rightarrow CD \perp (AA'B) \Rightarrow \underbrace{CD \perp \pi}_{\pi} \Rightarrow \underline{CD \perp AB} \\
 \Leftarrow & \underbrace{AB \perp CD}_{\substack{AA' \perp (BCD) \Rightarrow AA' \perp CD \\ BB' \perp (ACD) \Rightarrow BB' \perp CD}} \Rightarrow \left. \begin{aligned} & CD \perp AA', AB \text{ и } CD \perp (AA'B) \\ & BB' \perp (ACD) \Rightarrow BB' \perp CD \end{aligned} \right\} \Rightarrow CD \perp (ABB') \Rightarrow (AA'B) \parallel (ABB') \Rightarrow \pi \ni A, A', B, B' \\
 \Rightarrow & 1^\circ \boxed{AA' \cap BB' \neq \emptyset} \\
 & 2^\circ AA' \parallel BB' \nRightarrow (\text{пн. } AA' \parallel BB', AA' \perp (BCD), BB' \perp (ACD) \Rightarrow \overset{CD}{(BCD)} \parallel \overset{AB}{(ACD)} \Rightarrow A, B, C, D \text{ колинеарне тачке } \})
 \end{aligned}$$

10. Доказати да подножја висина из темена тетраедра представљају ортоцентре наспрамних пљосни ако и само ако је тетраедар ортогоналан.



$$\begin{aligned}
 & \text{Означимо са } A' \text{ пројекцију нормале из } A \text{ на равнину } (BCD) \text{ тетраедра } ABCD. \text{ и означимо ортоцентр } \\
 & \triangle BCD \text{ са } H_{BCD}. \quad AA' \perp (BCD) \\
 & A' = H_{BCD} \stackrel{?}{\Leftrightarrow} AB \perp CD, AC \perp BD, AD \perp BC \\
 \Rightarrow & \left. \begin{aligned} A' = H_{BCD} &\Rightarrow BA' \perp CD \\ AA' \perp (BCD) &\Rightarrow AA' \perp CD \end{aligned} \right\} \Rightarrow CD \perp BA', AA' \text{ и } CD \perp (ABA') \Rightarrow \underline{CD \perp AB} \\
 & \text{Аналогно, } AC \perp BD, AD \perp BC \Rightarrow \text{тетраедар је ортогоналан.} \\
 \Leftarrow & \underbrace{AB \perp CD, AC \perp BD, AD \perp BC}_{\substack{AB \perp CD \\ AA' \perp (BCD) \Rightarrow AA' \perp CD}} \Rightarrow \left. \begin{aligned} & CD \perp (AA'B) \Rightarrow \underline{CD \perp BA'} \Rightarrow BA' \text{ висина из } B \text{ у } \triangle BCD \\ & AA' \perp (BCD) \Rightarrow AA' \perp CD \end{aligned} \right\} \\
 & \text{Аналогно, } CA' \text{ и } DA' \text{ висине из } C \text{ и } D \text{ респективно у } \triangle BCD \Rightarrow BA' \cap CA' \cap DA' = \{A'\} \text{ је ортоцентр } \triangle BCD.
 \end{aligned}$$

ИЗОМЕТРИЈСКЕ ТРАНСФОРМАЦИЈЕ ПРОСТОРА

Дефиниција 45. Нека је S простор. Пресликавање $\mathcal{I} : S \rightarrow S$, такво да за сваки пар тачака (A, B) простора S важи $(A, B) \cong (\mathcal{I}(A), \mathcal{I}(B))$, називамо изометријском трансформацијом (изометријом) простора S .

Свака изометрија простора се може записати као композиција највише 4 РАВАНСКЕ РЕФЛЕКСИЈЕ.
Врсте ИЗОМЕТРИЈА ПРОСТОРА: ДИРЕКТНЕ И ИНДИРЕКТНЕ.

Уколико композицију имам ПАРАН БРОЈ РАВАНСКИХ РЕФ. онда је изометрија ДИРЕКТНА, а уколико композицију имам НЕПАРАН БРОЈ РАВАНСКИХ РЕФЛЕКСИЈА онда је изометрија ИНДИРЕКТНА.

1° Нека су $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{X} \Leftrightarrow \exists \delta \in \mathcal{X} : S_\alpha \circ S_\beta \circ S_\gamma = S_\delta$.

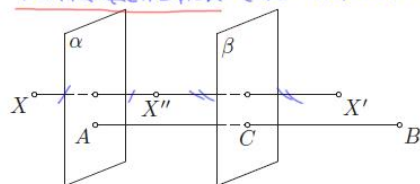
ДИРЕКТНЕ:

$\mathcal{I} = S_\beta \circ S_\alpha$: 1° $\alpha = \beta$: $\mathcal{I} = S_\alpha \circ S_\alpha = S_\alpha^2 = E = Id$ КОИЦИДЕНЦИЈА (СВЕ ТАЧКЕ Ф.Т.)

2° $\alpha \parallel \beta$: $\mathcal{I} = S_\beta \circ S_\alpha = \mathcal{I}_{\alpha, \beta} = \mathcal{I}_{\beta, \alpha}$

$\alpha \perp \beta$

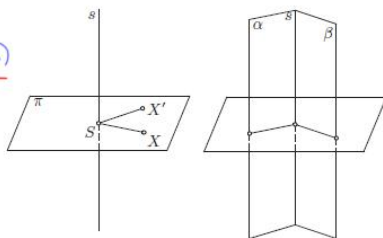
ТРАНСЛАЦИЈА
(НЕКА Ф.Т.)



3° $\alpha \cap \beta = \gamma$: $\mathcal{I} = S_\beta \circ S_\alpha = R_{\gamma, \alpha, \beta}$

РОТАЦИЈА

(дефиниција 1 су ф.т.)



4° $\alpha \perp \beta$:

$\mathcal{I} = R_{\gamma, \alpha, \beta} = R_{\gamma, \pi} = S_\gamma$

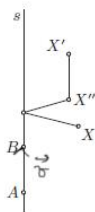
ОСНА СИМЕТРИЈА

$\mathcal{I} = S_\gamma \circ S_\alpha \circ S_\beta \circ S_\alpha$: 4° $\mathcal{I} = \mathcal{Z}_{\gamma, \omega, \vec{v}}$ ОСНА СИМЕТРИЈА
ОСНА СИМЕТРИЈА $\vec{v} \parallel \gamma$
ВЕКТОР ТРАНСЛАЦИЈЕ

ЗАВОДНО КРЕТАЊЕ

$\mathcal{Z}_{\gamma, \omega, \vec{v}} = R_{\gamma, \omega} \circ \mathcal{I}_{\vec{v}} = \mathcal{I}_{\vec{v}} \circ R_{\gamma, \omega}$

• $\omega = \pi$: $\mathcal{Z}_{\gamma, \pi, \vec{v}}$ ЗАВОДНО ПОСУБРЕТАЈ



ИНДИРЕКТНЕ:

$\mathcal{I} = S_\pi$

1° S_π РАВАНСКА РЕФЛЕКСИЈА

$S_\pi^2 = Id$ (инволюција)

(дефиниција 1 су ф.т.)

$\mathcal{I} = S_\gamma \circ S_\beta \circ S_\alpha$: $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{X} \Leftrightarrow \mathcal{I} = S_\pi, \exists \pi \in \mathcal{X}$

2° $\mathcal{I} = \mathcal{C}_{\pi, \vec{v}}$ КОИЦИДЕНЦИЈА РЕФЛЕКСИЈА

$\mathcal{C}_{\pi, \vec{v}} = \mathcal{I}_{\vec{v}} \circ S_\pi = S_\pi \circ \mathcal{I}_{\vec{v}}$ $\vec{v} \parallel \pi$
(НЕКА Ф.Т.)

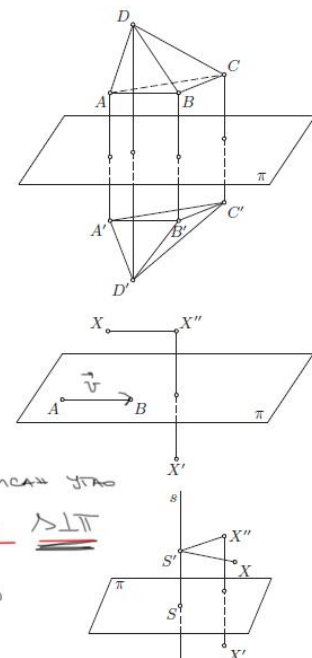
3° $\mathcal{I} = R_{\gamma, \omega, \pi}$, γ -ОСНА, ω -ОБРАТНА π ОСНА РОТАЦИОНА РЕФЛЕКСИЈА $\gamma \perp \pi$

$R_{\gamma, \omega, \pi} = R_{\gamma, \omega} \circ S_\pi = S_\pi \circ R_{\gamma, \omega}$

• $R_{\gamma, \omega, \pi} = S_\beta \circ S_\alpha = S_\gamma$, $\alpha, \beta \perp \pi$

Осцилација $\alpha \perp \beta$: $\mathcal{I} = S_\alpha$ КЕНТРАЛНА СИМЕТРИЈА

ТОТРАНСЛАЦИЈА: Нека је $\mathcal{I}$ произвољна изометрија простора. $\mathcal{I} \circ S_\pi \circ \mathcal{I}^{-1} = S_{\mathcal{I}(\pi)}$

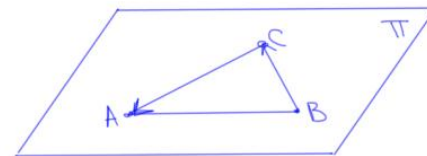


1. Ако су A, B, C три тачке равни π , доказати да важи $\mathcal{G}_{\pi, \overrightarrow{CA}} \circ \mathcal{G}_{\pi, \overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{G}_{\pi, \overrightarrow{AB}} = \mathcal{S}_{\pi}$.

$$\mathcal{I} = \mathcal{G}_{\pi, \overrightarrow{CA}} \circ \mathcal{G}_{\pi, \overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{G}_{\pi, \overrightarrow{AB}} \stackrel{?}{=} \mathcal{S}_{\pi}$$

$$\mathcal{G}_{\pi, \overrightarrow{CA}} = \mathcal{S}_{\pi} \circ \mathcal{I}_{\overrightarrow{CA}} = \mathcal{I}_{\overrightarrow{CA}} \circ \mathcal{S}_{\pi}$$

$$\mathcal{I} = \underbrace{\mathcal{S}_{\pi} \circ \mathcal{I}_{\overrightarrow{CA}} \circ \mathcal{I}_{\overrightarrow{BC}}}_{\text{Id}} \circ \mathcal{I}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{S}_{\pi} \circ \mathcal{I}_{\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}} \circ \mathcal{I}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{S}_{\pi} \circ \mathcal{I}_{\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB}} = \mathcal{S}_{\pi} \circ \mathcal{I}_{\overrightarrow{0}} = \mathcal{S}_{\pi} \stackrel{\text{Id}}{=} \mathcal{S}_{\pi}$$



2. Доказати $\mathcal{S}_{\pi} \circ \mathcal{S}_O = \mathcal{S}_O \circ \mathcal{S}_{\pi} \Leftrightarrow O \in \pi$.

Нека су α, β, γ : $\alpha \cap \beta \cap \gamma = \{O\}$, $\alpha \perp \beta$, $\alpha \perp \gamma$, $\beta \perp \gamma \Rightarrow \mathcal{S}_O = \mathcal{S}_{\gamma} \circ \mathcal{S}_{\beta} \circ \mathcal{S}_{\alpha}$

$$\mathcal{S}_{\pi} \circ \mathcal{S}_O = \mathcal{S}_O \circ \mathcal{S}_{\pi} \stackrel{?}{=} \mathcal{S}_O \Leftrightarrow \mathcal{S}_{\pi} \circ \mathcal{S}_O \circ \mathcal{S}_{\pi}^{-1} = \mathcal{S}_O \Leftrightarrow \mathcal{S}_{\pi} \circ \underbrace{\mathcal{S}_{\gamma} \circ \mathcal{S}_{\beta} \circ \mathcal{S}_{\alpha}}_{\mathcal{S}_{\pi}^{-1} \circ \mathcal{S}_{\pi}} \circ \mathcal{S}_{\pi}^{-1} = \mathcal{S}_O \Leftrightarrow \underbrace{\mathcal{S}_{\pi} \circ \mathcal{S}_{\gamma} \circ \mathcal{S}_{\pi}^{-1}}_{\mathcal{S}_{\pi} \circ \mathcal{S}_{\beta} \circ \mathcal{S}_{\pi}^{-1}} \circ \underbrace{\mathcal{S}_{\pi} \circ \mathcal{S}_{\alpha} \circ \mathcal{S}_{\pi}^{-1}}_{\mathcal{S}_{\pi} \circ \mathcal{S}_{\alpha} \circ \mathcal{S}_{\pi}^{-1}} = \mathcal{S}_O \stackrel{+107}{\Leftrightarrow}$$

$$\mathcal{S}_{\mathcal{S}_{\pi}(\gamma)} \circ \mathcal{S}_{\mathcal{S}_{\pi}(\beta)} \circ \mathcal{S}_{\mathcal{S}_{\pi}(\alpha)} = \mathcal{S}_O \stackrel{?}{\Leftrightarrow}$$

$\alpha \perp \beta$, $\beta \perp \gamma$, $\alpha \perp \gamma \Rightarrow$ $\mathcal{S}_{\pi}(\alpha) \perp \mathcal{S}_{\pi}(\beta)$, $\mathcal{S}_{\pi}(\beta) \perp \mathcal{S}_{\pi}(\gamma)$, $\mathcal{S}_{\pi}(\alpha) \perp \mathcal{S}_{\pi}(\gamma)$ $\Rightarrow \circledast$

$\{O\} = \alpha \cap \beta \cap \gamma \Rightarrow \mathcal{S}_{\pi}(O) \in \mathcal{S}_{\pi}(\alpha) \cap \mathcal{S}_{\pi}(\beta) \cap \mathcal{S}_{\pi}(\gamma)$

$$\mathcal{S}_{\mathcal{S}_{\pi}(O)} = \mathcal{S}_O \Leftrightarrow \mathcal{S}_{\pi}(O) = O \Leftrightarrow O \in \pi.$$

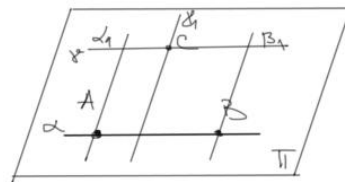
МАТЕМАТИКА И ЛОГИКА:

$$S_A = \left\{ \begin{array}{l} \alpha: \alpha \ni A, B, \alpha \perp \pi \\ \alpha_1: \alpha_1 \perp \pi, \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow S_A = S_\pi \circ S_\alpha \circ S_{\alpha_1}$$
$$S_B: \left\{ \begin{array}{l} \alpha \\ B_1: B_1 \Rightarrow B, B_1 \perp \alpha, \\ \alpha \perp \Pi, \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow B_1 \perp \Pi, \alpha \Rightarrow \int_B \overset{\curvearrowright}{\int_{\Pi} \alpha} \overset{\curvearrowright}{\int_{B_1}}$$
$$S_C: \left\{ \begin{array}{l} \pi: \pi \supset C, \pi \perp \pi, \pi \parallel \pi \\ \pi_1: \pi_1 \supset C, \pi_1 \perp \pi, \pi_1 \Rightarrow \pi_1 \perp \pi, \pi_1 \parallel \pi_1 \end{array} \right\} \Rightarrow S_C = S_\pi = S_{\pi_1} = S_{\pi_2}$$
[illegible]

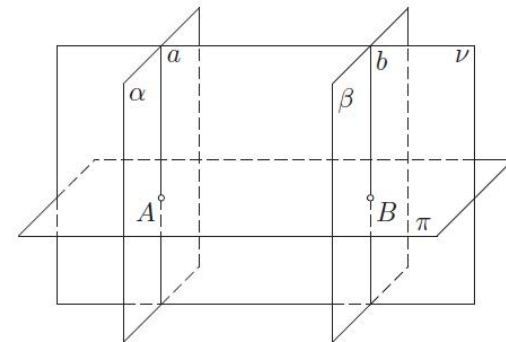
Индуктивна хипотеза:

$$n=2k-1: \quad \Gamma = S_{A_1} \circ S_{A_2} \circ \dots \circ S_{A_{2k-1}} = S_{A'}$$

КОРАК ИИД УКДИЗЕ!

$$n=2k+1 \quad \therefore \int = \underbrace{\int_{A_1} \int_{A_2} \dots \int_{A_{2k-1}}}_{\text{---}} \int_{A_{2k}} \int_{A_{2k+1}}^{n \times} = \int_{A_1} \int_{A_{2k}} \int_{A_{2k+1}}^{Bn} = \int_{A_1}$$


• Here $j \in \pi \ni A, B, C$.



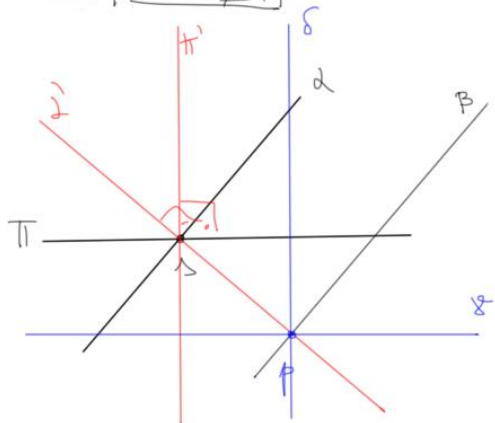
4. Одредити тип изометрије $T_{\overrightarrow{PP'}} \circ S_\pi$.

$$T = T_{\overrightarrow{PP'}} \circ S_\pi = S_P \circ S_\alpha \circ S_\pi, \quad \alpha \parallel \beta, \quad \overrightarrow{PP'} \perp \alpha, \beta, \quad \frac{\|\overrightarrow{PP'}\|}{2} = d(\alpha, \beta)$$

$$\boxed{1^\circ} \quad \alpha, \beta, \pi \in \mathcal{X} \stackrel{10}{\Leftrightarrow} (\alpha \parallel \beta \parallel \pi), \exists \gamma \in \mathcal{X} \text{ др. } T = S_\beta \circ S_\alpha \circ S_\pi = \underline{S_\gamma} \quad \text{ПАРАЛЕНА РЕФЛЕКСИЈА}$$

$$\left. \begin{array}{l} PP' \perp \alpha, \beta \\ \alpha \parallel \beta \parallel \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{PP'} \perp \pi}$$

$$\boxed{2^\circ} \quad \boxed{\overrightarrow{PP'} \not\perp \pi} \Rightarrow \alpha \not\parallel \pi \Rightarrow \alpha \cap \pi = \{s\}$$



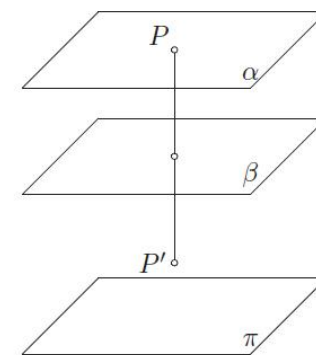
$$T = S_\beta \circ S_\alpha \circ S_\pi = S_\beta \circ \underline{R_{s,2\varphi(\pi,\alpha)}} =$$

$$= \underline{S_\beta \circ S_\alpha \circ S_{\pi'}} = S_P \circ S_{\pi'} = S_\gamma \circ S_\delta \circ S_{\pi'} = \underline{\overrightarrow{\delta \parallel \pi'}}$$

$$= S_\gamma \circ \underline{T_{\overrightarrow{\delta}}}} = \underline{S_{\gamma, \overrightarrow{\delta}}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{\delta} \perp \delta, \pi' \\ \gamma \perp \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\overrightarrow{\delta} \parallel \gamma}$$

КЛИЗЉУЋА РЕФЛЕКСИЈА



$$\text{БИРАМО: } \pi', \alpha': \pi' \cap \alpha' = \{s\} \\ \varphi(\pi, \alpha) = \varphi(\pi', \alpha')$$

$$\alpha' \perp \alpha, \pi' \perp \pi \\ \alpha' \perp \alpha, \alpha \parallel \beta \Rightarrow \underline{\alpha' \perp \beta}$$

$$\alpha' \perp \beta \Rightarrow \alpha' \cap \beta = \{p\}$$

$$R_{p, 2 \cdot \frac{\pi}{2}} = S_p$$

$$\bullet \gamma, \delta: \gamma \perp \delta, \gamma \cap \delta = \{p\} \\ \underline{\underline{\delta \parallel \pi'}} \Rightarrow \underline{\underline{\gamma \perp \pi'}}$$

5. Доказати да је композиција три раванске рефлексije којима су основе одређене бочним пљоснима тристране призме $ABCA'B'C'$ клизајућа рефлексija тог простора.

Означимо $\alpha: \alpha \ni A, A', B, B'$, $\beta: \beta \ni B, B', C, C'$, $\gamma: \gamma \ni A, A', C, C'$

$$\gamma = S_\gamma \circ S_\beta \circ S_\alpha = ? = G$$

$$AA' \parallel BB' \parallel CC', \gamma \ni AA', CC' \Rightarrow \boxed{BB' \parallel \gamma}$$

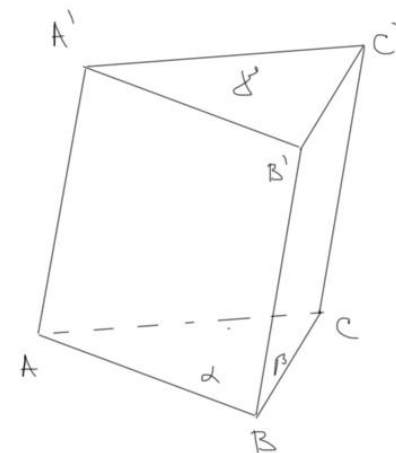
$$\gamma = S_\gamma \circ S_\beta \circ S_\alpha = S_\gamma \circ R_{BB', 2} \varphi(\alpha, \beta) =$$

$$\angle \cap \beta = \{BB'\}$$

$$= S_\gamma \circ S_\delta \circ S_\gamma = T_{\vec{PP'}} \circ S_\gamma \stackrel{(4.3.48)}{=} G_{\pi, \vec{v}}, \underline{\underline{\vec{v} \parallel \pi}}$$

$$\left. \begin{array}{l} m. \vec{PP'} \perp \gamma \\ \vec{PP'} \perp \delta, \gamma \end{array} \right\} \Rightarrow \delta \parallel \gamma \Leftrightarrow \delta \cap \gamma = \{BB'\} \Rightarrow \boxed{\vec{PP'} \perp \gamma}$$

$$\begin{aligned} \cdot \delta, \gamma: \delta \cap \gamma &= \{BB'\} \\ \varphi(\alpha, \beta) &= \varphi(\gamma, \delta) \\ \underline{\underline{\delta \parallel \gamma}} \end{aligned}$$



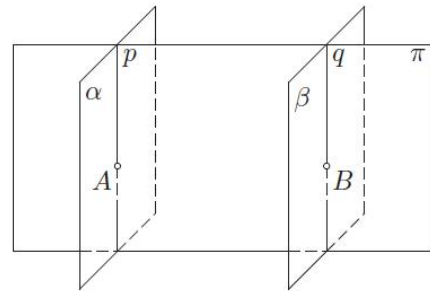
6. Одредити тип и компоненте изометрије која представља композицију двеју осних симетрија $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q$ еуклидског простора, у зависности од узајамног положаја правих p и q .

$$J = S_p \circ S_2$$

$J = S_P \circ S_Z$
 $1^\circ \underline{P=Z} : J = S_P \circ S_P = S_P^2 = \underbrace{S_\alpha \circ S_\beta \circ S_P \circ S_\alpha}_{\substack{2 \cap \beta = \{P\}, 2 \perp \beta \\ \downarrow \text{Id}}} = S_Z^2 = \text{Id} = \varepsilon$ конмутација
 $2^\circ \underline{P \neq Z} : J = S_P \circ S_Z = S_Z \circ S_P$

2° $p \parallel q$: $\Rightarrow \exists \pi \supset p, q$, $\perp$: $\perp \supset p, \perp \perp \pi$, β : $\beta \supset q, \beta \perp \pi \Rightarrow \perp \parallel \beta$

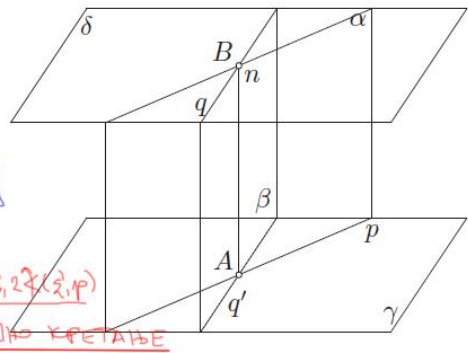
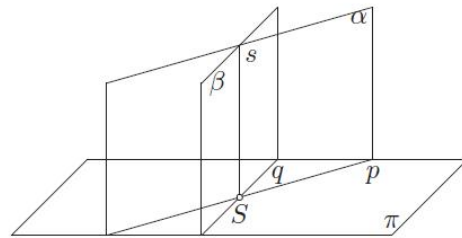
$$J = S_P = S_Q = S_Q \circ S_P \circ S_P = S_Q \circ S_P = J_{2, \overline{BA}}$$



3° $\text{png} = \{S\}$: $\Rightarrow \exists \pi \supset p, 2$; $\alpha : \alpha \supset p, \alpha \perp \pi$; $\beta : \beta \supset q, \beta \perp \pi$

$$\begin{aligned} & \alpha \perp \pi : \beta : \alpha \perp \pi, \beta \perp \pi \\ & \alpha \cap \beta = \{S\} \Rightarrow \alpha \cap \beta \ni S \Rightarrow \alpha \cap \beta = \{S\} \Rightarrow \boxed{\alpha \perp \pi} \\ & \alpha, \beta \perp \pi \end{aligned}$$

$$J = S_P \circ S_Z = S_Z \circ S_P = S_Z \circ S_P = \mathcal{R}_{1,2} \cdot \mathcal{F}(P, 2) = \mathcal{R}_{1,2} \cdot \mathcal{F}(2, P)$$



4 p2 су микропазие праве $\Rightarrow \exists!$, задржане поглед АВ

$$\alpha: \alpha \supset AB, p; \beta: \beta \supset \alpha, AB; \gamma: \gamma \supset p, \gamma \perp AB; \delta: \delta \supset \alpha, \delta \perp AB \Rightarrow AB \perp \delta, \gamma \Rightarrow \boxed{\delta \parallel \gamma}$$

[illegible]

Def 2.48 $\gamma \rightarrow \Sigma'$: $\Sigma' \Vdash \gamma, \Sigma' \in \gamma, \Sigma' \models A$

ЗАВОЈНО КРЕТАЊЕ

7. Нека су OP, OQ, OR три међусобно нормалне дужи простора. Доказати да је композиција $Z_{\overrightarrow{OR}} \circ Z_{\overrightarrow{OQ}} \circ Z_{\overrightarrow{OP}}$ транслација.

$$J = Z_{\overrightarrow{OR}} \circ Z_{\overrightarrow{OQ}} \circ Z_{\overrightarrow{OP}} \stackrel{?}{=} \tau$$

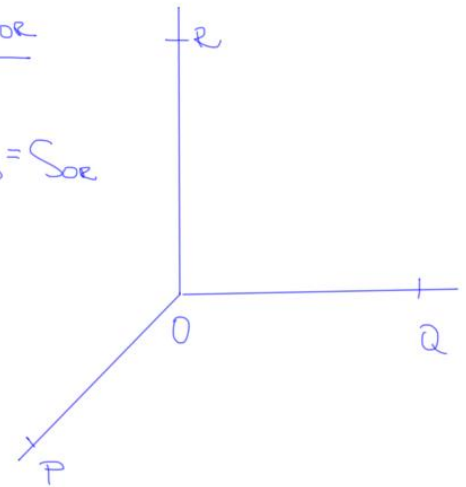
$$J = S_{\overrightarrow{OR}} \circ J_{\overrightarrow{OR}} \circ J_{\overrightarrow{OQ}} \circ S_{\overrightarrow{OQ}} \circ S_{\overrightarrow{OP}} \circ J_{\overrightarrow{OP}} =$$

$$= S_{\overrightarrow{OR}} \circ J_{\overrightarrow{OR} + \overrightarrow{OQ}} \circ S_{\overrightarrow{OQ}} \circ S_{\overrightarrow{OP}} \circ J_{\overrightarrow{OP}} =$$

$$= S_{\overrightarrow{OR}} \circ J_{\overrightarrow{v}} \circ S_{\overrightarrow{OR}} \circ J_{\overrightarrow{OP}} = J_{\overrightarrow{S_{OR}(\overrightarrow{v})}} \circ J_{\overrightarrow{OP}} = J_{\overrightarrow{S_{OR}(\overrightarrow{v}) + \overrightarrow{OP}}}$$

$$Z_{\overrightarrow{OR}} = Z_{\overrightarrow{OR}, \overrightarrow{OR}, \pi} = J_{\overrightarrow{OR}, \pi} \circ J_{\overrightarrow{OR}} = S_{\overrightarrow{OR}} \circ J_{\overrightarrow{OR}} = J_{\overrightarrow{OR}} \circ S_{\overrightarrow{OR}}$$

$$\circledast S_{\overrightarrow{OQ}} \circ S_{\overrightarrow{OP}} = S_{\overrightarrow{ROQ}} \circ S_{\overrightarrow{POQ}} \circ S_{\overrightarrow{POQ}} \circ S_{\overrightarrow{POR}} = S_{\overrightarrow{ROQ}} \circ S_{\overrightarrow{POR}} = S_{\overrightarrow{OR}}$$



Т.О. ТРАНСЛАЦИЈА:
(ТРАНСЛАЦИЈА) $J \circ J_{\overrightarrow{AB}} \circ J^{-1} = J_{\overrightarrow{J(A)J(B)}} = J_{\overrightarrow{A_1B_1}}$

$$J \circ J_{\overrightarrow{AB}} \circ J^{-1} = J \circ S_{\beta} \circ S_{\alpha} \circ J^{-1} = J \circ S_{\beta} \circ J^{-1} \circ J \circ S_{\alpha} \circ J^{-1} \stackrel{\text{ТОТ ПАРАМЕТАР}}{=} S_{J(\beta)} \circ S_{J(\alpha)} = J_{\overrightarrow{A_1B_1}}$$

$$\alpha \parallel \beta, \overrightarrow{AB} \perp \alpha, \beta \quad A \in \alpha, B \in \beta$$

узастопних мила јонсе
 $\alpha \parallel \beta \Rightarrow J(\alpha) \parallel J(\beta)$

$$J(A) = A_1, J(B) = B_1$$

8. Доказати да је у еуклидском простору композиција састављена од три равanske рефлексije којима су основе одређене плoснима триедра осоротациона рефлексija.

Преглед: неке O , илоче a, b, c . Означимо $\alpha: \alpha \supset a, b$, $\beta: \beta \supset b, c$, $\gamma: \gamma \supset a, c$

$$\Gamma = S_\gamma \circ S_\beta \circ S_\alpha = \text{ОСНО-РОТАЦ РЕФ.}$$

$$\begin{aligned} \Gamma &= S_\gamma \circ S_\beta \circ S_\alpha = S_\gamma \circ \mathcal{R}_{b, \alpha} \cdot \mathcal{F}(\alpha, \beta) = \\ &= \underline{S_\gamma} \circ \underline{S_{\beta'}} = S_{\alpha'} = \underline{S_c} \circ S_{\alpha'} = S_{\beta''} \circ \underline{S_{\gamma'}} \circ S_{\alpha'} = \\ &= S_{\beta''} \circ \mathcal{R}_{p, \alpha} \cdot \mathcal{F}(\alpha', \gamma') = \\ &= S_{\beta''} \circ \mathcal{R}_{p, \theta} = \mathcal{R}_{p, \theta, \beta''} \quad \text{ОСНО РОТАЦИОНА РЕФЛЕКСИЈА} \\ \beta'' \perp \alpha', \gamma' &\rightarrow \beta'' \perp (\alpha' \cap \gamma') \text{ тј. } \boxed{p \perp \beta''} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\alpha \cap \beta = \{b\} \\ &\alpha', \beta': \alpha' \cap \beta' = \{b\} \\ &\mathcal{F}(\alpha, \beta) = \mathcal{F}(\alpha', \beta') \\ &\underline{\beta' \perp \alpha} \\ &\alpha \perp \beta' : \alpha \cap \beta' = \{c\} \Rightarrow O \in \alpha' \\ &S_\alpha \circ S_{\beta'} = \mathcal{R}_{c, \pi} = S_c \\ &\alpha', \beta'': \alpha' \cap \beta'' = \{c\} \\ &\alpha' \perp \beta'', \quad \underline{\beta'' \perp \alpha'} \\ &O \in \alpha' \cap \gamma' \neq \emptyset : \alpha' \cap \gamma' = \{p\} \\ &\alpha \cdot \mathcal{F}(\alpha', \gamma') = \emptyset \end{aligned}$$

