

10. Нека је t тангента описаног круга троугла ABC у темену A . Доказати да важи $\mathcal{G}_{\overrightarrow{CA}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{S}_t$.

$$J = \mathcal{G}_{\overrightarrow{CA}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{AB}} =$$

$$= \underbrace{S_{CA} \circ J_{\overrightarrow{CA}} \circ J_{\overrightarrow{BC}} \circ S_{BC}}_{J_{\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}}} \circ \underbrace{J_{\overrightarrow{AB}} \circ S_{AB}}_{= S_{AB}} = S_{CA} \circ J_{\overrightarrow{BA}} \circ S_{BC} \circ J_{\overrightarrow{AB}} \circ S_{AB} =$$

$$= S_{CA} \circ J_{\overrightarrow{BA}} \circ S_{BC} \circ J_{\overrightarrow{BA}}^{-1} \circ S_{AB} \stackrel{TOT}{=} S_{CA} \circ S_{J_{\overrightarrow{BA}}(BC)} \circ S_{AB} =$$

$$= \boxed{S_{CA} \circ S_{\ell} \circ S_{AB} = S_d}$$

$$CA, \ell, AB \in \mathcal{X}_A \Rightarrow \exists d \in \mathcal{X}_A$$

$$S_{CA} \circ S_{\ell} \circ S_{AB} = S_d \quad \Big| \circ S_{AB} \Leftrightarrow S_{CA} \circ S_{\ell} = S_d \circ S_{AB} \Leftrightarrow \underbrace{R_{A,2} \cdot \angle(\ell, CA)}_{S_{AB} = Id} = \underbrace{R_{A,2} \cdot \angle(AB, d)}_{= Id} \Leftrightarrow \angle(\ell, CA) = \angle(AB, d) \quad (*)$$

периф + пер $\overrightarrow{AB}$ = "описан угао узгледу се десне и леве стране у једној од ветви крајњих права"

$$\angle(\ell, CA) \stackrel{up}{=} \angle BCA \stackrel{down}{=} \angle(AB, t) \quad (**)$$

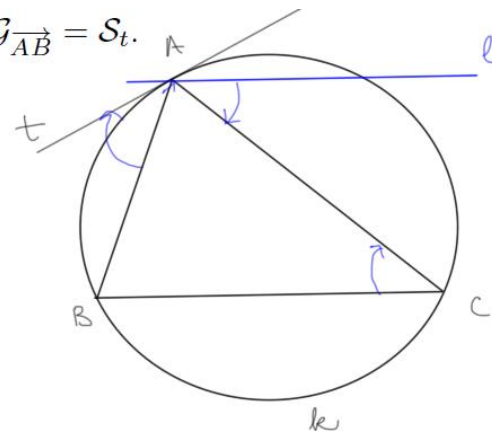
уједна са " крајња

$$(*), (**) \Rightarrow \angle(\ell, CA) = \angle(AB, d) \stackrel{up}{=} \angle(AB, t) \Rightarrow \boxed{d = t} \Rightarrow \underline{J = S_t}$$

$$\bullet \mathcal{G}_{\overrightarrow{CA}} = \mathcal{G}_{CA, \overrightarrow{CA}} = S_{CA} \circ J_{\overrightarrow{CA}} = J_{\overrightarrow{CA}} \circ S_{CA}$$

$$\bullet J_{\overrightarrow{AB}}^{-1} = J_{\overrightarrow{BA}}$$

$$\bullet J_{\overrightarrow{BA}}(BC) = \ell : \ell \parallel BC, \ell \ni A$$



2)

11. Доказати да је четвороугао $ABCD$ тетиван ако и само ако важи $\mathcal{G}_{\overrightarrow{DA}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{CD}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{E}$.

$$J = \mathcal{G}_{\overrightarrow{DA}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{CD}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{AB}} =$$

$$\mathcal{G}_{\overrightarrow{CA}}^{-1} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{CA}}$$

$$= \underbrace{\mathcal{G}_{\overrightarrow{DA}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{CD}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{AC}}}_{S_{t_1}} \circ \underbrace{\mathcal{G}_{\overrightarrow{CA}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{AB}}}_{S_{t_2}} = S_{t_1} \circ S_{t_2}$$

$$\Rightarrow: \square ABCD \text{ tetivan} \Rightarrow k_1 = k_2 \Rightarrow t_1 = t_2 = t \Rightarrow J = S_{t_1} \circ S_{t_2} = S_t^2 = Id = \mathcal{E}$$

$$\Leftarrow: S_{t_1} \circ S_{t_2} = \mathcal{E} \Leftrightarrow S_{t_1} = S_{t_2} \Leftrightarrow t_1 = t_2 = t$$

$$S_{t_1}^2 = S_{t_2}^2 = Id$$

$$\begin{cases} O_1 A \perp t \\ O_2 A \perp t \end{cases} \Rightarrow O_1 A \parallel O_2 A \Rightarrow O_1 O_2, A \text{ колинеарне} \Rightarrow n: n \ni O_1, O_2, A, n \perp t$$

$$A, C \in k_1 \Rightarrow \Delta_{AC} \ni O_1$$

$$A, C \in k_2 \Rightarrow \Delta_{AC} \ni O_2$$

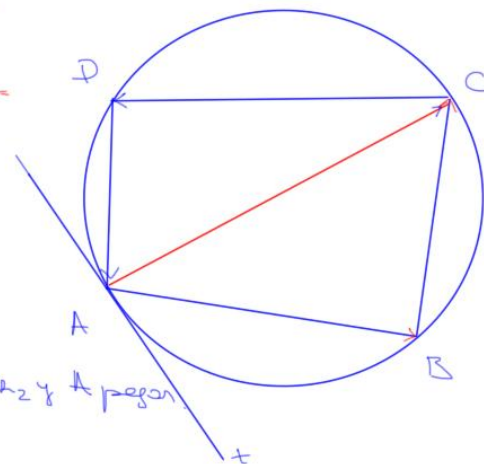
$$\text{Како } \underset{AC}{n} \neq \Delta_{AC} \text{ (jer } A \notin \Delta_{AC})$$

$$\mathcal{G}_{\overrightarrow{CA}}^{-1} = (J_{\overrightarrow{CA}} \circ S_{CA})^{-1} = S_{CA}^{-1} \circ J_{\overrightarrow{CA}}^{-1} =$$

$$\uparrow S_{CA} \circ J_{\overrightarrow{AC}} = \mathcal{G}_{\overrightarrow{AC}} \\ S_{CA}^2 = Id$$

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Ozhemo } k_1(O_1, r_1) &= k(A, C, D) \\ k_2(O_2, r_2) &= k(A, B, C) \end{aligned}$$

са t_1, t_2 тангенте на k_1 и k_2 у A погон



$$\Rightarrow n \cap \Delta_{AC} = \{O\}, \nexists! \text{ пресека тачке } n \text{ и } \Delta_{AC}$$

$$\Rightarrow O_1, O_2 \in n \cap \Delta_{AC} \Rightarrow O_1 = O_2 = O \Rightarrow OA = OA = OA$$

$$\Rightarrow k_1 = k_2 = k \Rightarrow \square ABCD \text{ tetivan.}$$

12. Дата су два круга који имају пресечну тачку A . Конструисати праву која садржи A и на којој дати кругови одсецају подударне дужи.

* Прибирно решење, ако се кругови k и l секу у тачки A и X , је права AX .

Анализа: Нека p зад. услове задатка. Означимо пресек праве p са круговима k и l тачкама B и C одг. $B, C \neq A$. Тада $AB = AC \Rightarrow A = s(B, C) \Rightarrow S_A(B) = C$. Тачна држимо $k' = S_A(k)$.
Тада, важи $S_A(B) = C \Rightarrow \{C\} = k' \cap l$. Тада $p = AC$.

Конструкција:

- Конструисамо $k' = S_A(k)$
- l — $\{C\} = l \cap k'$
- Констр. $p = AC$.

Доказ: Означимо $\{B\} = p \cap k, B \neq A$.

$\Rightarrow S_A: k \mapsto k'$
 $S_A: p \mapsto p, p \ni A$

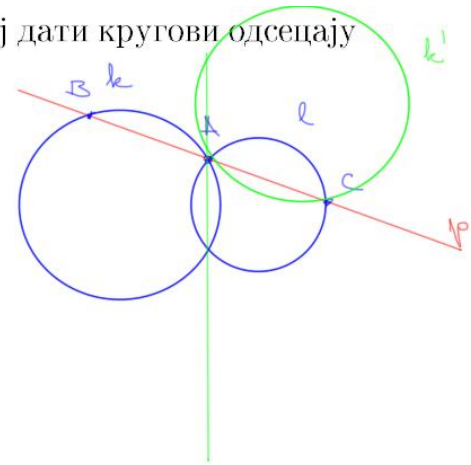
$\Rightarrow S_A: \underbrace{k \cap p}_{\{B\}} \mapsto \underbrace{k' \cap p}_{\{C\}} \Rightarrow S_A(B) = C \Rightarrow \underline{\underline{AB = AC}}$

$\Rightarrow C \in l$

$\Rightarrow$ конструисана права p задовољава услове зад.

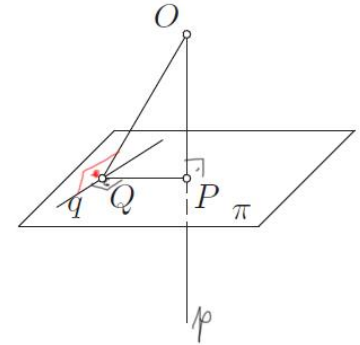
Дискусија: • $k \cap l = \{A, X\}, A \neq X \Rightarrow \exists_2$ реш. го. на одређеном

• $k \cap l = \{A\}$: • компаретивни k и l су чисти $\Rightarrow \exists \infty$ много реш.
 • $k \cap l = \emptyset$ раздвојени $\Rightarrow \exists$ решење



СТЕРЕОМЕТРИЈА

- Постоји једиствена права нормална на два мимопаралелна права.
- Права је нормална на равни ако и само ако је нормална на две праве те равни које се секу.
- **(Теорема о три нормале)** Ако је права p нормала из тачке O на равни π и продире је у тачки P , а Q подножје нормале из P на праву $q \subset \pi$, тада је $OQ \perp q$.

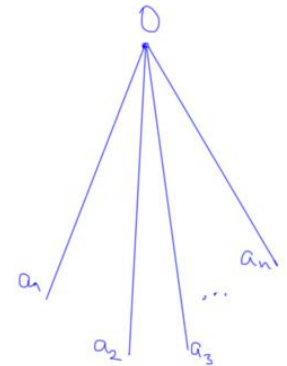


• РОГЉАСТЕ ПОВРШИ

Нека је у простору задат коначан низ полуправих $a_1, a_2, \dots, a_n$ са заједничким теменом O . Лик који се састоји од углова $\angle [a_1, a_2], \angle [a_2, a_3], \dots, \angle [a_{n-1}, a_n], \angle [a_n, a_1]$, при чему свака два узастопна угла, у овом цикличном низу, не припадају једној равни, називамо **РОГЉАСТОМ ПОВРШИ** и обележавамо је са $Oa_1a_2\dots a_n$.

Полуправе $a_1, a_2, \dots, a_n$ називамо **ИВИЦАМА**, тачку O **ТЕМЕНОМ**, а углове $\angle [a_1, a_2], \angle [a_2, a_3], \dots, \angle [a_{n-1}, a_n], \angle [a_n, a_1]$ **ПЉОСНИМА**, **ИВИЧНИМ УГЛОВИМА** или **СТРАНАМА** рогљасте површи $Oa_1a_2\dots a_n$. Две узастопне ивице рогљасте површи називамо **СУСЕДНИМ**, а две пљосни са заједничком ивицом **СУСЕДНИМ ПЉОСНИМА**.

Рогљасту површ која има n пљосни називамо n -**мостраном**, а 3 – *strani* рогљасту површ називамо **ТРИЕДАРСКОМ ПОВРШИ**. Сваку од класа еквиваленције релације са исте стране просте рогљасте површи $Oa_1a_2\dots a_n$ називамо n -**мостраним РОГЉЕМ**, а површ $Oa_1a_2\dots a_n$ називамо **границом**. Теме, ивице и пљосни површи $Oa_1a_2\dots a_n$ зовемо **теменом**, **ивицама** и **пљоснима** сваког од рогљева којима је та површ граница. 3-*страни* рогља зовемо **ТРИЕДРОМ**.



2. Збир два угла при врху триедра већи је од трећег. Доказати.

Означење $\chi[a, b] = \chi(a, b)$. χ_{abc} — трипрегиз : $\chi(a, b) + \chi(b, c) > \chi(a, c)$;

1° $\chi(a,b) \geq \chi(a,c) \Rightarrow \chi(a,b) + \chi(b,c) > \chi(a,c)$ $\square$

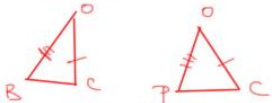
2° $\chi(a, b) < \chi(a, c)$: $\Rightarrow \exists$ unique $p \in X(a, c)$ as $\chi(a, p) = \chi(a, b)$. Here a, c are comparable, $a, c \neq 0$.

Означено $\mathcal{P} \mathcal{Y} = \mathcal{P} \cap \mathcal{A} \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{A}, \mathcal{P}, \mathcal{C})$. Означено $\mathcal{B}: \mathcal{B} \in \mathcal{b}, \mathcal{O} \mathcal{B} = \mathcal{O} \mathcal{P}$

$$\begin{array}{l} OB = OP \\ \angle AOB = \angle(a, b) = \angle(a, p) = \angle AOP \\ OA = OA \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ B(a, b) \\ P(a, p) \end{array} \right\} \text{Cyc} \Rightarrow \underline{\Delta AOP \cong \Delta AOB} \Rightarrow \boxed{AB = AP} \Rightarrow \Delta ABP \text{ ισόσημο} \Rightarrow \text{ισοσκελές}$$

$$\Rightarrow \angle ABP = \angle APB < \frac{\pi}{2} \rightarrow \angle BPC > \frac{\pi}{2} \text{ w. T.J.}$$

DBPC: Kad god beba ugne u Δ je beba svesnija, $\angle BPC > \angle PBC \Rightarrow BC > PC$.



$$\left. \begin{array}{l} OB = OP \\ OC = OC \\ BC > PC \end{array} \right\} \Rightarrow \angle BOC > \angle POC$$

$$\underline{\chi(a,c)} = \chi(a,p) + \chi(p,c) = \chi(a,b) + \chi(p,c) < \chi(a,b) + \chi(b,c)$$

3. Равни од којих је свака одређена ивицом и симетралом наспрамне стране триедра имају заједничку праву. Доказати.

Нека су $\alpha: 2 > a, \beta: 2 > b, \gamma: 2 > c, \delta: 2 > d, \epsilon: 2 > e$. Означимо са $A \in \alpha, B \in \beta, C \in \gamma, D \in \delta, E \in \epsilon$.

Opisano $\{A_1\} = \Delta_{(a,b)} \cap BC$, $\{B_1\} = \Delta_{(a,b)} \cap AC$, $\{C_1\} = \Delta_{(a,b)} \cap AB$. Kako je $DB = OC \Rightarrow \Delta BOC$ isoskrapni $\Rightarrow$

$\Delta_{x(16,0)}$ уфегато 4 урент. гытн 430 y ΔBOC т. $A_7 = S(BC)$

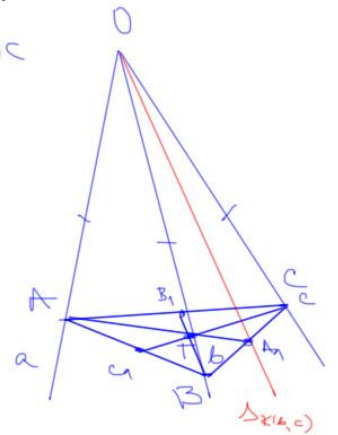
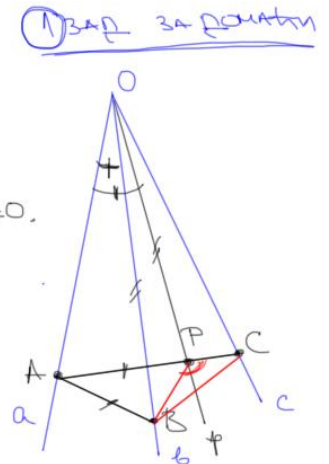
Answer, $B_1 = S(AC)$, $C_1 = S(AB)$

AA_1, BB_1, CC_1 — медианы $\triangle ABC \Rightarrow \{T\} = AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1$, T — центр тяжести $\triangle ABC$.

• $\Delta \supset \Delta A_n \Rightarrow \Delta \ni T$, $\beta \supset \beta B_1 \Rightarrow \beta \ni T$, $\gamma \supset \gamma C_n \Rightarrow \gamma \ni T \Rightarrow \{T\} \in \Delta \cap \beta \cap \gamma$ (*)

• $\alpha \succ \beta, \beta \succ 0 \Rightarrow 0 \in \alpha$; $\beta \succ \gamma, \gamma \succ 0 \Rightarrow 0 \in \beta$; $\delta \succ \epsilon, \epsilon \succ 0 \Rightarrow 0 \in \delta \Rightarrow \{0\} \in \alpha \cap \beta \cap \delta$ (**)

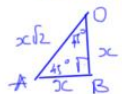
$\left. \begin{array}{l} \text{1) } \end{array} \right\} \Rightarrow \text{OT записување} \\
\text{2, 3, 8}$



4. Нека су углови при врху триедра једнаки редом $60^\circ, 45^\circ, 45^\circ$. Доказати да је диједар наспрам највеће стране прав.

Нека је $B \in b, B \neq O$ произвољна. Израчунајмо A, C тако да $A \in a, C \in c, AB \perp b, BC \perp b$. Израчунајмо $OB = x$

$$\Delta OAB: \angle OBA = \frac{\pi}{2}, \angle AOB = 45^\circ \Rightarrow \angle OAB = 45^\circ \Rightarrow \boxed{OB = AB = x} \quad \text{Аналогно, } \Delta OBC: OB = BC = x, OC = x\sqrt{2}$$



$$\Rightarrow \boxed{OA = x\sqrt{2}}$$

$$\Delta OAC: OA = x\sqrt{2} = OC, \angle AOC = 60^\circ \Rightarrow \Delta OAC \text{ једнакостранични} \Rightarrow \boxed{AC = x\sqrt{2}}$$

$$\left. \begin{array}{l} OB = BC = x \\ AB = AB = x \\ OA = AC = x\sqrt{2} \end{array} \right\} \xrightarrow{ССС} \Delta ABC \cong \Delta OAB \Rightarrow \angle ABC = \angle ABO = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{уједно диједар наспрам највеће стране је } \frac{\pi}{2} \text{ р.}$$

Израчунајмо ДИЈЕДАР је ПРАВ.



5. Доказати да се око сваког тетраедра може описати сфера, (као и да се у сваки тетраедар може уписати сфера.)

Нека је $A_1 = S(BC), B_1 = S(AC), C_1 = S(AB)$ Израчунајмо се α, β, γ симетралне равни редом дужни BC, AC, AB .

Нека је $\Pi \ni A, B, C$.

$$\bullet \alpha \cap \Pi = \{A_1\}: \alpha \perp BC, \alpha \ni A \Rightarrow \underbrace{BC \perp \alpha}_{\alpha \in \Pi} \Rightarrow \alpha \text{ - симетрална дужни } BC \text{ у равни } \Pi.$$

Аналогно, β и γ су симетралне дужни AC и AB редом у равни Π

$$\alpha \perp \beta, \alpha \ni \bar{O} \Rightarrow \bar{O} \in \beta; \beta \perp \gamma, \beta \ni \bar{O} \Rightarrow \bar{O} \in \gamma; \gamma \perp \alpha, \gamma \ni \bar{O} \Rightarrow \bar{O} \in \alpha \Rightarrow \alpha \cap \beta \cap \gamma = \bar{O} \quad (*)$$

Како равни не могу имати јужну зај. тачку, већ ако се секу, онда се секу по правој

$$\alpha \perp \beta, \alpha \cap \beta = p, p \perp \Pi \Rightarrow \alpha \cap \beta \cap \gamma = \{p\}, p \ni \bar{O}, p \perp \Pi \quad (*)$$

Нека је δ - симетрална равнина AD .

$$\bar{O} \in \delta \Rightarrow d(\bar{O}, A) = d(\bar{O}, D) \quad (1)$$

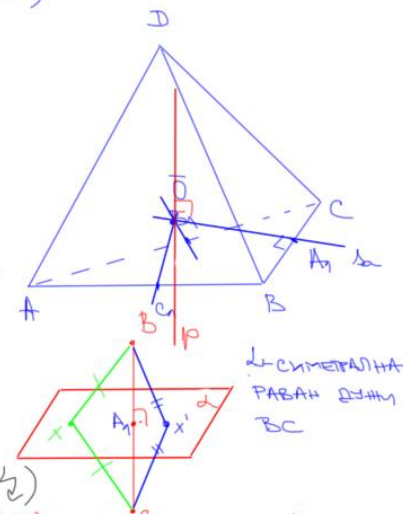
$$\bar{O} \in p, p \in \delta \Rightarrow \bar{O} \in \delta \Rightarrow d(\bar{O}, B) = d(\bar{O}, C) \quad (2)$$

$$\bar{O} \in p, p \in \beta \Rightarrow d(\bar{O}, A) = d(\bar{O}, C) \quad (3)$$

$$\bar{O} \in p, p \in \gamma \Rightarrow d(\bar{O}, A) = d(\bar{O}, B) \quad (4)$$

$$\left. \begin{array}{l} p \perp \Pi \ni A \\ p \perp \Pi \ni B \end{array} \right\} \Rightarrow p \perp \Pi \Rightarrow AD \perp p \Rightarrow AD \perp \Pi \Rightarrow D \in \Pi$$

(1), (2), (3), (4) $\Rightarrow d(\bar{O}, A) = d(\bar{O}, B) = d(\bar{O}, C) = d(\bar{O}, D) \Rightarrow \bar{O}$ - центар сфере описане око тетраедра $ABCD$.



6. а) (Тежиште тетраедра) Дужи одређене средиштва наспрамних ивица троугла пирамиде (тетраедра) секу се у једној тачки која их полови. Доказати.

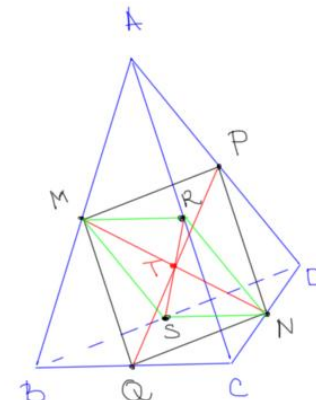
Нека су M, N, P, Q, R, S средина ивица AB, CD, AD, BC, AC, BD .

$M=S(AB), Q=S(BC) \Rightarrow MQ$ средња линија $\Delta ABC \Rightarrow MQ \parallel AC, MQ = \frac{1}{2}AC$
Аналогно, $PN \parallel AC, PN = \frac{1}{2}AC$

$\Rightarrow MQ \parallel PN, MQ = PN \Rightarrow \square MQNP$ паралелограм

MR је ср. лин. $\Delta ABC \Rightarrow MR \parallel BC, MR = \frac{1}{2}BC$
 $SN \parallel BC, SN = \frac{1}{2}BC$

(1), (2) $\Rightarrow T=S(MN)=S(PQ) \Rightarrow MN, PQ, RS$ се секу у тачки T која их полови.



- б) Доказати да тежиште тетраедра дели дужи одређене теменима и тежишћима наспрамних страна у односу 3 : 1.

Означимо са T -тежиште тетраедра, а са T_A тежиште ΔBCD .

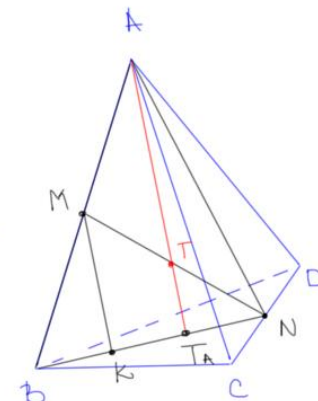
Докажујемо $T \in AT_A$: Означимо $\alpha \ni A, N, B \Rightarrow \alpha \ni AB, \alpha \ni M \Rightarrow \alpha \ni MN$; $\alpha \ni T$ (1)
Означимо $\pi \ni B, C, D \Rightarrow \pi \ni CD \Rightarrow \pi \ni N$

Нека је $AT \cap \pi = \{T'\}$ (1), $\alpha \cap \pi = BN \Rightarrow T' \in BN$ - тачка сјеча из B ΔBCD у равни π ; Аналогно $T' \in CS, DQ$ сјеча сјеча
 $\Rightarrow \{T'\} = BN \cap CS \cap DQ$ тачка сјеча $\Delta BCD \Rightarrow T' = T_A$ (2); (1), (2) $\Rightarrow AT \cap \pi = \{T_A\}$ тачка сјеча A, T, T_A коллинеарне

Докажујемо $AT : TT_A = 3 : 1$: Означимо $K = S(BT_A)$ $BT_A : T_A N = 2 : 1 \Rightarrow T_A = S(KN)$

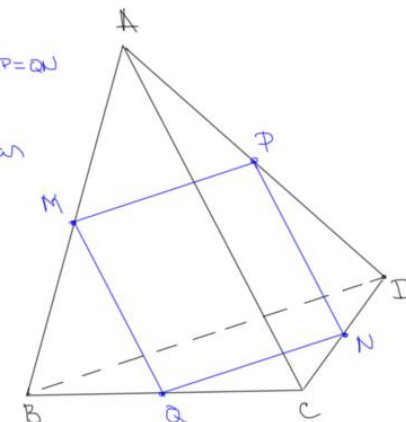
$T = S(MN), T_A = S(KN) \Rightarrow TT_A$ ср. лин. $\Delta MKN \Rightarrow TT_A = \frac{1}{2}MK, TT_A \parallel MK$
 $M = S(AB), K = S(BT_A) \Rightarrow MK$ ср. лин. $\Delta ABT_A \Rightarrow MK = \frac{1}{2}AT_A, MK \parallel AT_A$

$AT = AT_A - TT_A = AT_A - \frac{1}{4}AT_A = \frac{3}{4}AT_A \Rightarrow AT : TT_A = \frac{3}{4}AT_A : \frac{1}{4}AT_A = 3 : 1$.



7. а) Две наспрамне ивице неког тетраедра су међусобно подударне ако и само ако су дужи одређене средиштима осталих двају парова наспрамних ивица међусобно нормалне.

Нека су M, N, P, Q, R, S средишње тачке AB, CD, AD, BC, AC, BD .
 $AC = BD \stackrel{?}{\Leftrightarrow} MN \perp PQ$
 $M = S(AB), P = S(CD) \Rightarrow MP \text{ је ср. лин. } \Delta ABD \Rightarrow MP \parallel BD, MP = \frac{1}{2}BD$
 $Q = S(BC), N = S(CD) \Rightarrow QN \text{ — ср. лин. } \Delta BCD \Rightarrow QN \parallel BD, QN = \frac{1}{2}BD$
 $\left. \begin{array}{l} MP \parallel BD, MP = \frac{1}{2}BD \\ QN \parallel BD, QN = \frac{1}{2}BD \end{array} \right\} \Rightarrow MP \parallel QN, MP = QN$
 $\Downarrow$
 $\square MPNQ \text{ је паралелограм}$



$\square MPNQ$ паралелограм, $MN \perp PQ \stackrel{?}{\Leftrightarrow} \square MPNQ \text{ је паралелограм којег су дијагонали нормалне} \Leftrightarrow$

$$\square MPNQ \text{ је ромб} \Leftrightarrow MQ = QN \Leftrightarrow AC = BD$$

$$\begin{array}{ccc} \parallel & & \parallel \\ \frac{1}{2}AC & & \frac{1}{2}BD \end{array}$$

- б) Две наспрамне ивице тетраедра су нормалне ако и само ако су дужи одређене средиштима осталих двају парова наспрамних ивица међусобно подударне.

$$AC \perp BD \stackrel{?}{\Leftrightarrow} MN = PQ$$

$\square MPNQ$ паралелограм, $MN = PQ \stackrel{?}{\Leftrightarrow} \square MPNQ \text{ је паралелограм којег су дијагонали подударне дужи} \Leftrightarrow \square MPNQ \text{ је правоугаоник}$

$$\Leftrightarrow MQ \perp QN \Leftrightarrow AC \perp BD$$

$$\begin{array}{ccc} \parallel & & \parallel \\ \frac{1}{2}AC & & \frac{1}{2}BD \end{array}$$