

ГЕОМЕТРИЈА 2

задачи по којима се држе вежбе

ПОДУДАРНОСТ

1. **(Средња линија троугла)** Ако су B_1 и C_1 средишта дужи CA и BA троугла ABC , онда су праве BC и B_1C_1 паралелне и важи $B_1C_1 = \frac{1}{2}BC$.
2. Ако су A, B, C, D четири различите тачке и M, N, K, L, P, Q средишта дужи AB, BC, CD, DA, AC, DB редом, доказати:
 - а) MN и KL , MP и QK , NP и QL су међусобно подударне дужи;
 - б) дужи LN, MK, PQ имају заједничко средиште;
 - в) сваки од углова $\angle PMQ, \angle PNQ, \angle LMN$ подударан је једном од углова којег одређују праве BC и AD , AB и CD , AC и BD .
3. Доказати да тачке симетричне ортоцентру у односу на: а) странице троугла; б) средишта страница троугла; припадају кругу описаном око тог троугла.
4. **(Ојлерова права)** Средиште описаног круга O , ортоцентар H и тежиште T произвољног троугла су колинеарне тачке и важи $HT = 2TO$. Доказати.
5. **(Ојлеров круг)** Средишта страница, подножја висина и средишта дужи одређених теменима и ортоцентром троугла припадају једном кругу. Доказати.
6. **(Симсонова права)** Подножја нормала из произвољне тачке круга описаног око неког троугла, на правама које садрже странице тог троугла, припадају једној правој.
7. Дат је тетиван четвороугао $ABCD$ чије су дијагонале међусобно нормалне и секу се у тачки S .
 - а) Права која садржи тачку S и нормална је на правој AB садржи средиште дужи CD . Доказати.
 - б) Ако су A', B', C', D' пројекције тачке S на правама AB, BC, CD, DA , редом, тада је четвороугао $A'B'C'D'$ тетиван и тангентан. Доказати.
8. **(Микелова теорема)** Четири праве у општем положају у равни одређују четири троугла. Доказати да се описани кругови тих троуглова секу у једној тачки.
9. Медијатриса странице и бисектриса наспрамног угла троугла секу се у тачки која припада описаном кругу тог троугла. Доказати.
10. Нека су P и Q средишта лукова AB и AC круга описаног око троугла ABC и s_α бисектриса угла $\angle BAC$. Доказати да је $PQ \perp s_\alpha$.
11. Нека су A', N и O редом подножје висине из A , пресек бисектрисе угла $\angle BAC$ са описаном кругом троугла ABC ($AB < AC$) и центар описаног круга, доказати $\angle A'AN = \angle ANO = \angle NAO = \frac{1}{2}(\angle ABC - \angle ACB)$.
12. **(Велики задатак)** Ако са A_1, B_1 и C_1 обележимо средишта ивица $BC = a, CA = b, AB = c$ троугла ABC ($b > c$), са p полуобим тог троугла, са $l(O, r)$ описани круг тог троугла, са P, Q, R тачке у којима уписани круг $k(S, \rho)$ додирује праве BC, CA, AB , са P_i, Q_i, R_i ($i = a, b, c$) тачке у којима споља уписани круг $k_i(S_i, \rho_i)$ додирује редом праве BC, CA, AB , са M и N тачке у којима медијатриса ивице BC сече круг l , при чему је M на луку BAC , са M' и N' подножја управних из тачака M и N на правој AB , са P', P'_a, P'_b, P'_c дијаметрално супротне тачке тачкама P, P_a, P_b, P_c , доказати да је:
 - 1) $\mathcal{B}(A, P', P_a), \mathcal{B}(A, P, P'_a), \mathcal{B}(P_c, A, P'_b), \mathcal{B}(P_b, A, P'_c)$;
 - 2) $AQ_a = AR_a = p, \quad QQ_a = RR_a = a, \quad Q_bQ_c = R_bR_c = a$;
 - 3) $AQ = AR = BR_c = BP_c = CP_b = CQ_b = p - a$;
 - 4) $PP_a = b - c, \quad P_bP_c = b + c$;
 - 5) $PA_1 = P_aA_1, \quad P_cA_1 = P_bA_1$;
 - 6) $NS = NS_a = NB = NC, \quad MS_b = MS_c = MB = MC$;
 - 7) $A_1M = \frac{1}{2}(\rho_b + \rho_c), \quad A_1N = \frac{1}{2}(\rho_a - \rho)$;
 - 8) $MM' = \frac{1}{2}(\rho_b - \rho_c), \quad NN' = \frac{1}{2}(\rho + \rho_a)$;
 - 9) $\rho_a + \rho_b + \rho_c = 4r + \rho$;
 - 10) $AM' = \frac{1}{2}(b - c) = BN', \quad AN' = \frac{1}{2}(b + c) = BM'$;
 - 11) $M'N' = b'$.

СЛИЧНОСТ

- (Теорема о симетрали угла)** Ако су E и F тачке у којима бисектрисе унутрашњег и спољашњег угла $\angle BAC$ троугла ABC ($AB < AC$) секу праву BC доказати $BE : CE = BF : CF = AB : AC$.
- Нека су E и F тачке из претходног задатка. Доказати:
 - $AS : SE = AS_a : S_aE = (AB + AC) : BC$;
 - $AE : SE = (AB + BC + CA) : BC$, $AE : S_aE = (AB + AC - BC) : BC$;
 - $AS_b : S_bF = AS_c : S_cF = (AC - AB) : BC$.

- Доказати (важе ознаке из Великог задатка):

$$\begin{array}{ll} \text{а)} SA \cdot SN = 2r\rho; & \text{в)} S_bA \cdot S_bM = 2r\rho_b; \\ \text{б)} S_aA \cdot S_aN = 2r\rho_a; & \text{г)} S_cA \cdot S_cM = 2r\rho_c. \end{array}$$

- Нека је $ABCD$ тетиван четвороугао, M и N редом средишта страница AB и CD , O пресек дијагонала AC и BD , а P и Q нормалне пројекције тачке O редом на AD и BC . Доказати да је $MN \perp PQ$.
- (Птоломејева теорема)** Ако је $ABCD$ конвексан и тетиван четвороугао, доказати да важи $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$.

(Чевина теорема) Ако су P, Q, R редом тачке правих BC, CA, AB где су A, B, C три неколинеарне тачке, тада праве AP, BQ, CR припадају једном прамену ако и само ако важи $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = 1$.

(Менелајева теорема) Тачке P, Q, R правих одређених страницама BC, CA, AB троугла ABC су колинеарне ако и само ако важи $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = -1$.

- Ако су P, Q, R тачке у којима уписани круг троугла ABC додирује странице BC, CA, AB , доказати да су праве AP, BQ, CR конкурентне.
- Доказати да се бисектриса једног унутрашњег и два спољашња угла троугла ABC секу у једној тачки.
- Доказати да, уколико постоје тачке у којима бисектрисе спољашњих углова код темена A, B и C секу праве одређене наспрамним страницама троугла ABC , оне су колинеарне.
- Доказати да тачке P, Q, R у којима тангенте описаног круга троугла ABC у његовим теменима секу праве одређене наспрамним страницама, уколико постоје, припадају једној правој.

Деф. Нека су P, Q, R, S четири разне колинеарне тачке. Пар тачака (P, Q) је хармонијски спрегнут са паром (R, S) ако важи $\frac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{RQ}} = -\frac{\overrightarrow{PS}}{\overrightarrow{SQ}}$. Тада пишемо $\mathcal{H}(P, Q; R, S)$.

Деф. Праве a, b, c, d једног прамена су хармонијски спрегнуте ако постоји права p која их сече у хармонијски спрегнутим тачкама. Тада пишемо $\mathcal{H}(a, b; c, d)$. Ова особина не зависи од избора праве p .

Особине:

- Ако важи $\mathcal{H}(P, Q; R, S)$, тада важи и $\mathcal{H}(Q, P; R, S)$, $\mathcal{H}(Q, P; S, R)$, $\mathcal{H}(R, S; P, Q)$.
 - Ако су P, Q, R три колинеарне тачке и R није средиште дужи PQ , тада постоји јединствена тачка S таква да је $\mathcal{H}(P, Q; R, S)$.
 - $\mathcal{H}(P, Q; R, S) \Rightarrow \mathcal{B}(P, R, Q) \perp \mathcal{B}(P, S, Q)$.
 - Ако су a, b, c, d конкурентне праве и $c \perp d$, важи: $\mathcal{H}(a, b; c, d) \Leftrightarrow c$ и d су симетрале углова одређених правама a и b .
- Нека су $\overline{S}, \overline{S_a}, \overline{S_b}, \overline{S_c}$ пројекције тачака S, S_a, S_b, S_c на праву одређену висином AA' троугла ABC , а $\overline{E}$ пројекција тачке E на праву AC . Доказати:
 - $\mathcal{H}(A, E; S, S_a), \quad \mathcal{H}(A, A'; \overline{S}, \overline{S_a}), \quad \mathcal{H}(A, \overline{E}; Q, Q_a), \quad \mathcal{H}(A', E; P, P_a);$
 - $\mathcal{H}(A, F; S_b, S_c), \quad \mathcal{H}(A', F; P_b, P_c), \quad \mathcal{H}(A, A'; \overline{S_b}, \overline{S_c}).$
 - Важи $\mathcal{H}(P, Q; R, S)$ ако и само ако постоје четири тачке A, B, C, D такве да важи $AB \cap CD = \{P\}$, $BC \cap AD = \{Q\}$, $PQ \cap AC = \{R\}$, $PQ \cap BD = \{S\}$.
 - Ако су A, B, C, D разне колинеарне тачке, а O средиште дужи AB , тада важи $\mathcal{H}(A, B; C, D) \Leftrightarrow AO^2 = OC \cdot OD$.

13. Ако су A, B, C, D разне тачке праве p , O тачка ван те праве, E и F тачке у којима права која садржи тачку B и паралелна је OA сече OC и OD , доказати да важи $\mathcal{H}(A, B; C, D) \Leftrightarrow B$ је средиште EF .
14. (**Аполонијев круг**) Одредити скуп свих тачака у равни којима су растојања од двеју датих тачака сразмерна датим неподударним дужима.
- Деф.** Ако нека права која садржи тачку P сече круг $k(O, r)$ у тачкама A и B , тада је *потенција* тачке P у односу на круг k дата са $p(P, k) = \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = PO^2 - r^2$ и не зависи од избора праве. Потенција тачке P је већа, мања или једнака нули у зависности од тога да ли се тачка налази у спољашњости, унутрашњости круга или на кругу.
- Деф.** Геометријско место тачака равни које имају једнаке потенције у односу на два дата круга $k_1(O_1, r_1)$ и $k_2(O_2, r_2)$ је права која се зове *радикална* или *потенцијална оса*.
- Радикална оса је управна на правој O_1O_2 . Радикалне осе трију кругова неке равни припадају једном прамену. Уколико је у питању прамен конкурентних правих, пресечна тачка назива се *радикални центар* тих кругова.
15. Нека су A, B, C, D колинеарне тачке такве да важи $\mathcal{B}(A, C, B, D)$ и нека је k круг над пречником AB и l било који круг који садржи тачке C, D . Доказати да важи $\mathcal{H}(A, B; C, D) \Leftrightarrow k \perp l$.
16. Ако је $l(O, r)$ описан круг, $k(S, \rho)$ уписани круг и $k_a(S_a, \rho_a)$ споља уписани круг који додирује страницу BC датог троугла ABC , доказати да је $OS^2 = r^2 - 2r\rho$ и $OS_a^2 = r^2 + 2r\rho_a$.
17. Права одређена висином AD троугла ABC представља радикалну осу кругова којима су пречници тежишне линије BB_1 и CC_1 тог троугла.

КОНСТРУКТИВНИ ЗАДАЦИ

1. Конструисати троугао ABC ако су задати следећи елементи:

- | | |
|-----------------------------|----------------------------------|
| 1) t_a, t_b, t_c ; | 7) $\beta - \gamma, l_a, \rho$; |
| 2) β, γ, p ; | 8) $\alpha, b - c, \rho_a$; |
| 3) $\alpha, a, b + c$; | 9) a, ρ_b, ρ_c ; |
| 4) $\beta, h_c, b \pm c$; | 10) α, ρ, ρ_a ; |
| 5) $t_a, h_b, b \pm c$; | 11) $b - c, h_a, \rho$. |
| 6) $\beta - \gamma, b, c$; | |

2. Конструисати троугао ABC ако су дати теме A , ортоцентар H и центар описаног круга O тог троугла.

3. Дате су тачке A_1, S, F . Конструисати троугао ABC ако је A_1 средиште BC , S центар уписаног круга, а F пресек симетрале спољашњег угла у темену A и праве BC .

ИНВЕРЗИЈА

Деф. Нека је $k(O, r)$ произвољни круг равни E^2 . *Инверзија у односу на круг k* је пресликавање $\psi_k : E^2 \setminus \{O\} \rightarrow E^2 \setminus \{O\}$ којом се тачка P слика у тачку P' такву да P и P' припадају истој полуправој са теменом у O и важи $OP \cdot OP' = r^2$.

Особине

- $\psi_k^2 = Id$.
- $\psi_k(P) = P \Leftrightarrow P \in k$.
- ψ_k слика унутрашњост круга у спољашњост и обрнуто.
- Ако ψ_k слика A у A' и ако је PQ пречник круга k такав да су P, Q, A, A' колинеарне, онда важи $\mathcal{H}(P, Q; A, A')$.
- Ако права p садржи тачку O , тада се $p \setminus \{O\}$ слика у $p \setminus \{O\}$.
- Ако права p не садржи тачку O , онда се слика у $l \setminus \{O\}$ где је l круг који садржи O .
- Ако круг l садржи тачку O , онда се $l \setminus \{O\}$ слика у праву која не садржи O .
- Ако круг l не садржи тачку O слика се у круг l_1 који такође не садржи O . При том се центар круга l НЕ ПРЕСЛИКАВА у центар круга l_1 .
- $\psi_k(A)\psi_k(B) = \frac{r^2}{OA \cdot OB} AB$.
- ψ_k чува углове између кривих.

1. Ако се кругови k_1 и k_2 додирују у центру инверзије, тада се инверзијом сликају у две паралелне праве. Доказати.
2. Нека се инверзијом ψ_k тачка A која не припада кругу k слика у A' и нека је l произвољан круг који садржи A и A' . Доказати да је $l \perp k$.
3. Нека је O центар описаног круга l троугла ABC . Ако су B' и C' тачке полуправих AB и AC такве да је $AB \cdot AB' = AC \cdot AC'$ доказати да је $OA \perp B'C'$.
4. Нека је $ABPQ$ нететивни четвороугао. Доказати да је угао између кругова описаних око троуглова ABP и ABQ једнак углу између кругова описаних око троуглова PQA и PQB .
5. Нека се кругови k_1, k_2, k_3 међусобно додирују у тачкама P, Q, R . Доказати да је круг описан око троугла PQR ортогоналан на сва три круга.
6. Кругови k_1, k_2, k_3 су међусобно ортогонални, при чему се k_1 и k_2 секу у тачкама A и B , k_2 и k_3 у тачкама C и D , k_3 и k_1 у тачкама E и F . Доказати да се кругови описани око троуглова ACE и ADF додирују у тачки A .
7. У равни су дата четири круга од којих сваки додирује тачно два круга од преосталих. Доказати да су додирне тачке колинеарне или концикличне.
8. Конструисати круг k који садржи две дате тачке A и B и додирује дату праву p .
9. Конструисати круг k који садржи дату тачку A и додирује дате кругове k_1 и k_2 .
10. Конструисати круг који споља додирује три дата круга k_1, k_2, k_3 .

ИЗОМЕТРИЈСКЕ ТРАНСФОРМАЦИЈЕ РАВНИ

1. Доказати $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p \Leftrightarrow p = q \vee p \perp q$.
2. Доказати $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_r = \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$ ако и само ако су p, q, r праве једног прамена.
3. Доказати $\mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_A = \mathcal{S}_A \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_B \Leftrightarrow AB \perp p$.
4. Ако нека фигура равни има тачно две осе симетрије, доказати да је она и централно-симетрична.
5. Нека је $ABCDE$ петоугао уписан у круг такав да је $BC \parallel DE$ и $CD \parallel EA$. Доказати да D припада медијатриси стране AB .
6. Нека је $ABCD$ ромб такав да је $\angle BAD = 60^\circ$ и нека права p сече редом стране AB и BC у тачкама M и N тако да је збир дужи BM и BN једнак страници ромба. Доказати да је троугао DMN правилан.
7. Над ивицама троугла ABC у спољашњости конструисани су правилни троуглови ADB, BEC, CFA .
 - а) (Торичелијева тачка) Доказати да су дужи AE, BF, CD међусобно подударне и да се секу у једној тачки.
 - б) (Наполеонов троугао) Доказати да центри конструисаних троуглова чине темена правилног троугла.
8. Нека је у равни $\mathbb{E}^2$ дат троугао ABC и нека су B', C' тачке правих AB и AC такве да важи $\mathcal{B}(A, B, B')$ и $\mathcal{B}(A, C, C')$. Ако је P_a тачка у којој споља уписани круг који одговара темену A додирује страницу BC тог троугла, доказати да је $\mathcal{R}_{C, \angle C'CB} \circ \mathcal{R}_{A, \angle BAC} \circ \mathcal{R}_{B, \angle CBB'} = \mathcal{S}_{P_a}$.
9. Нека је t тангента описаног круга троугла ABC у темену A . Доказати да важи $\mathcal{G}_{\overrightarrow{CA}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{S}_t$.
10. Доказати да је четвороугао $ABCD$ тетиван ако и само ако важи $\mathcal{G}_{\overrightarrow{DA}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{CB}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{E}$.
11. Дата су два круга који имају пресечну тачку A . Конструисати праву која садржи A и на којој дати кругови одсецају подударне дужи.
12. Дат је круг k и праве p, q, r које се секу у центру тог круга. Конструисати троугао ABC који има уписани круг k , а праве p, q, r садрже бисектрисе унутрашњих углова код темена A, B, C редом.

СТЕРЕОМЕТРИЈА

- Постоји јединствена права нормална на два мимоилазни правама.
- Права је нормална на раван ако и само ако је нормална на два правама те равни које се секу.
- (Теорема о три нормале) Ако је права p нормала из тачке O на раван π и продире је у тачки P , а Q подножје нормале из P на праву $q \subset \pi$, тада је $OQ \perp q$.

- Дата је коцка $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.
 - Одредити угао између правих AB_1 и BC_1 .
 - Одредити угао између равни ACD_1 и $AB_1 C_1 D$.
 - Доказати да је раван $B_1 CD_1$ нормална на дуж AC_1 и дели је у размери $2 : 1$.
- Збир два угла при врху триедра већи је од трећег. Доказати.
- Равни од којих је свака одређена ивицом и симетралом наспрамне стране триедра имају заједничку праву. Доказати.
- Нека су углови при врху триедра једнаки редом $60^\circ, 45^\circ, 45^\circ$. Доказати да је диједар наспрам највеће стране прав.
- Доказати да се око сваког тетраедра може описати сфера, као и да се у сваки тетраедар може уписати сфера.
- (Тежиште тетраедра)** Дужи одређене средиштима наспрамних ивица тростране пирамиде (тетраедра) секу се у једној тачки која их полови. Доказати.
 - Доказати да тежиште тетраедра дели дужи одређене теменима и тежиштима наспрамних страна у односу $3 : 1$.
- Две наспрамне ивице неког тетраедра су међусобно подударне ако и само ако су дужи одређене средиштима осталих двају парова наспрамних ивица међусобно нормалне.
 - Две наспрамне ивице тетраедра су нормалне ако и само ако су дужи одређене средиштима осталих двају парова наспрамних ивица међусобно подударне.
- Доказати да је права одређена средиштима страница AC и BD тетраедра $ABCD$ уједно и њихова заједничка нормала ако и само ако је $AB = CD$ и $AD = BC$.
Деф. Тетраедар $ABCD$ је *ортогоналан* ако важи $AB \perp CD, AC \perp BD, AD \perp BC$.
- Висине AA' и BB' тетраедра $ABCD$ се секу ако и само ако је $AB \perp CD$. Доказати.
- Доказати да подножја висина из темена тетраедра представљају ортоцентре наспрамних пљосни ако и само ако је тетраедар ортогоналан.

ИЗОМЕТРИЈСКЕ ТРАНСФОРМАЦИЈЕ ПРОСТОРА

- Доказати $\mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_O = \mathcal{S}_O \circ \mathcal{S}_\pi \Leftrightarrow O \in \pi$.
- Доказати да је композиција непарног броја централних симетрија простора поново централна симетрија.
- Ако су A, B, C три тачке равни π , доказати да важи $\mathcal{G}_{\pi, \overrightarrow{CA}} \circ \mathcal{G}_{\pi, \overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{G}_{\pi, \overrightarrow{AB}} = \mathcal{S}_\pi$.
- Одредити тип изометрије $\mathcal{T}_{\overrightarrow{PP}} \circ \mathcal{S}_\pi$.
- Доказати да је композиција три раванске рефлексije којима су основе одређене бочним пљоснима тростране призме $ABCA'B'C'$ клизајућа рефлексija тог простора.
- Одредити тип и компоненте изометрије која представља композицију двеју осних рефлексija $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q$ еуклидског простора, у зависности од узајамног положаја правих p и q .
- Нека су OP, OQ, OR три међусобно нормалне дужи простора. Доказати да је композиција $\mathcal{Z}_{\overrightarrow{OR}} \circ \mathcal{Z}_{\overrightarrow{OQ}} \circ \mathcal{Z}_{\overrightarrow{OP}}$ транслација.
- Доказати да је у еуклидском простору композиција састављена од три раванске рефлексije којима су основе одређене пљоснима триедра осноротациона рефлексija.

ХИПЕРБОЛИЧКА ГЕОМЕТРИЈА

- Праве одређене основицом и противосновицом Сакеријевог четвороугла су хиперпаралелне. Доказати.
- Углови на противосновици Сакеријевог четвороугла су подударни и оштри. Доказати.
- Доказати да су два Ламбертова четвороугла $ABCD$ и $A'B'C'D'$ са оштрим угловима D и D' подударна ако је:

а) $AB = A'B', BC = B'C';$

б) $AB = A'B', AD = A'D';$

в) $AD = A'D', BC = B'C';$

г) $AD = A'D', CD = C'D';$

д) $AD = A'D', \angle D = \angle D';$

ђ) $AB = A'B', \angle D = \angle D'.$

4. Доказати да су два Сакеријева четвороугла $ABCD$ и $A'B'C'D'$ са основама AB и $A'B'$ подударна ако је:

- | | |
|-----------------------------|--|
| а) $AB = A'B', BC = B'C'$; | г) $AB = A'B', \angle C = \angle C'$; |
| б) $AB = A'B', CD = C'D'$; | д) $BC = B'C', \angle C = \angle C'$; |
| в) $BC = B'C', CD = C'D'$; | ђ) $CD = C'D', \angle C = \angle C'$. |

5. Ако су тачке P и Q средишта страница AB и AC троугла ABC , доказати да су праве BC и PQ међу собом хиперпаралелне.

6. Ако су A, B, C три разне тачке неке праве l и O тачка изван те праве, доказати да средишта A', B', C' дужи OA, OB, OC не припадају једној правој.

7. Доказати да је у Сакеријевом четвороуглу противосновица већа од основице.

8. Ако су P и Q средишта страница AB и AC троугла ABC , доказати да је $PQ < \frac{1}{2}BC$.

9. Нека је A_1 средиште хипотенузе BC правоуглог троугла ABC . Доказати да је дуж AA_1 мања од половине хипотенузе.

10. Ако је висина еквидистанте већа од нуле тада та еквидистанта није права. Доказати.

11. Праве p и q секу се у тачки S . Одредити праву a паралелну правој q у одређеном смеру и нормалну на правој p .

12. Праве p и q су паралелне. Одредити праву a паралелну правој q у одређеном смеру и нормалну на правој p .

13. Праве p и q су хиперпаралелне. Одредити праву a паралелну правој q у одређеном смеру и нормалну на правој p .

14. Нека су a, b и c међусобно паралелне праве, али не све у истом смеру. Нека су b' и c' управне из тачке A праве a на правама b и c . Одредити угао између правих b' и c' .

15. Два разна параболичка прамена имају заједничку праву. Доказати.

16. Нека су A, B, C, D тачке такве да су редом полуправе AB и DC , односно BC и AD паралелне. Доказати да су симетрале унутрашњих углова код темена A и C и спољашњих углова код темена B и D праве истог прамена.

17. Доказати да за три неколинеарне тачке A, B, C важи $\Pi(\frac{BC}{2}) < \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC)$.

18. Ако је у равни Лобачевског дат троугао ABC код кога је $\angle C$ прав, тј. $\angle C = R$, затим $\angle A = \Pi(a')$, $\angle B = \Pi(b')$, $BC = a$ и $AB = c$, доказати да је:

- а) $\angle A = \Pi(b) - \Pi(c + b')$;
- б) $\angle A = \begin{cases} \Pi(c - b') - \Pi(b) & , \text{ за } b' < c \\ 2R - \Pi(b) - \Pi(b' - c), & \text{ за } b' > c \end{cases}$;
- в) $\angle A = \begin{cases} \frac{1}{2}[\Pi(c - b') - \Pi(c + b')] & , \text{ за } b' < c \\ R - \frac{1}{2}[\Pi(b' + c) + \Pi(b' - c)], & \text{ за } b' > c \end{cases}$;
- г) $\Pi(b) = \begin{cases} \frac{1}{2}[\Pi(c + b') + \Pi(c - b')] & , \text{ за } b' < c \\ R - \frac{1}{2}[\Pi(b' + c) - \Pi(b' - c)], & \text{ за } b' > c \end{cases}$;
- д) $\Pi(a' - b) + \Pi(a + b') = R, \quad \Pi(b' - a) + \Pi(b + a') = R$.

ПОЕНКАРЕОВ ДИСК МОДЕЛ

1. У Поенкареовом диск моделу хиперболичке равни дате су h -права a и h -тачка A . Одредити h -праву n која садржи тачку A и управна је на праву a .

2. У Поенкареовом диск моделу дате су h -тачке A и B . Одредити h -симетралу дужи AB .

3. У Поенкареовом диск моделу дате су тачке X и Y . Конструисати h -круг l са центром у тачки X који садржи тачку Y .

4. У Поенкареовом диск моделу хиперболичке равни дате су h -тачке A и B . Конструисати h -тачку C такву да је h -троугао ABC правилан.

5. У Поенкареовом диск моделу дате су две праве које се секу. Одредити h -бисектрису угла којег одређују.

6. У Поенкареовом диск моделу конструисати h -дуж мере $\Pi^{-1}(\frac{R}{2})$.