

ГЕОМЕТРИЈА 2

задачи за вежбу

ПОДУДАРНОСТ

1. Нека су B_1 и C_1 редом средишта страница AC и AB троугла ABC . Доказати да подножја нормала из тачке A на симетралама унутрашњег и спољашњег угла код темена B припадају правој B_1C_1 .
2. У оштроуглом троуглу ABC тачка D је подножје висине из темена C и важи $AD = BC$. Ако је L подножје нормале из D на висину из темена A , доказати да је BL симетрала унутрашњег угла код темена B троугла ABC .
3. У троуглу ABC са правим углом код темена A , тачка D је подножје висине из темена A , тачка E је средиште дужи CD , а тачка F је средиште дужи AD . Доказати да важи $BF \perp AE$.
4. Нека су K и L средишта лукова AB и AC описаног круга троугла ABC који не садрже преостало теме. Означимо са D и E пресечне тачке праве KL са страницама AB и AC редом, а са S центар уписаног круга троугла ABC . Доказати да је четвороугао $ADSE$ ромб.
5. Дијагонале тетивног четвороугла $ABCD$ су међусобно нормалне и секу се у тачки S . Означимо са O центар описаног круга овог четвороугла, а са M, N, P, Q редом средишта његових страница AB, BC, CD, DA . Доказати да се дужи MP, NQ, OS међусобно полове.

СЛИЧНОСТ

1. У троуглу ABC тачке S и S_a су центри редом уписаног и споља уписаног круга који одговара темену A , E је пресечна тачка симетрале унутрашњег угла код темена A и странице BC и N је средиште лука BC круга описаног око троугла ABC који не садржи тачку A . Доказати да важи $AS \cdot AS_a = AE \cdot AN$.
2. Ако се на страницама AB и CD конвексног четвороугла $ABCD$ могу изабрати редом тачке M и N такве да је $MC \parallel AN$ и $MD \parallel BN$, доказати да је $ABCD$ траpez.
3. Круг k сече странице BC, CA, AB троугла ABC редом у тачкама D и D', E и E', F и F' . Ако су праве AD, BE, CF конкурентне, доказати да су праве AD', BE', CF' такође конкурентне.
4. Нека су P_a, Q_a, R_a додирне тачке споља уписаног круга троугла ABC који одговара темену A са страницама BC, CA, AB редом. Означимо са X, Y, Z пресечне тачке правих Q_aR_a, R_aP_a, P_aQ_a и правих BC, CA, AB редом. Доказати да су тачке X, Y, Z колинеарне.
5. Нека су B' и C' подножја висина из темена B и C оштроуглог троугла ABC , H његов ортоцентар и G пресек правих $B'C'$ и BC . Доказати да важи $\mathcal{H}(BH, CH; AH, GH)$.
6. Дат је правоугаоник $ABCD$ и тачке P, Q, S, T такве да важи $\mathcal{H}(A, C; P, Q)$ и $\mathcal{H}(B, D; S, T)$. Доказати да је четвороугао $PQST$ тетиван.

КОНСТРУКТИВНИ ЗАДАЦИ

1. Конструисати троугао ABC ако су задати следећи елементи:

1) $b + c, r, \alpha;$

2) $t_a, r, \beta - \gamma;$

3) $a, \rho, \alpha;$

4) $p, h_a, \rho_a;$

5) $t_a, h_b, \beta;$

6) $S_a, S_b, S_c.$

ИНВЕРЗИЈА

1. Ако су права p и круг l инверзни ликови при инверзији у односу на круг k , доказати да је права p радикална оса кругова k и l .
2. Дати су кругови k_1, k_2 са центрима O_1, O_2 редом и тачка A у њиховој спољашњости, која не припада правој O_1O_2 . Нека је l круг описан око троугла чија су темена тачка A и њене слике при инверзији у односу на k_1 и k_2 . Ако је L једна пресечна тачка круга l и праве O_1O_2 , одредити прецизно слике кругова k_1, k_2, l при инверзији у односу на произвољан круг са центром L .

- Нека се кругови k_1 и k_2 секу. Доказати да сви кругови који додирују k_1 и k_2 (споља) имају заједничку нормалу, тј. да постоји права или круг нормалан на све овакве кругове.
- Нека су O_1 и O_2 центри кругова k_1 и k_2 који се секу у тачкама A и B , а C и D редом тачке у којима праве AO_2 и AO_1 по други пут секу k_1 и k_2 . Доказати да је права AB ортогонална на круг описан око троугла ACD .
- Нека је p полуобим троугла ABC , а E и F тачке на правој BC такве да је $AE = AF = p$. Доказати да описани круг троугла AEF додирује споља уписани круг троугла ABC који одговара страници BC .
- Дати су кругови κ_1 и κ_2 и тачка A која им не припада. Конструисати круг l који је нормалан на кругове κ_1 , κ_2 и садржи тачку A .

ИЗОМЕТРИЈСКЕ ТРАНСФОРМАЦИЈЕ РАВНИ

- Нека је ABC правоугли троугао са правим углом код темена B . Доказати да је $\mathcal{G}_{\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{AB}} \circ \mathcal{S}_A = \mathcal{T}_{\overrightarrow{AC}}$.
- Ако су M и N средишта страница AB и AC троугла ABC , права p медијатриса странице BC , q права која садржи висину из темена A , доказати да је $\mathcal{S}_N \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_M = \mathcal{S}_p$.
- Дат је произвољан троугао ABC еуклидске равни. Означимо са S центар уписаног круга овог троугла, са P, Q, R тачке додира тог круга са страницама BC, AC, AB редом и усмерене углове са $\angle BAC = \alpha$, $\angle CBA = \beta$, $\angle ACB = \gamma$. Одредити тип и компоненте изометрија:
а) $\mathcal{S}_{SC} \circ \mathcal{S}_{SA} \circ \mathcal{S}_{SB}$; б) $\mathcal{R}_{C,2\gamma} \circ \mathcal{R}_{A,2\alpha} \circ \mathcal{R}_{B,2\beta}$; в) $\mathcal{R}_{C,\gamma} \circ \mathcal{R}_{A,\alpha} \circ \mathcal{R}_{B,\beta}$; г) $\mathcal{G}_{\overrightarrow{RP}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{QR}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{PQ}}$.
- Нека су праве p, q, r редом симетрале спољашњих углова код темена A, B, C троугла ABC . Доказати да је $\mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{G}_{AC, \vec{v}}$, где вектор $\vec{v}$ има исти правац и смер као вектор $\overrightarrow{AC}$, а интензитет му је једнак обиму троугла ABC .
- Нека су P, Q, R, S, T редом средишта страница AB, BC, CD, DE, EA конвексног петоугла $ABCDE$. Одредити тип и компоненте изометрије $\mathcal{S}_T \circ \mathcal{S}_S \circ \mathcal{S}_R \circ \mathcal{S}_Q \circ \mathcal{S}_P$.

СТЕРЕОМЕТРИЈА

- Нека раван π сече ивице AC, BC, BD, AD тетраедра $ABCD$ редом у тачкама P, Q, R, S . Доказати да је четвороугао $PQRS$ паралелограм ако и само ако је раван π паралелна са ивицама AB и CD .
- Одредити праву која садржи теме триедра и заклапа једнаке углове са његовим: а) странама; б) ивицама.
- Нека је у тетраедру $ABCD$ бочна ивица AD уједно и висина која одговара основи ABC . Доказати да се равни које садрже бочне ивице AD, BD, CD и нормалне су на наспрамне бочне плосни тетраедра секу по једној правој.
- У тетраедру $ABCD$ важи $AB \perp CD$ и $AC \perp BD$. Доказати да средишта свих шест ивица тетраедра припадају једној сфери и наћи њен центар.
- Нека је $ABCD$ тетраедар чије су наспрамне ивице AB и CD међусобно нормалне. Доказати да се праве одређене висинама AA и BB секу (у тачки H), праве одређене висинама CC и DD секу (у тачки H), при чему тачке H и H припадају заједничкој нормали мимоилазних правих AB и CD .

ИЗОМЕТРИЈСКЕ ТРАНСФОРМАЦИЈЕ ПРОСТОРА

- Ако су P и Q две произвољне тачке и π произвољна раван еуклидског простора, доказати да је композиција $\mathcal{S}_Q \circ \mathcal{S}_\pi \circ \mathcal{S}_P$ или раванска или клизајућа симетрија.
- Нека је $ABCD$ произвољан тетраедар и DD' висина из темена D . Одредити тип изометрије $\mathcal{S}_{DD'} \circ \mathcal{S}_{AB} \circ \mathcal{S}_{AC}$.
- Доказати да композиција $\mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_c$ три осне рефлексије еуклидског простора, чије осе a, b, c представљају праве одређене страницама неког троугла, представља завојни полуобртај.
- Нека је $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ квадар. Доказати да је композиција завојних полуобртаја $\mathcal{Z}_{\overrightarrow{CC_1}} \circ \mathcal{Z}_{\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{Z}_{\overrightarrow{AB}} \circ \mathcal{Z}_{\overrightarrow{A_1 A}}$ осна симетрија и одредити осу.
- Одредити тип изометрије која представља композицију четири раванске рефлексије еуклидског простора чије су основе одређене бочним странама четворостране пирамиде.

ХИПЕРБОЛИЧКА ГЕОМЕТРИЈА

1. Нека је $ABCD$ Сакеријев четвороугао са основицом AB . Ако су M и N редом произвољне тачке са правих BC и AD , доказати да је $AB \leq MN$.
2. Нека је $ABCD$ Ламбертов четвороугао са оштрим углом код темена D . Ако су P и Q средишта страница BC и AD , доказати да је $2PQ < AB + CD$.
3. Ако су оба пара наспрамних ивица конвексног четвороугла хиперболичке равни међусобно подударне дужи, доказати да су оне и хиперпаралелне.
4. У хиперболичкој равни дате су хиперпаралелне праве a и b . Конструисати праву c која је паралелна и са a и са b . Колико решења постоји?
5. Доказати да је полупречник круга уписаног у асимптотски троугао хиперболичке равни којем су сва три темена несвојствена једнак $\Pi^{-1}(\frac{2R}{3})$.

ПОЕНКАРЕОВ ДИСК МОДЕЛ

1. У Поенкареовом диск моделу хиперболичке равни дати су h -круг l и h -тачка A . Конструисати h -праву p која садржи дату h -тачку и додирује дати h -круг.
2. У Поенкареовом диск моделу дати су h -тачка X и h -права t која не садржи тачку X . Одредити h -круг k са центром у X који додирује h -праву t .
3. У Поенкареовом диск моделу конструисати h -дуж мере $\Pi^{-1}(\frac{R}{3})$.
4. У Поенкареовом диск моделу хиперболичке равни конструисати тежишну дуж из темена A h -троугла одређеног датим h -тачкама A, B, C .
5. У Поенкареовом диск моделу дати су h -права a и h -тачка A која јој не припада. Конструисати h -тачку B која је h -симетрична тачки A у односу на праву a .