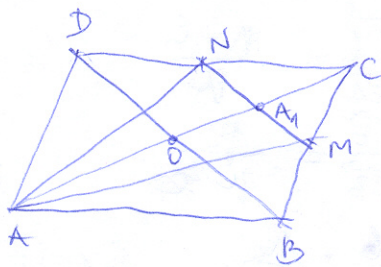


Решена първо колонирана из ET

28.11.2010.

1.



$$MN \cap AC = \{A_1\}$$

$\Rightarrow$: ABCD е паралелограм

$\Downarrow$
Съотношение AC и BD се равняват
 $AO = CO \quad BO = DO$

MN - средна линия $\triangle BCD \Rightarrow MN \parallel BD$

O - средина на BD $\Rightarrow A_1$ - средина на MN

$\Rightarrow$ AA₁ - медиана в $\triangle AMN$

$$\frac{CA_1}{A_1O} = \frac{CN}{DN} = 1 \Rightarrow A_1 - \text{средина на CO}$$

$$\Rightarrow OA_1 = \frac{1}{2} CO = \frac{1}{2} AO$$

$$\Rightarrow AO : OA_1 = 2 : 1$$

$\Leftarrow$: O - медиана на $\triangle AMN$

$\Rightarrow$ AA₁ - медиана в $\triangle AMN$

$\Rightarrow AO : OA_1 = 2 : 1$ и A₁ - средина на MN

MN - средна линия $\triangle BCD \Rightarrow MN \parallel BD$

$$OA_1 = \frac{1}{2} AO$$

$$\Rightarrow \frac{MA_1}{BO} = \frac{NA_1}{DO}$$

$$\Rightarrow BO = DO$$

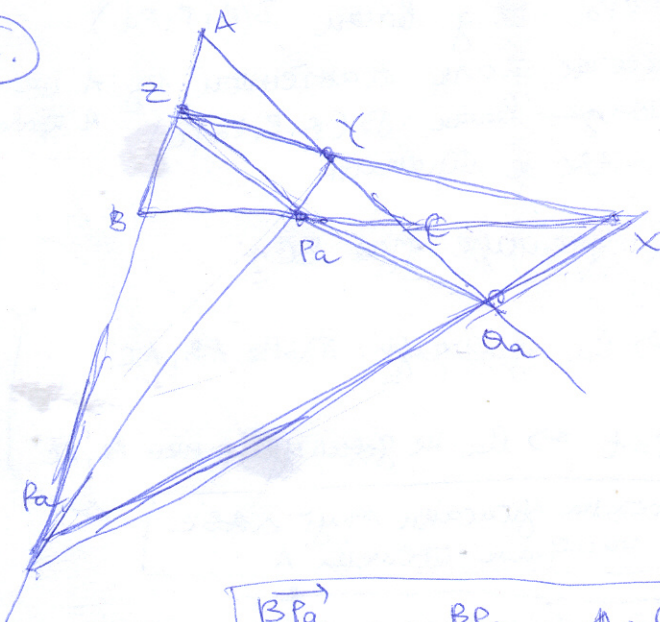
$$\frac{CA_1}{OA_1} = \frac{CN}{DN} = 1 \Rightarrow CA_1 = OA_1$$

$$\Rightarrow OA_1 = \frac{1}{2} OC$$

$$\Rightarrow AO = CO$$

ABCD - паралелограм

2.



a) $\triangle ABC$, права PaPa

Менделеев $\Rightarrow \oplus \quad \frac{\overrightarrow{APa}}{\overrightarrow{PaB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BX}}{\overrightarrow{XC}} \cdot \frac{\overrightarrow{COa}}{\overrightarrow{OaA}} = -1$

$$\frac{\overrightarrow{APa}}{\overrightarrow{PaB}} = - \frac{APa}{PaB} = - \frac{\mu}{\mu - c}$$

$$\frac{\overrightarrow{COa}}{\overrightarrow{OaA}} = - \frac{COa}{OaA} = - \frac{\mu - b}{\mu}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\overrightarrow{BX}}{\overrightarrow{XC}} &= - \frac{\mu - c}{\mu - b} \\ \frac{\overrightarrow{BX}}{\overrightarrow{XC}} &= - \frac{BPa}{PaC} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{BX}{XC} = - \frac{BPa}{PaC}$$

$$\frac{\overrightarrow{BPa}}{\overrightarrow{PaC}} = \frac{BPa}{PaC} = \frac{\mu - c}{\mu - b}$$

8) Сумато као у а), применом Менелажеве теореме на $\triangle ABC$ и праве PaA , остварено, PaA , добија се:

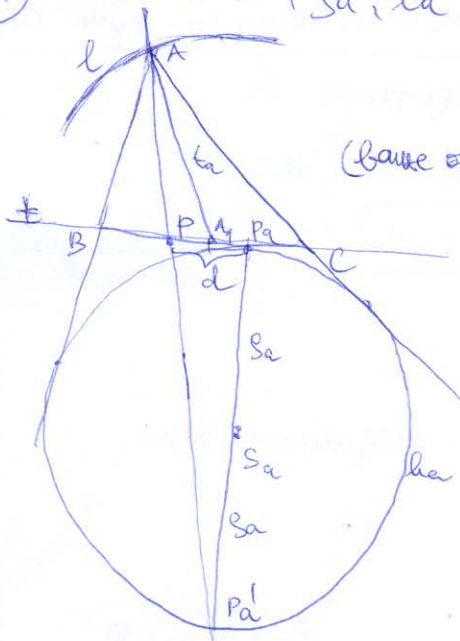
$$\begin{aligned} \ell(A, B; Z, Pa) & \text{ и } \frac{\overrightarrow{CY}}{\overrightarrow{CA}} = \frac{n-b}{n} \\ \ell(A, C; Y, Pa) & \text{ и } \frac{\overrightarrow{AZ}}{\overrightarrow{AB}} = \frac{n}{n-c} \end{aligned}$$

Замени: $\frac{\overrightarrow{BX}}{\overrightarrow{XC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CY}}{\overrightarrow{CA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AZ}}{\overrightarrow{AB}} = \left(-\frac{n-c}{n-b} \right) \cdot \frac{n-b}{n} \cdot \frac{n}{n-c} = -1$

Менелаже $\Rightarrow \triangle ABC$, праве x, y, z

x, y, z - коллинеарне

3. $d = b - c, Sa, ta$



АНАЛИЗА

(важе ознаке из B3)

На основу B3 имамо да је A_1 средине PPa . Такође, важи $B(A, P, Pa)$ (Pa - гравитациони центар италијанске државе Pa на ha), као и $PPa = AC - AB$, па је $\triangle PPaA'$ контејнерски.

КОНСТРУКЦИЈА

- $ha(Sa, Pa)$
 - $Pa \in ha$ - произвољно
 - $t \ni Pa$ - тангентна на ha у Pa ($t \perp PaSa$)
 - $P \in t$: $PPa = d$
 - A_1 - средине PPa
 - Pa' - италијански центар италијанске државе Pa на ha
 - $\ell(A_1, ta)$
 - $A \in \ell \cap PPa'$, т.ј. важи $B(A, P, Pa')$
 - B, C - пресеке италијанске државе из A на ha , тако да важи $B(B, P, Pa, C)$ и праве t
- $\triangle ABC$ је изражен

ДОКАЗ

(ПК) $B, C \in t, B, C \in Pa$?

(ПК) t - тангентна на ha } $\Rightarrow ha$ - гравитациони центар BC

(ПК) $B, C \in$ тангентна из A на ha } $\Rightarrow ha$ - гравитациони центар AB, AC

(ПК) $B(A, P, Pa) \Rightarrow A_1 Sa \div BC = t \Rightarrow ha$ не гравитациони центар AB, AC

ha - савијена линија кроз $\triangle ABC$ на којој је италијански центар A

(ПК) Sa - тангентна линија на ha

Sa - тангентна линија савијеној линији $\triangle ABC$ на којој је италијански центар A

(ПК) $A_1 P \perp Pa'$ - комбинаторика

(ПК) $P \in BC$

(ПК) Pa' - гравитационното съпротивление са Pa та Pa'

$B_3 \Rightarrow P$ - заската съгласно
иначе утвърди
кръга $\triangle ABC$ и BC

(ПК) $PA = d$

$(B_3) \Rightarrow$
 $PPa = AC - AB$

$$d = AC - AB$$

(ПК) A_1 - средините PPa

B_3
 A_1 - средините BC

$\Rightarrow AA_1$ - медианата към $\triangle ABC$

(ПК) $AE \perp (A_1, ta) \Rightarrow AA_1 = ta$

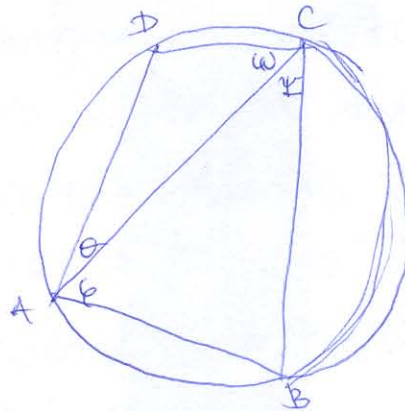
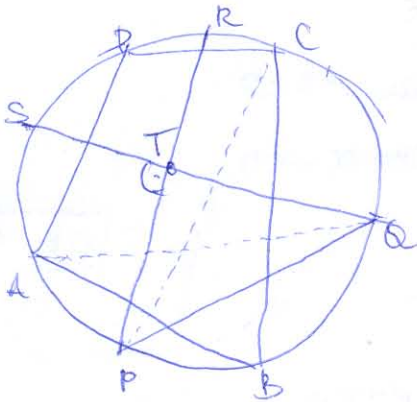
медианата към $\triangle ABC$
из медиана $A = ta$

ДИСКУСИЯ

Желани "проблематични" корак у конструиранју је раскрсак $A-P-Pa'$
 $\triangle PPaPa'$ - правоугаолен $\Rightarrow \angle PPaPa' = \angle A_1PPa'$ - слични

Закле: $ta > \frac{d}{2} \rightarrow$ јединствено решење
 $ta \leq \frac{d}{2} \rightarrow$ нема решења

$A \in l$ $\rightarrow$ постојат и
говори се за баку $AA_1 > A_1P$
 $ta > \frac{d}{2}$



$$PR \cap QS = \{T\}$$

$$\begin{aligned} \angle AQP &= \angle ACP \text{ (периферични угаоли над централом } \widehat{AP}) \\ &= \frac{1}{2} \angle ACB \text{ (P-средините луке } \widehat{AB}) \\ &= \boxed{\frac{\varphi}{2}} \end{aligned}$$

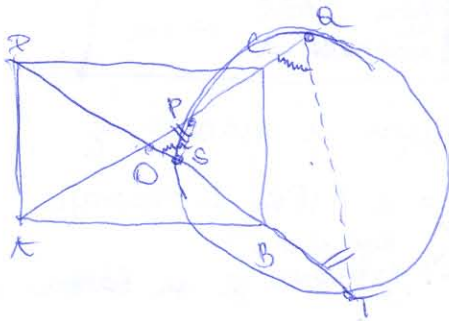
$$\begin{aligned} \angle AQS &= \angle ACS \text{ (периф. над } \widehat{AS}) \\ &= \frac{1}{2} \angle ACD \text{ (S-средините } \widehat{AB}) \\ &= \boxed{\frac{\omega}{2}} \end{aligned} \Rightarrow \angle PQT = \angle AQP + \angle AQS = \boxed{\frac{\varphi + \omega}{2}}$$

$$\begin{aligned} \angle CQP &= \angle CAR \text{ (периф. над } \widehat{CR}) \\ &= \frac{1}{2} \angle CAD \text{ (R-средините } \widehat{CD}) \\ &= \boxed{\frac{\theta}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \angle CQA &= \angle CAA \text{ (периф. над } \widehat{CA}) \\ &= \frac{1}{2} \angle CAB \text{ (Q-средините } \widehat{BC}) \\ &= \boxed{\frac{\psi}{2}} \end{aligned} \Rightarrow \angle QPT = \angle CQP + \angle CQA = \boxed{\frac{\psi + \theta}{2}}$$

$$\left. \begin{aligned} \angle BAD + \angle BCD &= (\varphi + \theta) + (\psi + \omega) \\ \angle BAD + \angle BCD &= 180^\circ \quad (ABCD - \text{вписується}) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\varphi + \theta + \psi + \omega = 180^\circ}$$

$$\begin{aligned} \boxed{\Delta PAT} : \angle PTA &= 180^\circ - (\angle PAT + \angle APT) \\ &= 180^\circ - \left(\frac{\varphi + \omega}{2} + \frac{\psi + \theta}{2} \right) \\ &= 180^\circ - \frac{180^\circ}{2} \\ &= \boxed{90^\circ} \Rightarrow \boxed{PR \perp AS} \end{aligned}$$



Лема K, L, M, N - коллинеарні точки
 O - перетин KL

$$\mathcal{H}(K, L; M, N) \Leftrightarrow OK^2 = OM \cdot ON$$

Довед. Бачимо (ми зображаємо Π - жовтуху)

Ми бачимо еквівалентність $\Rightarrow$ з лемми.

O - перетин діагоналей паралелограма $ABCD$

$\Rightarrow O$ - середина AC, BD $\sim OA = OB = OC = OD$

$$\mathcal{H}(A, C; P, Q) \xrightarrow{\text{Лема}} OA^2 = OC^2 = OP \cdot OQ$$

$$\mathcal{H}(B, D; S, T) \xrightarrow{\text{Лема}} OB^2 = OD^2 = OS \cdot OT$$

$$\Rightarrow \boxed{OP \cdot OQ = OS \cdot OT}$$

$$\Rightarrow \Delta OPS \sim \Delta OTQ \quad \left(\begin{aligned} \angle POS &= \angle TOQ \\ OP \cdot OQ &= OS \cdot OT \Rightarrow \frac{OP}{OS} = \frac{OT}{OQ} \end{aligned} \right)$$

$\Downarrow$

$$\begin{aligned} \angle OPS &= \angle OTQ \\ \angle OSP &= \angle OQT \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \angle SPA + \angle STA =$$

$$(180^\circ - \angle OPS) + \angle STA = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \boxed{PAST - \text{вписується}}$$