

EUKLIDSKA GEOMETRIJA – septembar 2010. godine

1. Ako ortocentar oštroglog trougla ABC deli dve visine u jednakom odnosu, računajući od temena trougla, dokazati da je taj trougao jednakokrak.

rešenje: Neka su A' i B' podnožja visina iz temena A i B , i neka je H ortocentar $\triangle ABC$. Prema uslovu zadatka važi

$$AH : HA' = BH : HB'. \quad (1)$$

S druge strane,

$$\left. \begin{array}{l} \angle AHB' \cong \angle A'HB \quad (\text{unakrsni}) \\ \angle HB'A \cong \angle BA'H \quad (\text{pravi}) \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AHB' \sim \triangle BA'H.$$

Odatle sledi:

$$AH : HB' = BH : HA'. \quad (2)$$

Iz (1) i (2) dobijamo:

$$AH = \frac{HA'}{HB'} BH = \left(\frac{HA'}{HB'} \right)^2 AH \Rightarrow HA' \cong HB' \Rightarrow AH \cong BH$$

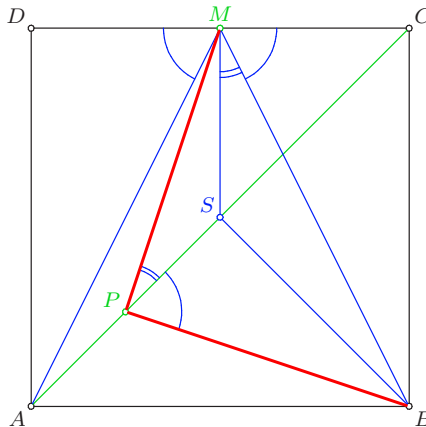
Dakle, $\triangle AHB$ je jednakokrak, pa je $\angle HAB \cong \angle ABH$. Odatle, i iz podudarnosti uglova $\angle B'AH$ i $\angle HBA'$, sledi

$$\begin{aligned} \angle CAB &= \angle CAA' + \angle A'AB = \angle B'AH + \angle HAB \\ &= \angle HBA' + \angle ABH = \angle B'BC + \angle ABB' \\ &= \angle ABC \\ \angle CAB &\cong \angle ABC \Rightarrow \triangle ABC \text{ - jednakokrak.} \end{aligned}$$

2. Neka je M središte ivice CD kvadrata $ABCD$ i P tačka dijagonale AC takva da je $3AP = PC$. Dokazati da je $\angle BPM = \frac{\pi}{2}$.

rešenje:

Označimo sa S centar kvadrata $ABCD$ ivice a .



$$\left. \begin{array}{l} \triangle AMD : \\ \angle MDA = \frac{\pi}{2} \\ DA = a \\ MD = \frac{a}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AMB \sim \triangle BSP \Rightarrow \angle AMD \cong \angle SPB$$

$$\left. \begin{array}{l} \triangle BMS : \\ \angle MSB = \frac{3\pi}{4} \\ SM = \frac{a}{2} \\ BS = \frac{a}{\sqrt{2}} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle BMS \sim \triangle PSM \Rightarrow \angle BMS \cong \angle MPS$$

Kako je $CM \cong MD$, $BC \cong AD$, $\angle BCM = \angle MDA = \frac{\pi}{2}$, to je

$$\triangle BCM \cong \triangle DAM \Rightarrow \angle CMB \cong \angle AMD.$$

Odavde dobijamo:

$$\angle BPM = \angle BPS + \angle SPM = \angle AMD + \angle BMS = \angle AMD + \frac{\pi}{2} - \angle CMB = \frac{\pi}{2}.$$

3. Ako su $\mathcal{R}_{A,\alpha}$ i $\mathcal{R}_{B,\beta}$ dve rotacije neke ravni, odrediti sve tačke X te ravni za koje je $\mathcal{R}_{A,\alpha}(X) = \mathcal{R}_{B,\beta}(X)$.

rešenje: Neka su a, b, c prave takve da važi:

$$c \ni A, B, \quad A \in a, \quad \alpha = 2\angle(a, c), \quad B \in b, \quad \beta = 2\angle(b, c).$$

Tada:

$$\mathcal{R}_{A,\alpha} = \mathcal{R}_{B,\beta} \Rightarrow \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_a = \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_b \Rightarrow \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_b = \mathcal{E}.$$

$$\text{a) } a \cap b = \{O\}, \quad \varphi = 2\angle(b, a)$$

$$X = \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_b(X) = \mathcal{R}_{O,\varphi}(X) \iff X \equiv O \vee \varphi = 2\pi$$

$$\text{Ako je } \angle(b, a) = \pi, \text{ onda je } a \equiv b \iff \alpha = \beta = 0.$$

$$\text{b) } a \parallel b \Rightarrow \alpha = \beta$$

$$X = \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_b(X) = \mathcal{T}_{\overrightarrow{PQ}}(X) \iff \overrightarrow{PQ} = \vec{0} \iff a \equiv b; \iff \alpha = \beta = 0.$$

Dakle, jedina tačka koja zadovoljava uslove je $X = a \cap b$.

4. Dokazati da se oko svakog tetraedra $ABCD$ u prostoru E^3 može opisati sfera.

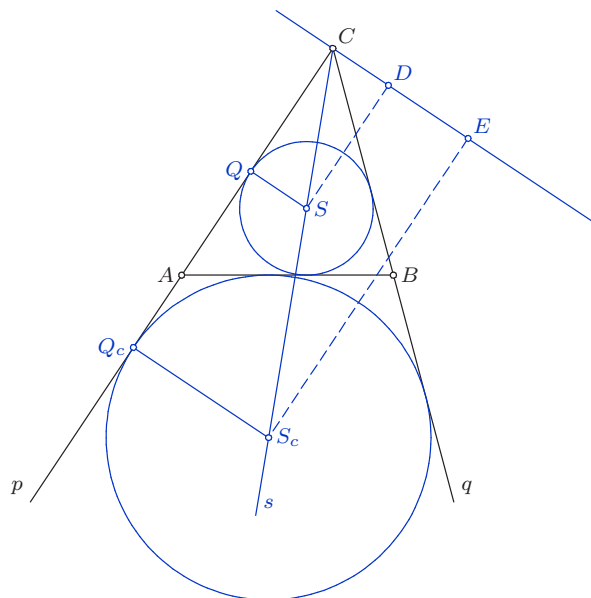
rešenje: Geometrijsko mesto tačaka ravni E^2 podjednako udaljenih od tačaka A, B, C je centar kruga P opisanog oko $\triangle ABC$, a geometrijsko mesto tačaka prostora E^3 podjednako udaljenih od tačaka A, B, C je prava p koja sadrži tačku P i ortogonalna je na ravan određenu tačkama A, B, C . Slično, neka je q geometrijsko mesto tačaka podjednako udaljenih od tačaka A, B, D .

Neka je $\{O\} = p \cap q$, tada je O centar tražene sfere:

$$\left. \begin{array}{l} O \in p \Rightarrow d(O, A) = d(O, B) = d(O, C) \\ O \in q \Rightarrow d(O, A) = d(O, B) = d(O, D) \end{array} \right\} \Rightarrow d(O, A) = d(O, B) = d(O, C) = d(O, D) = r.$$

5. U ravni E^2 konstruisati $\triangle ABC$ kome su poluprečnici upisanog kruga i spolja pripisanog kruga koji odgovara temenu C podudarni s datim dužima ρ, ρ_c , a unutrašnji ugao kod temena C podudaran s datim uglom γ .

rešenje:



ANALIZA: Neka je S centar kruga κ upisanog u $\triangle ABC$, a S_c centar spolja pripisanog kruga κ_c koji odgovara temenu C . Označimo sa Q i Q_c redom dodirne tačke upisanog i spolja pripisanog kruga sa stranicom AC . Tada je $SQ \cong \rho$, $S_cQ_c \cong \rho_c$, $\angle BCA = \gamma$.

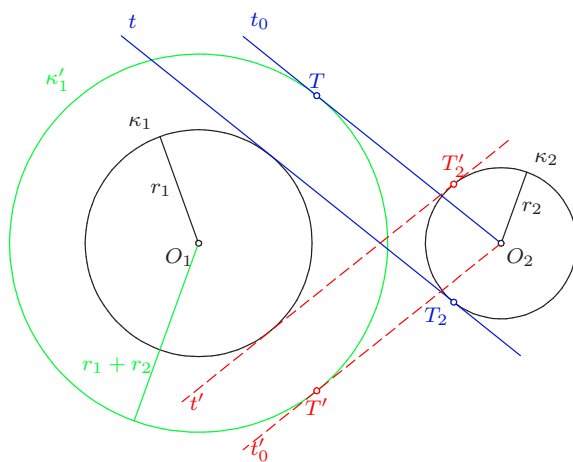
Stranica AB je zajednička unutrašnja tangenta krugova κ i κ_c .

KONSTRUKCIJA:

- p, q : $p \cap q = \{C\}$, $\angle(p, q) = \gamma$
- s : simetrala $\angle(p, q)$
- D, E : $C \in DE$, $DE \perp p$, $DC \cong \rho$, $EC \cong \rho_c$
- S, S_c : $S, S_c \in s$, $SD \parallel p$, $S_cE \parallel p$
- κ, κ_c : $\kappa(S, \rho)$, $\kappa_c(S_c, \rho_c)$
- t - zajednička unutrašnja tangenta krugova κ i κ_c
- A, B : $t \cap p = \{A\}$, $t \cap q = \{B\}$

Pomoćna konstrukcija: zajednička unutrašnja tangenta krugova $\kappa_1(O_1, r_1)$ i $\kappa_2(O_2, r_2)$.

Ako se krugovi κ_1 i κ_2 ne seku, konstruišemo krug $\kappa'_1(O_1, r_1 + r_2)$ i tangentu t_0 (jednu) iz tačke O_2 na njega. Konstruišemo pravu p koja sadrži tačku O_2 i normalna je na t_0 i označimo sa T_2 njenu presečnu tačku sa krugom κ_2 koja je sa iste strane prave t_0 kao i tačka O_1 . Konstruišemo pravu t : $T_2 \in t$, $t \parallel t_0$. Prava t je jedna od dve zajedničke unutrašnje tangente krugova κ_1 i κ_2 (druga se konstruiše analogno koristeći drugu tangentu iz O_2 na κ'_1).



Ako se krugovi κ_1 i κ_2 seku, zajednička tangenta ne postoji.

DOKAZ: Prema konstrukciji, prave p, q i t su zajedničke tangente krugova $\kappa(S, \rho)$ i $\kappa_c(S_c, \rho_c)$, pa su to redom upisani i spolja pripisani krug trougla koji odgovara temenu C . Prema konstrukciji, $\angle BAC = \angle(q, p) = \gamma$.

DISKUSIJA: Rešenje postoji ako se krugovi κ i κ_c ne seku:

$$\rho + \rho_c \leq SS_c = CS_c - CS = \frac{SQ_c}{\sin \frac{\gamma}{2}} - \frac{SQ}{\sin \frac{\gamma}{2}} = \frac{\rho_c - \rho}{\sin \frac{\gamma}{2}} \iff \sin \frac{\gamma}{2} \leq \frac{\rho_c - \rho}{\rho_c + \rho}$$

Ako je u ovom uslovu ispunjena stroga nejednakost, postoje dve zajedničke unutrašnje tangente, te postoje i dva rešenja.