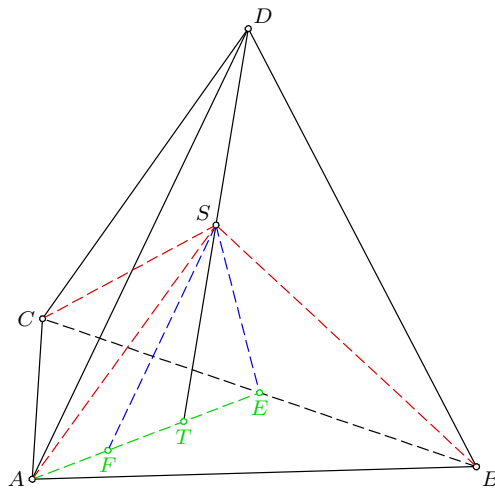


EUKLIDSKA GEOMETRIJA – II kolokvijum, januar 2010. godine

1. Neka je $ABCD$ pravilan tetraedar ivice a i S središte visine iz temena D . Dokazati da su AS , BS i CS tri uzajamno ortogonalne prave.

rešenje: Označimo sa T podnožje visine iz temena D na ravan određenu tačkama A, B, C . Kako je $ABCD$ pravilan tetraedar, T je težište, ortocentar i centar opisanog i upisanog kruga $\triangle ABC$.



Neka je E presek pravih AT i BC , a F središte duži AT .

$$\begin{aligned} T - \text{ortocentar } \triangle ABC &\implies AE - \text{visina } \triangle ABC \\ T - \text{težište } \triangle ABC &\implies AF \cong FT \cong TE \\ DT - \text{visina tetraedra } ABCD &\implies \angle FTS = \angle ETS = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Oдавде sledi da je $\triangle FTS \cong \triangle ETS$, pa je $SF \cong SE$.

Kako je su tačke S i F središta duži DT i AT respektivno, to je SF srednja linija $\triangle DTA$, pa imamo da je $SF \parallel DA$ i $SF = \frac{a}{2}$. Imamo:

$$\left. \begin{aligned} SF \cong SE &\implies SE = \frac{a}{2} \\ E - \text{središte duži } BC &\implies EB = EC = \frac{a}{2} \end{aligned} \right\} \implies E\text{-centar kruga opisanog oko } \triangle BSC$$

Dakle, prečnik kruga BC se iz tačke S vidi pod pravim uglom, tj. $BS \perp CS$.

Slično se pokazuje da je $AS \perp BS$.

2. Ako su A, B, C, D četiri razne tačke neke ravni π prostora E^3 , dokazati da je

$$\mathcal{G}_{\pi; \overrightarrow{DA}} \circ \mathcal{G}_{\pi; \overrightarrow{CD}} \circ \mathcal{G}_{\pi; \overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{G}_{\pi; \overrightarrow{AB}} = \mathcal{E}.$$

rešenje:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\pi; \overrightarrow{DA}} \circ \mathcal{G}_{\pi; \overrightarrow{CD}} \circ \mathcal{G}_{\pi; \overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{G}_{\pi; \overrightarrow{AB}} &= \mathcal{T}_{\overrightarrow{DA}} \circ \mathcal{S}_{\pi} \circ \mathcal{S}_{\pi} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{CD}} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{S}_{\pi} \circ \mathcal{S}_{\pi} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} = \\ \mathcal{T}_{\overrightarrow{DA}} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{CD}} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} &= \mathcal{T}_{\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}} = \mathcal{T}_{\vec{0}} = \mathcal{E}. \end{aligned}$$

3. U ravni E^2 date su tačke A i B i duž ℓ . Konstruisati tačke C i D tako da važi $\mathcal{H}(A, B; C, D)$ i $CD \cong \ell$.

rešenje:

Lema: Neka je κ_1 krug nad prečnikom AB , a κ_2 proizvoljni krug koji sadrži tačke C i D , takve da je $\mathcal{B}(A, C, B, D)$. Tada: $\mathcal{H}(A, B; C, D) \Leftrightarrow \kappa_1 \perp \kappa_2$.

Dokaz: Neka je O_1 centar kruga κ_1 i O_2 centar kruga κ_2 . Neka je $T \in \kappa_1 \cap \kappa_2$.

$\Rightarrow: \mathcal{H}(A, B; C, D)$

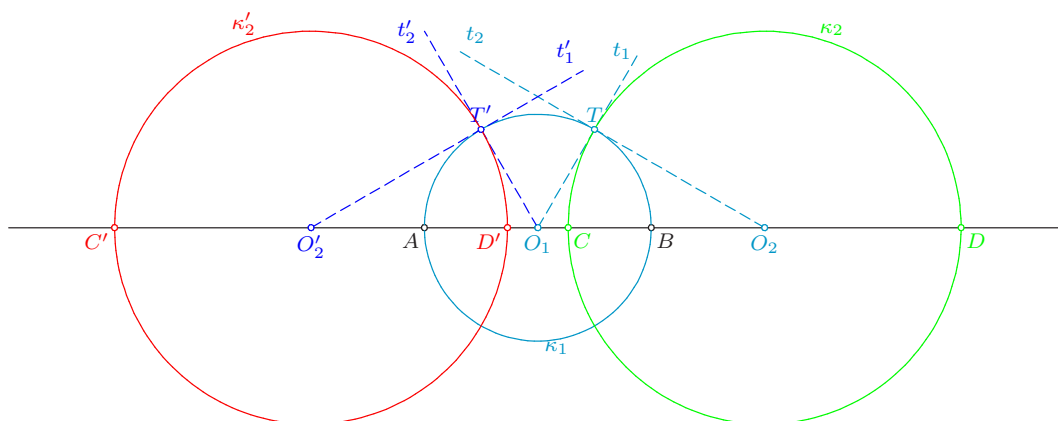
$A, T \in \kappa_1 \Rightarrow AO_1 = TO_1$ i važi $O_1A^2 = O_1C \cdot O_1D$, tj. $O_1T^2 = O_1C \cdot O_1D$. Iz svojstva potencije u odnosu na krug, sledi da je T dodirna tačka kruga κ_2 tangente iz tačke O_1 na krug κ_2 , odakle sledi da je $\angle O_1TO_2 = \frac{\pi}{2}$, odnosno $\kappa_1 \perp \kappa_2$.

$\Leftarrow: \kappa_1 \perp \kappa_2$

Prava O_1T je tangenta na krug κ_2 , pa iz svojstava potencije u odnosu na krug važi $O_1T^2 = O_1C \cdot O_1D$.

$A, T \in \kappa_1 \Rightarrow AO_1 = TO_1$, pa važi i $O_1A^2 = O_1C \cdot O_1D$. Kako O_1 pripada tangenti na κ_2 , važi raspored $\mathcal{B}(A, O_1, C, B, D)$, pa je $\mathcal{H}(A, B; C, D)$.

ANALIZA: Neka je κ_2 upravo krug nad prečnikom $CD \cong \ell$. Neka su tačke O_1 i O_2 redom središta duži AB i CD . Ako je T jedna presečna tačka krugova κ_1 i κ_2 , tada je $\triangle O_1TO_2$ pravougli.



KONSTRUKCIJA:

- O_1 : $O_1 = S(AB)$
- $\triangle O_1TO_2$: $O_2 \in AB$, $O_1T \cong O_1A$, $O_2T = \frac{\ell}{2}$, $\angle O_1TO_2 = \frac{\pi}{2}$
- κ_2 : krug sa centrom u tački O_2 , poluprečnika $\frac{\ell}{2}$
- C, D : $\kappa_2 \cap AB = \{C, D\}$

DOKAZ: Prema konstrukciji, CD je prečnik kruga κ_2 ($O, \frac{\ell}{2}$), pa je $CD \cong \ell$.

Prema konstrukciji, O_1T je tangenta na krug κ_2 , a O_2T je tangenta na krug κ_1 , i $\angle O_1TO_2 = \frac{\pi}{2}$, pa je $\kappa_1 \perp \kappa_2$. Na osnovu *leme* važi $\mathcal{H}(A, B; C, D)$

DISKUSIJA: $\triangle O_1TO_2$ smo mogli da konstruišemo na dva načina: tako da važi $\mathcal{B}(A, O_1, B, O_2)$ ili $\mathcal{B}(O_2, A, O_1, B)$. Ovim dvema mogućnostima odgovaraju redom rešenja $\mathcal{B}(A, C, B, D)$ i $\mathcal{B}(C, A, D, B)$. Tačke C i D mogu biti i suprotno označene, tako da postoje 4 rešenja.

4. Dokazati da kod $\triangle ABC$ u ravni E^2 simetrale spoljašnjih uglova seku prave određene naspramnim stranicama u kolinearnim tačkama.

rešenje: Neka su sa $\overline{s}_A, \overline{s}_B, \overline{s}_C$ označene simetrale spoljašnjih uglova kod temena A, B, C , $\triangle ABC$.

$$\begin{aligned}\overline{s}_B \cap AC &= \{D\} \quad \wedge \quad \mathcal{B}(A, C, D) \perp \mathcal{B}(C, A, D) \quad \implies \quad \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DC}} < 0 \\ \overline{s}_C \cap AB &= \{E\} \quad \wedge \quad \mathcal{B}(A, B, E) \perp \mathcal{B}(B, A, E) \quad \implies \quad \frac{\overrightarrow{BE}}{\overrightarrow{EA}} < 0 \\ \overline{s}_A \cap BC &= \{F\} \quad \wedge \quad \mathcal{B}(B, C, F) \perp \mathcal{B}(C, B, F) \quad \implies \quad \frac{\overrightarrow{CF}}{\overrightarrow{FB}} < 0\end{aligned}$$

Važi:

$$\left. \begin{aligned} AD : CD &= BA : BC \\ AE : BE &= CA : CB \\ BF : CF &= AB : AC \end{aligned} \right\} \implies \frac{AD}{DC} \cdot \frac{CF}{FB} \cdot \frac{BE}{EA} = \frac{AB}{BC} \cdot \frac{AC}{AB} \cdot \frac{BC}{AC} = 1$$

Ako uzmemo u obzir raspored tačaka dobijamo da je

$$\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CF}}{\overrightarrow{FB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BE}}{\overrightarrow{EA}} = -1,$$

pa su, na osnovu Menelajevе teoreme, tačke D, E, F kolinearne.