

EUKLIDSKA GEOMETRIJA – februar 2010. godine

1. Ako su p i q dve mimoilazne prave, dokazati da postoji jedinstvena ravan π koja sadrži pravu p i paralelna je sa pravom q .

rešenje: U prostoru $\mathbb{E}^3$ prava q je paralelna sa ravni π ako i samo ako je $q \subset \pi$ ili $q \cap \pi = \emptyset$.

Ako su p i q dve mimoilazne prave, onda one nemaju zajedničkih tačaka.

Dokaz: Neka je $p \cap q = \{X\}$. Svaka prava sadrži bar dve tačke, tako da postoje tačke $A \in p$ i $B \in q$ različite od tačke X . Postoji jedinstvena ravan α koja sadrži tačke A, B, X . Iz $A, X \in \alpha$ i $B, X \in \alpha$ sledi $p, q \subset \alpha$, a ovo je u suprotnosti sa definicijom mimoilaznih pravih. $\square$

Za svaku tačku Q i pravu p postoji jedinstvena prava q takva da je $Q \in q, p \parallel q$.

Dokaz: Ako je $Q \in p$, tada je $q \equiv p$. Ako $Q \notin p$, tada, na osnovu Plejferove aksiome, u ravni određenoj njima postoji jedinstvena prava q takva da $Q \in q$ i $p \cap q = \emptyset$, tj. $p \parallel q$. $\square$

Ako se prave p i q seku u jednoj tački, tada postoji jedinstvena ravan π koja ih sadrži.

Dokaz: Neka je $p \cap q = \{X\}$. Na osnovu aksioma incidencije, imamo svaka prava sadrži bar dve tačke i da postoji jedinstvena prava koja sadrži dve razne tačke. Neka su $A \in p$ i $B \in q$, $A, B \neq X$. Ako bi tačke A, B, X bile kolinearne, zbog jedinstvenosti prave kroz tačke A i X , sledilo bi da je $B \in p$, što je kontradikcija jer je $X \neq B$ jedina zajednička tačka pravih p i q . Dakle, tačke su nekolinearne, pa se iz aksioma incidencije lako dobija da postoji jedinstvena ravan $\pi \supset A, B, X$. Pošto tačke A i X pripadaju ravni π , sve tačke prave p pripadaju ravni π . Slično, $q \subset \pi$. $\square$

Slično se pokazuje i tvrđenje da postoji jedinstvena ravan koja sadrži dve paralelne prave.

Neka je P tačka takva da $P \in p$. Prema prethodnom, $P \notin q$ i postoji jedinstvena prava $p' : P \in p', p' \parallel q$. Prave p i p' se seku u tački P , pa **postoji jedinstvena** ravan π koja ih sadrži. Treba pokazati $q \parallel \pi$, odnosno $q \cap \pi = \emptyset$.

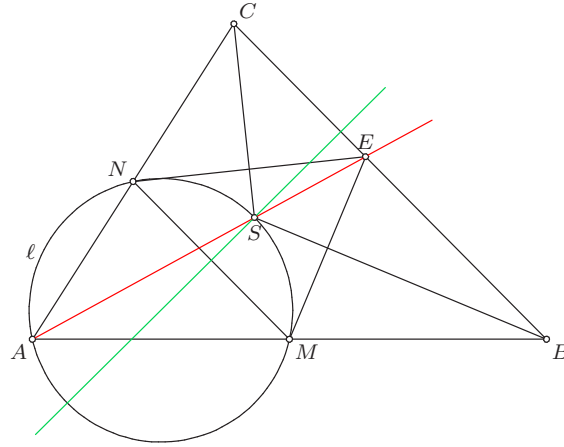
Iz $q \parallel p'$ sledi da postoji ravan α koja sadrži prave p' i q . Ako bi $q \cap \pi = \{X\}$, tada bi $X \in \alpha$, odnosno $X \in \alpha \cap \pi$, a to je prava p' . Ovo je nemoguće jer se prave p' i q ne seku.

2. U trouglu $\triangle ABC$ važi $BC = \frac{1}{2}(AB + AC)$. Neka su tačke M i N središta ivica AB i AC , a ℓ opisan krug trougla $\triangle AMN$. Dokazati da središte upisanog kruga trougla $\triangle ABC$ pripada krugu ℓ .

rešenje:

Lema 1: Bisektrisa unutrašnjeg ugla trougla seče naspramnu stranicu u odnosu susednih stranica.

Lema 2: Bisektrisa unutrašnjeg ugla trougla, medijatrisa naspramne stranice i krug opisan oko trougla seku se u jednoj tački.



Neka je E presek bisektrise unutrašnjeg ugla kod temena A i prave BC . Na osnovu *leme 1*, važi $\mathcal{B}(B, E, C)$ i $BE : CE = AB : AC$. Odavde imamo:

$$\begin{aligned} BE &= \frac{AB}{AC} CE \\ BC &= BE + EC = \frac{AB}{AC} CE + CE = \frac{AB + AC}{AC} CE \\ BC &= \frac{1}{2}(AB + AC) \end{aligned}$$

Iz prethodnog sledi da je $AC = 2CE$. Slično se pokazuje da je $AB = 2BE$.

Tačka M je središte duži AB , pa je $BM = \frac{1}{2}AB = BE$. Dakle, $BM \cong BE$, tj. $\triangle BEM$ je jednakokraki, pa je bisektrisa $\angle MBE$ ujedno i medijatrika duži EM . Analogno se pokazuje da je bisektrisa $\angle ECN$ medijatrika duži EN .

Neka je sa S označen centar kruga upisanog u $\triangle ABC$, tj. S je presek bisektrisa uglova $\angle ABC \cong \angle MBE$ i $\angle BCA \cong \angle ECN$. Uočimo $\triangle MEN$: medijatrike stranica EN i EM se seku u jednoj tački, te je S centar opisanog kruga oko $\triangle MEN$.

Krug ℓ je opisan oko $\triangle AMN$. Iz *leme 2* sledi da se bisektrisa $\angle NAM$ i medijatrika stranice MN seku na krugu ℓ . Iz prethodnog sledi da tačka S pripada medijatriki stranice MN i bisektrisi $\angle CAB \cong \angle NAM$, pa je upravo S tražena tačka.

3. Dokazati da je četvorougao $ABCD$ neke ravni E^2 tetivan ako i samo ako je $\mathcal{G}_{\overrightarrow{DA}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{CD}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{E}$.

rešenje:

Klizajuća refleksija je kompozicija translacije $\mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}}$ i osne refleksije $\mathcal{S}_{PP'}$ te ravni, a pošto one imaju zajedničku osu PP' važi: $\mathcal{G}_{\overrightarrow{PP'}} = \mathcal{S}_{PP'} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{PP'}} \circ \mathcal{S}_{PP'}$.

Rotacija oko tačke O za ugao α nazivamo transformaciju $\mathcal{R}_{O,\alpha}$ određenu relacijom $\mathcal{R}_{O,\alpha} = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$, gde je $O = p \cap q, \alpha = 2\angle(p, q)$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} &= \mathcal{G}_{\overrightarrow{DA}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{CD}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{G}_{\overrightarrow{AB}} \\
&= \mathcal{S}_{DA} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{DA}} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{CD}} \circ \mathcal{S}_{CD} \circ \mathcal{S}_{BC} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{BC}} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} \circ \mathcal{S}_{AB} \\
&= \mathcal{S}_{DA} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{CA}} \circ \underline{\underline{\mathcal{S}_{CD} \circ \mathcal{S}_{BC}}} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{AC}} \circ \mathcal{S}_{AB} \\
&= \mathcal{S}_{DA} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{CA}} \circ \underline{\underline{\mathcal{R}_{C, 2\angle BCD}}} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{AC}} \circ \mathcal{S}_{AB} \\
&= \mathcal{S}_{DA} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{CA}} \circ \underline{\underline{\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_{AC}}} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{AC}} \circ \mathcal{S}_{AB} \\
&= \mathcal{S}_{DA} \circ \mathcal{S}_{s_{AC}} \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_{AC} \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_{s_{AC}} \circ \mathcal{S}_{AB} \\
q \perp AC &\hookrightarrow = \mathcal{S}_{DA} \circ \mathcal{S}_{s_{AC}} \circ \underbrace{\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_q}_{\mathcal{S}_{q'}} \circ \mathcal{S}_{AC} \circ \mathcal{S}_{s_{AC}} \circ \mathcal{S}_{AB} \\
s_{AC} \perp AC &\hookrightarrow = \mathcal{S}_{DA} \circ \underbrace{\mathcal{S}_{s_{AC}} \circ \mathcal{S}_{q'} \circ \mathcal{S}_{s_{AC}}}_{\mathcal{S}_{q''}} \circ \mathcal{S}_{AC} \circ \mathcal{S}_{AB} \\
&= \mathcal{S}_{DA} \circ \mathcal{S}_{q''} \circ \mathcal{S}_{AC} \circ \mathcal{S}_{AB}
\end{aligned}$$

gde smo s_{AC} označili simetralu duži AC , a sa p i q prave takve da važi

$$C \in p, \quad \angle BCD = \angle(AC, p), \quad C \in q, \quad q \perp AC.$$

Pošto je, prema teoremi o transmuciji, $q'' = \mathcal{S}_{s_{AC}}(q') = \mathcal{S}_{s_{AC}} \circ \mathcal{S}_q(p) = \mathcal{T}_{\overrightarrow{CA}}(p)$, to prava q'' sadrži tačku A i paralelna je sa pravom p .

Odavde sledi:

$$\mathcal{E} = \mathcal{S}_{DA} \circ \mathcal{S}_{q''} \circ \mathcal{S}_{AC} \circ \mathcal{S}_{AB} = \mathcal{R}_{A,\varphi} \circ \mathcal{R}_{A,\phi} = \mathcal{R}_{A,\varphi+\phi},$$

za uglove

$$\begin{aligned}
\varphi &= 2\angle(q'', DA) = 2(\angle(q'', AC) - \angle DAC) = 2(\angle(p, AC) - \angle DAC) = 2(\pi - \angle BCD - \angle DAC) \\
\phi &= 2\angle BAC = 2(\angle BAD - \angle CAD) = 2(\pi - \angle DAB - \pi + \angle DAC) = 2(\angle DAC - \angle DAB)
\end{aligned}$$

Jednakost $\mathcal{E} = \mathcal{R}_{A,\varphi+\phi}$ je ispunjena akko je

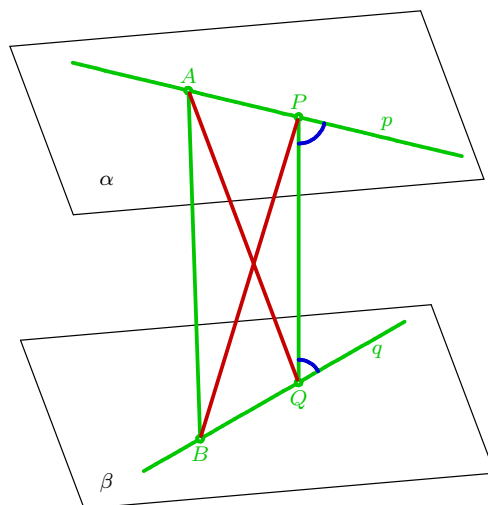
$$0 = \varphi + \phi = 2(\pi - \angle BCD - \angle DAC + \angle DAC - \angle DAB) = 2\pi - 2(\angle BCD + \angle DAB),$$

odnosno $\pi = \angle BCD + \angle DAB$.

Dakle, četvorougao $ABCD$ je tetivan akko su naspramni uglovi suplementni, što je upravo dobijeni uslov.

4. Neka je PQ zajednička normala mimoilaznih pravih p i q , $P \in p$, $Q \in q$. Ako prava c seče prave p i q redom u tačkama A i B takvim da je $AP \cong BQ$, dokazati da je $\angle PAB \cong \angle QBA$.

rešenje:

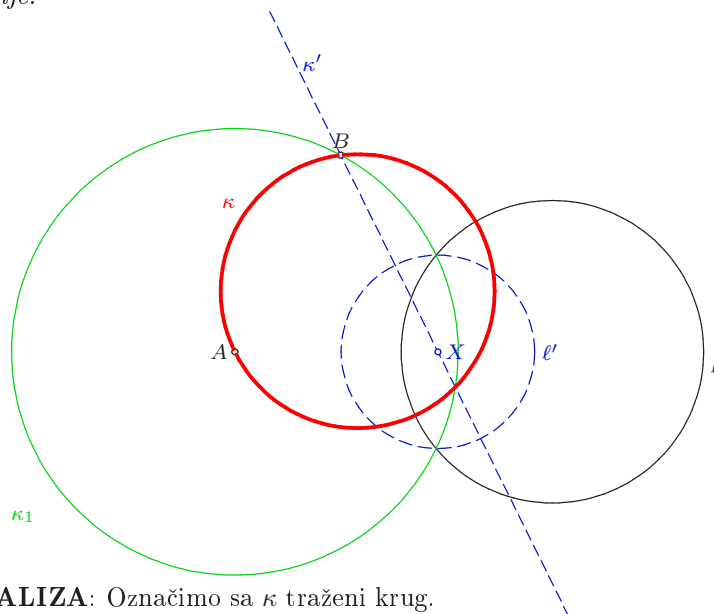


$$\left. \begin{array}{l} \angle APQ = \angle PQB = \frac{\pi}{2} \\ AP \cong BQ \\ PQ \cong PQ \\ AQ \cong BP \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle APQ \cong \triangle PQB \Rightarrow AQ \cong BP$$

$$\left. \begin{array}{l} AP \cong BQ \\ AB \cong AB \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AQB \cong \triangle PBA \Rightarrow \angle QBA \cong \angle PAB$$

5. Konstruisati krug κ koji sadrži date tačke A i B i ortogonalan je na dati krug ℓ .

rešenje:



ANALIZA: Označimo sa κ traženi krug.

Neka je κ_1 krug sa centrom u tački A poluprečnika AB . Posmatramo inverziju ψ_{κ_1} u odnosu na krug κ_1 .

- Tačka B pripada krugu inverzije, pa je invarijantna pri inverziji ψ_{κ_1} .
- Krug ℓ slika u krug ℓ' koji ne sadrži centar inverzije A .
- Krug κ sadrži centar inverzije, pa se slika u pravu κ' koja ne sadrži tačku A . Inverzija je preslikavanje koje čuva uglove i incidenciju, pa važi:

$$\begin{aligned} B \in \kappa &\implies B = \psi_{\kappa_1}(B) \in \psi_{\kappa_1}(\kappa) = \kappa' \\ \kappa \perp \ell &\implies \kappa' = \psi_{\kappa_1}(\kappa) \perp \psi_{\kappa_1}(\ell) = \ell' \end{aligned}$$

Dakle, κ' je prava koja sadrži tačku B i ortogonalna je na krug ℓ' (što znači da sadrži centar X kruga ℓ').

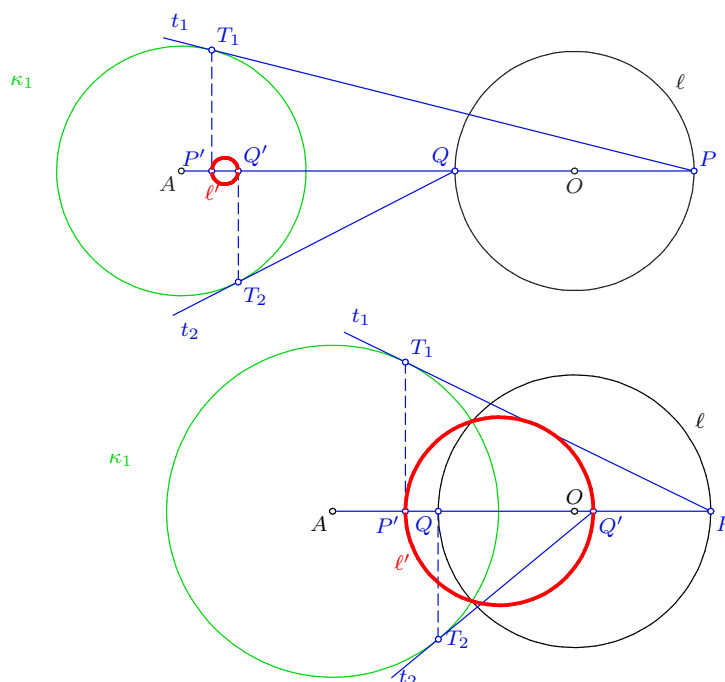
KONSTRUKCIJA:

- κ_1 : krug sa centrom u tački A poluprečnika AB
- ℓ' : krug - slika kruga ℓ pri inverziji ψ_{κ_1}
- κ' : prava koja sadrži centar X kruga ℓ' i tačku B
- κ : krug - slika prave κ' pri inverziji ψ_{κ_1}

Pomoćne konstrukcije:

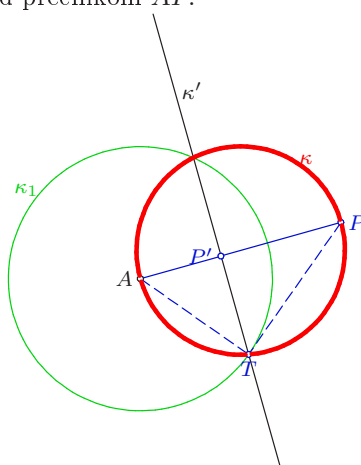
- a) Konstrukcija slike kruga ℓ , $A \notin \ell$ pri inverziji ψ_{κ_1} .
Neka je p prava koja sadrži tačku A i centar O kruga ℓ . Označimo sa P i Q tačke preseka prave p i kruga ℓ . Ako su P' i Q' redom slike tačaka P i Q pri inverziji ψ_{κ_1} ,

tada je traženi krug ℓ' krug nad prečnikom $P'Q'$.



b) Konstrukcija slike prave κ' , $A \notin \kappa'$ pri inverziji ψ_{κ_1} .

Prava koja ne sadrži centar inverzije slika se u krug koji sadrži centar inverzije. Neka je P' podnožje normale iz centra inverzije A na pravu κ' i P njena slika pri inverziji ψ_{κ_1} . Traženi krug κ je krug nad prečnikom AP .



DOKAZ: Prema konstrukciji tačka A je centar inverzije, a B pripada krugu inverzije, pa je $\psi_{\kappa_1}(B) = B$. Krug ℓ' sa centrom u tački X je slika kruga ℓ pri inverziji.

Prema konstrukciji krug κ je slika prave κ' : $A \notin \kappa'$, $B, X \in \kappa'$. Na osnovu osobina

inverzije važi:

$$\begin{aligned} A \notin \kappa' &\implies A \in \kappa \\ B \in \kappa' &\implies B \in \kappa \\ X \in \kappa' &\implies \kappa' \perp \ell' \implies \kappa \perp \ell \end{aligned}$$

DISKUSIJA: Ako su centar kruga ℓ i tačke A i B kolinearne, κ je prava AB . Ako $A, B \in \ell$, rešenje ne postoji.