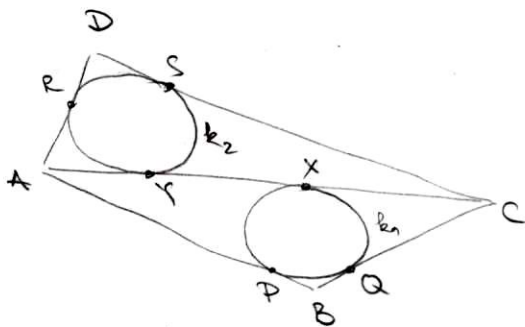


ГЕОМЕТРИЈА 2 - ЈАНУАР 1, 26.01.2018.

- ① $\square ABCD$ конвексан неупоредан
 k_1 - уписан у $\triangle ABC$
 k_2 - ——— $\triangle ACD$



Нека су P, Q, X тачке у којима уписан
 круг k_1 у $\triangle ABC$ додирује редом AB, BC, AC ;
 и нека су R, S, Y тачке у којима уписан
 круг k_2 у $\triangle ACD$ додирује редом AD, DC, AC .

$$CX = CQ$$

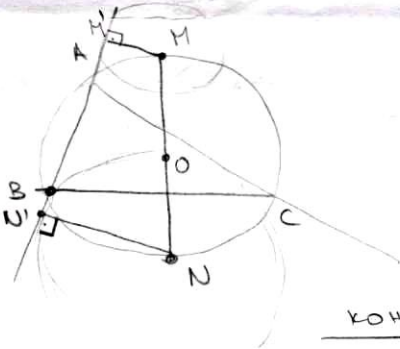
$$AX = AP = \frac{1}{2}(AX + AP) = \frac{1}{2}(AC - CX + AB - BP) \stackrel{BP=BQ}{=} \frac{1}{2}(AC + AB - BQ - CQ) = \frac{1}{2}(AC + AB - BC)$$

$$AY = AR = \frac{1}{2}(AY + AR) = \frac{1}{2}(AC - CX + AD - DR) \stackrel{DR=DS}{=} \frac{1}{2}(AC + AD - DS - CS) = \frac{1}{2}(AC + AD - CD)$$

$$CX = CS$$

Кругови k_1 и k_2 се додирују $\Leftrightarrow X = Y \Leftrightarrow AX = AY \Leftrightarrow \frac{1}{2}(AC + AB - BC) = \frac{1}{2}(AC + AD - CD)$
 $\Leftrightarrow AB - BC = AD - CD \Leftrightarrow AB + CD = AD + BC \Leftrightarrow \square ABCD$ тангенсан.

- ② $r, \bar{p}_a + \bar{p}_b, \bar{p}_b - \bar{p}_c$



АНАЛИЗА: Нека $\triangle ABC$ зај. угао $\angle C$. Нека су
 тачке M, M', N, N' тачке из BZ . Тада знамо
 $\text{ЗЗ} \Rightarrow MN = 2r, MH' = \frac{1}{2}(\bar{p}_b - \bar{p}_c), NN' = \frac{1}{2}(\bar{p}_a + \bar{p}_b)$
 MN' је заједничка спољна тангенсa кругова
 $k_1(M, MH')$ и $k_2(N, NN')$. $B, C \in$ описаном кругу
 око $\triangle ABC$, и важи $BC \perp MN$.

КОНСТРУКЦИЈА: Конструисамо:

ПОКАЗ:

$\text{ПК} \Rightarrow A, B, C \in k \Rightarrow$ круг $k(O, r)$ је описан око
 $\triangle ABC$, и нека додирница
 је r ди. r је додирница
 описаног круга око $\triangle ABC$.

$\text{ПК} \Rightarrow M, N \in k, p \Rightarrow MN$ је пречник круга k
 $\text{ПК} \Rightarrow MN \perp BC$ ди BC је њеним нормалне на
 MN пречник

$\Rightarrow MN$ је медијансa дужи BC ди.
 M и N су пресеци медијансe BC са
 описаном кругом,

$\text{ПК} \Rightarrow B(M', A, B, N')$

$\text{ПК} \Rightarrow A, B \in t$

$\text{ПК} \Rightarrow t$ тачи не k_1 и k_2

$\Rightarrow M, N \in BZ, M', N' \in BZ$

Нека су додирнице уписаног, и спољно описаног кругова који описују A, B, C редом
 $\bar{p}_a, \bar{p}_b, \bar{p}_c$.

$$\text{ЗЗ} \Rightarrow MH' = \frac{1}{2}(\bar{p}_b - \bar{p}_c), NN' = \frac{1}{2}(\bar{p}_a + \bar{p}_b)$$

$$\text{ПК} \Rightarrow M' \in k_1(M, \frac{1}{2}(\bar{p}_b - \bar{p}_c)), N' \in k_2(N, \frac{1}{2}(\bar{p}_a + \bar{p}_b)) \Rightarrow$$

- $k(O, r)$
- $p: p \geq 0$
- $p \cap k = \{M, N\}$
- $k_1(M, \frac{1}{2}(\bar{p}_b - \bar{p}_c))$
- $k_2(N, \frac{1}{2}(\bar{p}_a + \bar{p}_b))$
- t - заједничка спољ. танг. кругова k_1 и k_2 (пом. констр.)
- Остатком додирује тачке t и k_1 са M' ,
 t и k_2 са N'
- $t \cap k = \{A, B\}, B(M', A, B, N')$
- $n: n \geq B, n \perp MN$
- $n \cap k = \{C\}, C \neq B$.



$$\Rightarrow MN' = \frac{1}{2}(S_b - S_c)$$

$$\Rightarrow NN' = \frac{1}{2}(S + S_a)$$

$$\Rightarrow S_b - S_c = \bar{S}_b - \bar{S}_c$$

$$\Rightarrow S + S_a = \bar{S} + \bar{S}_a$$

$\Rightarrow S_b - S_c$ је разлика концентриса сабра тријугастих кружева са центром у тачки B и C

$\Rightarrow S + S_a$ је збир концентриса уписаног кружева и сабра тријугастих кружева са центром у тачки A

$\triangle ABC$ зад. услове зад.

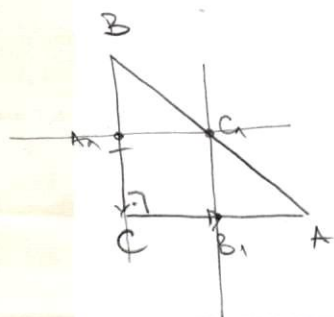
Дискусија: Да ли постоји тачка O у кругу γ где важи $(\omega) \exists A, B$

$$d(O, t) < r$$

$$O = S(MN), MN' \parallel NN' \Rightarrow d(O, t) = \frac{1}{2}(MN' + NN') = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}(S_b - S_c) + \frac{1}{2}(S + S_a)) = \frac{1}{4}(S_b - S_c + S + S_a)$$

$$\Rightarrow S_b - S_c + S + S_a < 4r$$

3



$$J = G_{CA} = G_{BA} = ?$$

$$G_{CA} = J_{CA} = S_{CA} = S_{CA} = J_{CA}$$

Нека су A_1, B_1, C_1 редом средине BC, AC, AB .

$$J = G_{CA} = G_{BA} = J_{CA} = S_{CA} = S_{BC} = J_{BC} = J_{\frac{1}{2}CA} = S_{CA} = S_{BC} = J_{\frac{1}{2}BC} = J_{\frac{1}{2}AB}$$

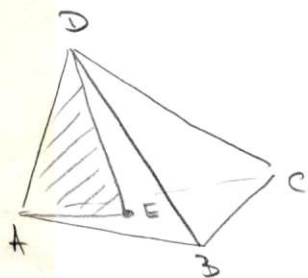
$$J = S_{B_1C_1} \circ S_{BC} \circ S_{CA} \circ S_{BC} \circ S_{AC} \circ S_{A_1C_1} = S_{B_1C_1} \circ S_{BC} \circ S_{BC} \circ S_{CA} \circ S_{AC} \circ S_{A_1C_1} = S_{B_1C_1} \circ S_{BC} \circ S_{BC} \circ S_{CA} \circ S_{AC} \circ S_{A_1C_1} = S_{B_1C_1} \circ S_{A_1C_1} = S_{CA}$$

$$B_1C_1 \perp AC$$

$$A_1C_1 \perp BC$$

$$AC \perp BC \Rightarrow B_1C_1 \perp A_1C_1$$

4



Праван (ADE) садржи DE , а $DE \perp$ праван (ABC)

— садржи AD , $AD \perp BD, CD \Rightarrow$

$$AD \perp (BDC)$$

$$DE \perp (ABC) \Rightarrow DE \perp BC$$

$$AD \perp (BDC) \Rightarrow AD \perp BC$$

$$\Rightarrow BC \perp (ADE) \Rightarrow$$

$$AE \perp BC$$

висина из A у $\triangle ABC$

Аналогно за $BE \perp AC, CE \perp AB \Rightarrow E$ је ортоцентар $\triangle ABC$.

5 Нека је O центар апсолуте

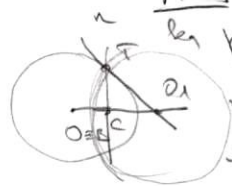
1° $A \neq O$ Конструисамо h -смиерану h -гране BC (пом конст.); $h \cap BC = \{A_1\}$ пресек осталих као h -гране A_1 . h -веш. грана из h -гране A је гео. праве у с.с. која садржи h -гране A_1 и центар апсолуте.

2° $A = O$ Нека је l - h -смиерану h -гране OA (пом конст.); h -смиерану у односу на h -смиерану l пресекамо h -гране ABC у O, B', C' . На основу P одређуемо h -веш. грана OA' и h -смиерану у односу на h -смиерану l .

Пресликано h -сим. дуж OA у h -сим. дуж h -трапеза ABC из h -тачке A

прт. конст. h -симетрала h -дужи BC .

$$1^\circ \quad B \equiv O \vee C \equiv O$$



h Конструкција хоризалу и h -с на OC у h -тачки C .

и h абсолютна ознака са T . Конст. у е.с. h -ант. на h -сим. дуж и сресек $t \cap OC = \{O_1\}$. Конст. у е.с. h -трап $h(O_1, O_1, T)$ h -симетрала h -дужи OC је h -трапеза h -је је h -сресек h у е.с.

$$\Delta O_1TC \sim \Delta O_1TO \quad \left\{ \begin{array}{l} \angle O_1CT = \frac{\pi}{2} = \angle O_1TO \leftarrow \text{једн. изгледу полупречника} \\ \angle T_1OC = \angle TO_1O \leftarrow \text{криве и тангенсе не срути} \end{array} \right. \text{ -заједнички}$$

$$\frac{O_1C}{O_1T} = \frac{O_1T}{O_1O} \Rightarrow O_1T \cdot O_1T = O_1O \cdot O_1C \Rightarrow r^2 = O_1O \cdot O_1C \Rightarrow \chi_{h_1}(C) = 0.$$

$$2^\circ \quad B, C \neq O$$

h -симетрала у односу на h -симетралу Δ h -дужи OB пресликано B у O (1°), C у C' . Одредити h -симетралу h' h -дужи OC' (1°) и h -симетралу у односу на h -симетралу Δ сресек h' у h -трапезу h -симетралу.

Геометрија 2 јануар 1, 26.01.2018.

- Нека је $ABCD$ конвексан четвороугао. Доказати да се кругови уписани у ΔABC и ΔACD додирују ако и само ако је четвороугао $ABCD$ тангентан.
- Конструисати ΔABC ако су r , $\rho_a + \rho$ и $\rho_b - \rho_c$ редом дужи којима су подударни полупречник описаног круга троугла, збир полупречника уписаног круга и споља приписаног круга који одговара темену A и разлика полупречника споља приписаних кругова који одговарају теменима B и C .
- Нека је дат једнакокрако правоугли ΔABC са правим углом код темена C . Одредити тип и компоненте изометрије $\mathcal{G}_{\overline{CA}} \circ \mathcal{G}_{\overline{BC}}$.
- Ако су сви ивични углови код темена D тетраедра $ABCD$ прави, доказати да се подножје висине E из темена D поклапа са ортоцентром троугла ABC .
- У Поенкареовом диск моделу хиперболичке равни конструисати h -тежишну дуж из темена A h -троугла одређеног h -тачкама A , B и C .