Геометрија 2

- задаци са вежби -

Садржај

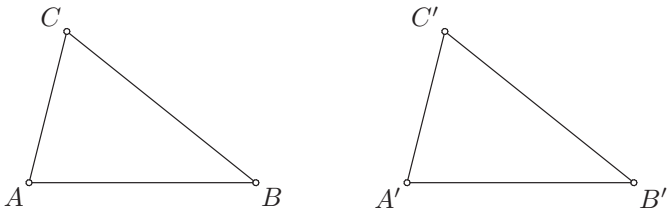
1 Подударност **2**

2 Сличност **45**

1 Подударност

Подсетимо се ставова о подударности троуглова. Јасно нам је да два подударна троугла имају међусобно подударне одговарајуће странице и углове. Обратно, за два троугла $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C'$ довољно је доказати само за нека три пара страница или углова да су подударни. Ставови који се доказују у теорији и који дају ове довољне услове за подударност два троугла зову се Ставови о подударности троуглова. Има их пет и сада ћемо их навести.

Став 1. *Нека су дати троуглови $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C'$. Ако важи нешто од следећег:*
1° ***(СУС)*** $AB = A'B'$, $\measuredangle BAC = \measuredangle B'A'C'$, $AC = A'C'$;
2° ***(ССС)*** $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$;
3° ***(УСУ)*** $\measuredangle BAC = \measuredangle B'A'C'$, $AB = A'B'$, $\measuredangle ABC = \measuredangle A'B'C'$;
4° ***(ССУ)*** $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $\measuredangle ACB = \measuredangle A'C'B'$, *а углови* $\measuredangle ABC$ *и* $\measuredangle A'B'C'$ *су оба оштра, оба права или оба тупа;*
5° ***(УУС)*** $AB = A'B'$, $\measuredangle ACB = \measuredangle A'C'B'$, $\measuredangle BAC = \measuredangle B'A'C'$;
онда је $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.



Дакле, сваки од ставова 1°–5° еквивалентан је са подударношћу троуглова $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C'$.

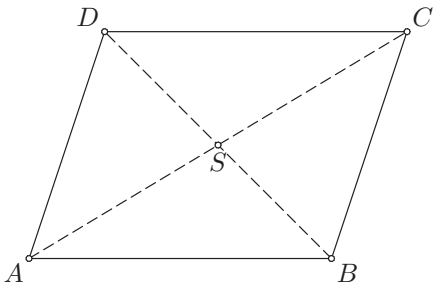
Приметимо да код троуглова не можемо тек тако писати знак „=” уместо знака „≅”. Код дужи и углова се то може толерисати, јер се ту уместо једнакости скупова тачака мисли на једнакост дужина дужи, односно мера углова. Међутим, одговарајућа мера за троуглове је површина, а два троугла која имају исту површину не морају бити подударна.

Вратимо се сада на Ставове о подударности троуглова. Важно је нагласити да став ССУ говори о подударности троуглова где су две странице и угао наспрам веће од њих у једном троуглу једнаки са две одговарајуће странице и углом другог троугла. Такође, на први поглед нам се може учинити да су ставови УСУ и УУС исти, јер уколико су нама позната нека два угла троугла, познат нам је и трећи због тога што је збир углова у троуглу једнак 180°, односно π. Но, на овом предмету се изучавају две геометрије, еуклидска и хиперболичка. Еуклидска геометрија је стандардна, уобичајена геометрија с којом се сусрећемо још у

основној школи, а о хиперболичкој геометрији ћемо учити касније. За сада ћемо рећи да се испоставља да ће у хиперболичкој геометрији збир углова у троуглу увек бити мањи од π и да тај збир може бити било који број између 0 и π.

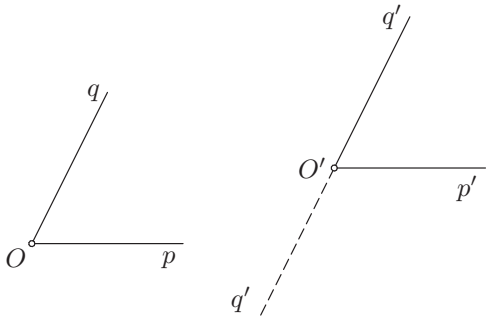
Осим ставова о подударности троуглова, користићемо једно веома важно тврђење везано за паралелограм. Најпре дајмо дефиницију паралелограма.

Дефиниција 1. Четвороугао $ABCD$ је *паралелограм* ако је $AB \parallel CD$ и $AD \parallel BC$.



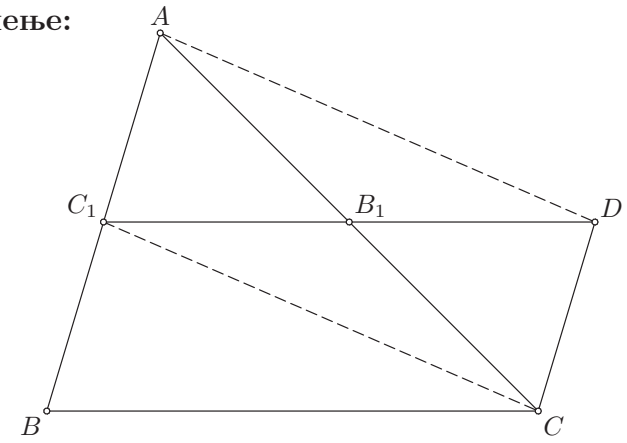
Теорема 1. *Нека је у равни дат конвексан четвороугао $ABCD$. Следећа тврђења су еквивалентна.*
1° *Четвороугао $ABCD$ је паралелограм.*
2° *Свака два суседна угла четвороугла $ABCD$ су суплементна.*
3° *Парови наспрамних углова четвороугла $ABCD$ су парови подударних углова.*
4° $AB \parallel CD$ *и* $AB = CD$
5° $AB = CD$ *и* $AD = BC$
6° *Дијагонале AC и BD имају заједничко средиште.*

Теорема 2 (Углови са паралелним крацима)**.** *Нека су $\measuredangle pOq$ и $\measuredangle p'O'q'$ такви да је $Op \parallel O'p'$ и $Oq \parallel O'q'$. Тада је $\measuredangle pOq = \measuredangle p'O'q'$ или $\measuredangle pOq + \measuredangle p'O'q' = \pi$.*



1. (**Средња линија троугла**) Ако су B_1 и C_1 средишта дужи CA и BA троугла ABC, онда су праве BC и B_1C_1 паралелне и важи $B_1C_1 = \frac{1}{2}BC$.

Решење:



Нека је D тачка на полуправој C_1B_1 таква да је $C_1B_1 = B_1D$. Тада је тачка B_1 средиште дијагонала AC и C_1D четвороугла AC_1CD, те је он паралелограм. Следи да је $AC_1 \parallel CD$ и да је $AC_1 = CD$ као наспрамне странице паралелограма. Како је $AC_1 = C_1B$ јер је C_1 средиште AB, имамо да је $C_1B = CD$, а како су праве AC_1 и C_1B исте, следи да је и $C_1B \parallel CD$. Одавде закључујемо да је четвороугао $BCDC_1$ паралелограм, па имамо да је $BC \parallel C_1D$ и $BC = C_1D$. Како имамо да су праве C_1B_1 и C_1D исте, следи да је $C_1B_1 \parallel BC$, а како је B_1 средиште C_1D, следи да је $C_1B_1 = \frac{1}{2}C_1D = \frac{1}{2}BC$, што је и требало доказати.

Дефиниција 2. Дуж која повезује средишта две странице троугла ABC зове се *средња линија* троугла $\triangle ABC$.

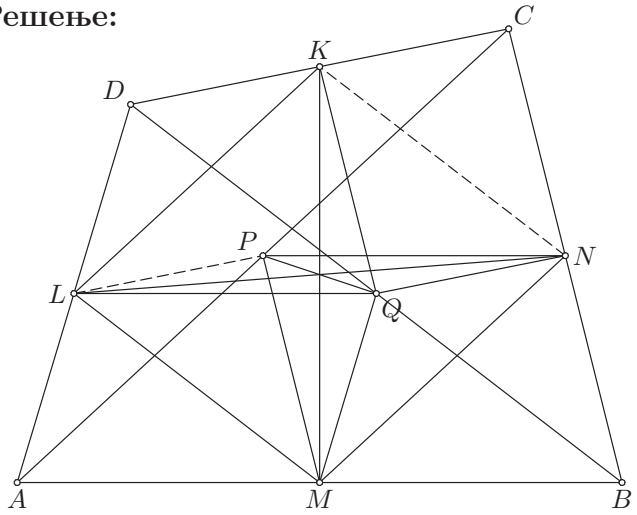
2. Ако су A, B, C, D четири различите тачке и M, N, K, L, P, Q средишта дужи AB, BC, CD, DA, AC, DB редом, доказати:

а) MN и KL, MP и QK, NP и QL су међусобно подударне дужи;

б) дужи LN, MK, PQ имају заједничко средиште;

в) сваки од углова $\measuredangle PMQ$, $\measuredangle PNQ$, $\measuredangle LMN$ подударан је једном од углова којег одређују праве BC и AD, AB и CD, AC и BD.

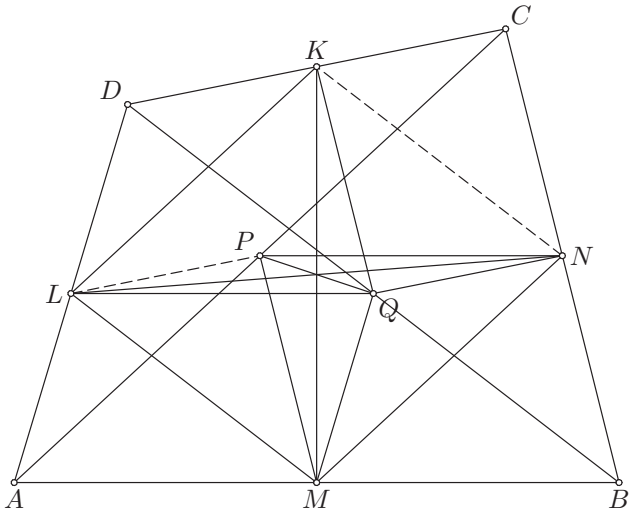
Решење:



а) Како су тачке M и N средишта дужи AB и BC, редом, дуж MN је средња линија троугла $\triangle ABC$, па закључујемо да је $MN \parallel AC$ и $MN = \frac{1}{2}AC$. Такође, KL је средња линија троугла $\triangle ACD$, па следи да је $KL \parallel AC$ и $KL = \frac{1}{2}AC$. Закључујемо да је $MN \parallel KL$ и $MN = KL$.

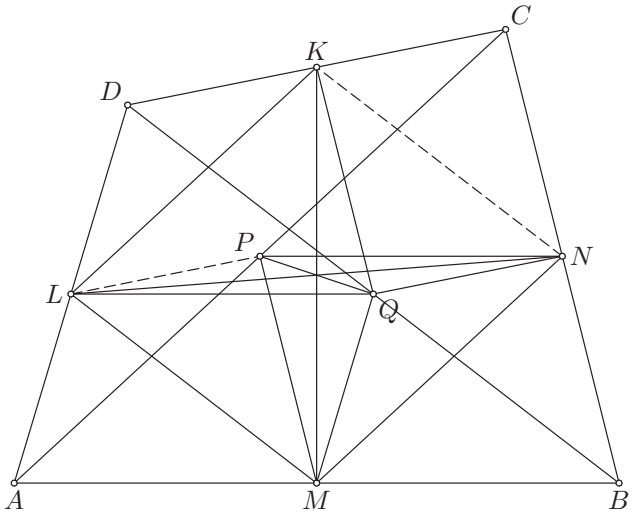
Слично је и QK средња линија троугла $\triangle BCD$, па је $QK \parallel BC$ и $QK = \frac{1}{2}BC$. Такође је MP средња линија троугла $\triangle ABC$, па је $MP \parallel BC$ и $MP = \frac{1}{2}BC$, па закључујемо да је $QK \parallel MP$ и $QK = MP$.

б) Доказати да дужи LN, MK, PQ имају заједничко средиште.



Из дела **а**) имамо да је $MN \parallel KL$ и $MN = KL$, па је четвороугао $MNKL$ паралелограм. Следи да његове дијагонале MK и LN имају заједничко средиште. Такође, из дела **а**) закључујемо да је $QK \parallel MP$ и $QK = MP$, па је четвороугао $KPMQ$ паралелограм. Одавде закључујемо да његове дијагонале KM и PQ имају заједничко средиште. Како смо доказали да и MK и LN имају заједничко средиште, а свака дуж има јединствено средиште, следи да све три дужи (MK, LN и PQ) имају заједничко средиште.

в) Доказати да сваки од углова $\measuredangle PMQ$, $\measuredangle PNQ$, $\measuredangle LMN$ подударан је једном од углова којег одређују праве BC и AD, AB и CD, AC и BD.

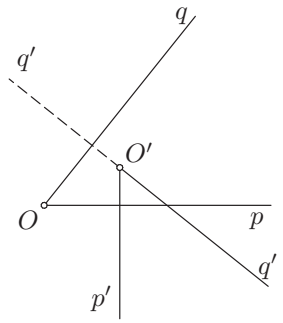


Дуж PM је средња линија троугла $\triangle ABC$, па је $PM \parallel BC$, а дуж MQ је средња линија троугла $\triangle ABD$, па је $MQ \parallel AD$. Ако са $\measuredangle(AD, BC)$ означимо угао који граде праве AD и BC, онда тај угао и угао $\measuredangle PMQ$ имају паралелне краке, па су подударни. Дакле, $\measuredangle PMQ = \measuredangle(AD, BC)$.

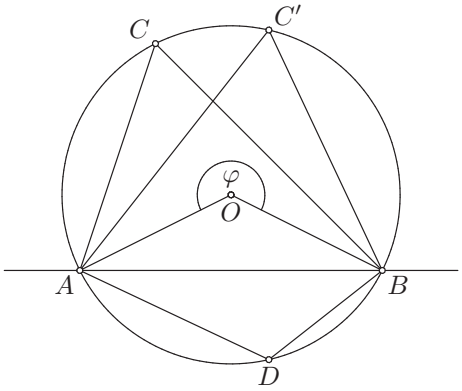
Дуж PN је средња линија троугла $\triangle ABC$, па је $PN \parallel AB$, а дуж NQ је средња линија троугла $\triangle BCD$, па је $NQ \parallel CD$. Угао који граде праве AB и CD и угао $\measuredangle PNQ$ имају паралелне краке, па морају бити једнаки, односно важи $\measuredangle PNQ = \measuredangle(AB, CD)$.

Коначно, LM је средња линија троугла $\triangle ABD$, па је $LM \parallel BD$, а MN је средња линија троугла $\triangle ABC$, па је $MN \parallel AC$. Сада видимо да углови $\measuredangle LMN$ и $\measuredangle(AC, BD)$ имају паралелне краке, па следи да је $\measuredangle LMN = \measuredangle(AC, BD)$.

Теорема 3 (Углови са нормалним крацима)**.** *Нека су* $\measuredangle pOq$ *и* $\measuredangle p'O'q'$ *такви да је* $Op \perp O'p'$ *и* $Oq \perp O'q'$*. Тада је* $\measuredangle pOq = \measuredangle p'O'q'$ *или* $\measuredangle pOq + \measuredangle p'O'q' = \pi$*.*



Дефиниција 3. Нека је k круг, нека је O његов центар и нека су A, B, C тачке са тог круга. Угао $\measuredangle ACB$ зове се *периферијски угао*, а угао $\measuredangle AOB$ зове се *централни угао*.



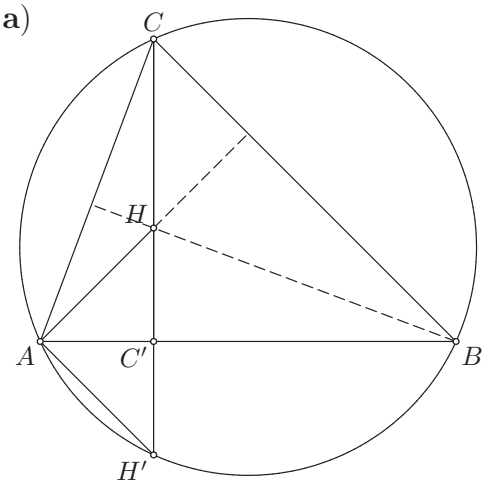
Ако су тачке C и O са исте стране праве AB, онда знамо да је $\measuredangle AOB = 2\measuredangle ACB$. Зато се у том случају каже да централни угао $\measuredangle AOB$ *одговара* периферијском углу $\measuredangle ACB$.

Теорема 4. *Периферијски углови над истим луком су међусобно подударни. Периферијски углови над истом тетивом су или подударни или суплементни углови.*

Теорема 5. *Периферијски угао над пречником је прав.*

3. Доказати да тачке симетричне ортоцентру у односу на:
а) странице троугла; **б)** средишта страница троугла;
припадају кругу описаном око тог троугла.

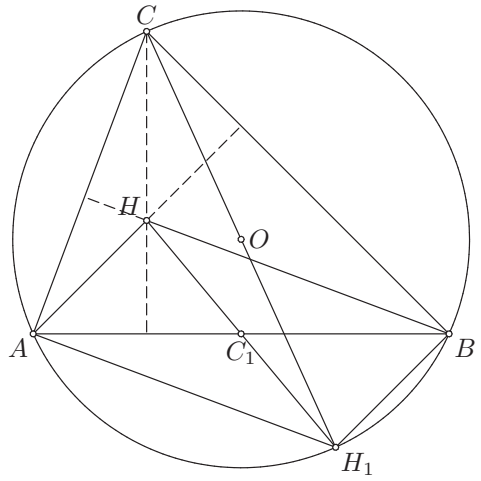
Решење:
а)



Означимо са C' подножје висине из темена C на правој AB, а са H' тачку која је симетрична ортоцентру H у односу на страницу AB (у питању је осна симетрија). Тада је $HH' \perp AB$ и тачка C' је средиште дужи HH', тј. $HC' = C'H'$. Како је и $\measuredangle HC'A = \measuredangle H'C'A$, јер су оба угла права (једнака $90°$, односно $\frac{\pi}{2}$) и $AC' = AC'$, на основу става СУС закључујемо да је $\triangle HC'A \cong \triangle H'C'A$. Добијамо да је $\measuredangle AH'C' = \measuredangle AHC'$. Нама је циљ да докажемо да су углови $\measuredangle AH'C$ и $\measuredangle ABC$ подударни, јер ћемо онда имати да је угао $\measuredangle AH'C$ периферијски над луком $\overset{\frown}{AC}$, па ће H' припадати описаном кругу троугла $\triangle ABC$. Углови $\measuredangle AH'C'$ и $\measuredangle AH'C$ су исти, па је довољно доказати да је $\measuredangle AHC' = \measuredangle ABC$. Међутим, како је $HC' \perp AB$ јер је HC' висина, и $AH \perp BC$ јер је AH висина, следи да углови $\measuredangle AHC'$ и $\measuredangle ABC$ имају нормалне краке, те су међусобно подударни.

Аналогно се показује тврђење задатка и за остале тачке јер су све три странице троугла $\triangle ABC$ међусобно су равноправне.

б) Доказати да тачке симетричне ортоцентру у односу на средишта страница троугла припадају кругу описаном око тог троугла.



Означимо са C_1 средиште странице AB троула $\triangle ABC$ и са H_1 тачку симетричну ортоцентру H у односу на тачку C_1 (сада је у питању централна симетрија). Тада је тачка C_1 средиште дужи HH_1. У четвороуглу AH_1BH дијагонале AB и HH_1 имају заједничко средиште, тачку C_1, па је у питању паралелограм. Закључујемо да је $BH \parallel H_1A$ и да је $AH \parallel H_1B$. Како је BH висина, следи да је $BH \perp AC$, па следи и да је $H_1A \perp AC$, тј. $\measuredangle H_1AC = \frac{\pi}{2}$. Према томе, троугао $\triangle ACH_1$ је правоугли, па је центар његовог описаног круга (дакле круга који садржи његова темена A, C, H_1) средиште хипотенузе CH_1.

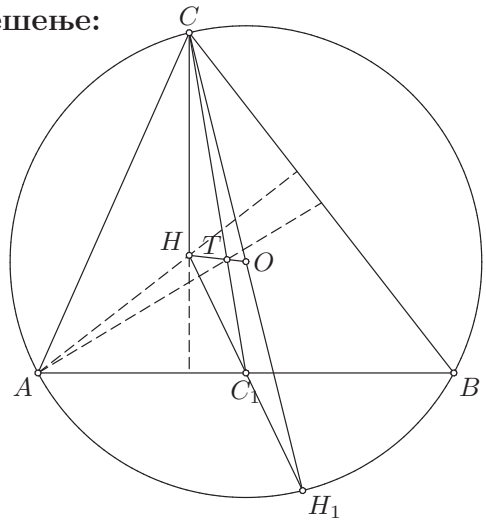
Слично, AH је висина, па је $AH \perp BC$, а пошто је $H_1B \parallel AH$, следи да је $H_1B \perp BC$, тј. да је $\measuredangle H_1BC = \frac{\pi}{2}$. Према томе, троугао $\triangle BCH_1$ је правоугли, па се центар његовог описаног круга (дакле круга који садржи његова темена B, C, H_1) средиште хипотенузе CH_1.

Описани кругови троуглова $\triangle ACH_1$ и $\triangle BCH_1$ имају исти центар (средиште дужи CH_1) и исти полупречник (половина дужи CH_1), те ти троуглови имају исти описани круг. Дакле, један исти круг садржи тачке A, B, C, H_1. Како се око сваког троугла може описати само један круг, тј. за сваке три неколинеарне тачке постоји јединствени круг који их садржи, следи да описани круг троугла $\triangle ABC$ (тј. онај круг који садржи његова темена A, B, C) мора бити исти као и круг који садржи тачке A, B, C, H_1 (дакле, заједнички описани круг троуглова $\triangle ACH_1$ и $\triangle BCH_1$). Овим смо доказали да се тачка H_1 налази на описаном кругу троугла $\triangle ABC$, што је и требало доказати.

Аналогно се показује тврђење задатка и за остале тачке јер су све три странице троугла $\triangle ABC$ међусобно су равноправне.

4. (**Ојлерова права**) Средиште описаног круга O, ортоцентар H и тежиште T произвољног троугла су колинеарне тачке и важи $\overrightarrow{HT} = 2\overrightarrow{TO}$. Доказати.

Решење:



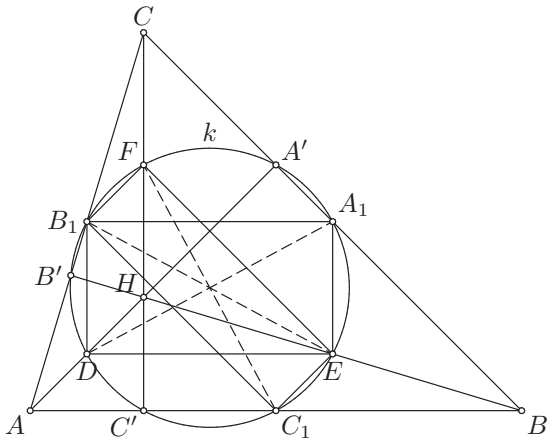
Нека је H_1 тачка из 3. задатка, тј. тачка симетрична ортоцентру H у односу на средиште C_1 странице AB. Посматрајмо троугао $\triangle CH_1H$. Како је C_1 средиште његове странице H_1H, следи да је дуж CC_1 тежишна дуж тог троугла. Такође, дуж CC_1 је и тежишна дуж троугла $\triangle ABC$, јер је C_1 средиште његове странице AB. Из 3. задатка следи да је CH_1 пречник описаног круга троугла $\triangle ABC$, па је његов центар O средиште дужи CH_1. Дакле, дуж HO је тежишна дуж троугла $\triangle CH_1H$, па је њен пресек са тежишном дужи CC_1 тежиште троугла $\triangle CH_1H$. Означимо га са T_1 и докажимо да је то заправо тачка T (тежиште троугла $\triangle ABC$), тј. да је $T_1 = T$.

Како је тежиште сваког троугла тачка која дели његове тежишне дужи у односу 2:1, следи да тежиште T троугла $\triangle ABC$ дели његову тежишну дуж CC_1 у односу 2:1, тј. важи $CT : TC_1 = 2 : 1$. Такође, тежиште T_1 троугла $\triangle CH_1H$ дели његову тежишну дуж CC_1 у односу 2:1, тј. важи $CT_1 : T_1C_1 = 2 : 1$. Како је тачка која дели неку дуж у неком односу јединствена, следи да је $T_1 = T$. Дакле, T је тежиште и троугла $\triangle CH_1H$. Према томе, тачка T припада његовој тежишној дужи HO (па су H, T, O колинеарне) и дели је у односу 2:1, тј. важи $HT : TO = 2 : 1$. Како T припада баш дужи HO, следи да вектори $\overrightarrow{HT}$ и $\overrightarrow{TO}$ имају исти смер, а из $HT : TO = 2 : 1$ следи да је $HT = 2TO$, па је заиста $\overrightarrow{HT} = 2\overrightarrow{TO}$.

Дефиниција 4. Права која садржи колинеарне тачке H, T, O зове се *Ојлерова права*.

5. (**Ојлеров круг**) Средишта страница, подножја висина и средишта дужи одређених теменима и ортоцентром троугла припадају једном кругу. Доказати.

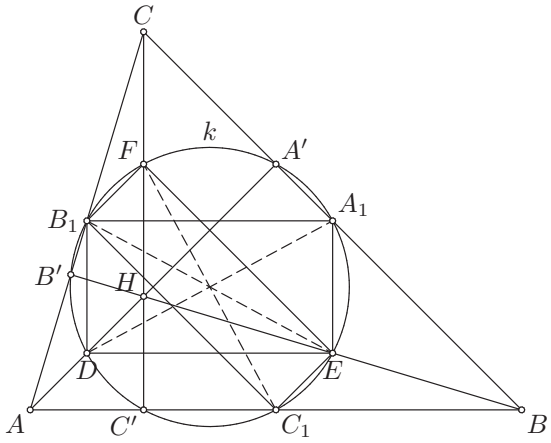
Решење:



Нека су A', B', C' редом подножја висина из темена A, B, C на страницама BC, CA, AB троугла $\triangle ABC$ и нека су A_1, B_1, C_1 редом средишта страница BC, CA, AB. Дужи које спајају темена и ортоцентар H троугла $\triangle ABC$ су дужи AH, BH, CH, па означимо редом са D, E, F њихова средишта. Треба доказати да постоји круг који садржи ових девет тачака $(A', B', C', A_1, B_1, C_1, D, E, F)$.

Посматрајмо четвороугао DEA_1B_1. Дуж B_1A_1 је средња линија троугла $\triangle ABC$, па је $B_1A_1 \parallel AB$ и $B_1A_1 = \frac{1}{2}AB$, а дуж DE је средња линија троугла $\triangle ABH$, па је $DE \parallel AB$ и $DE = \frac{1}{2}AB$. Закључујемо да је DEA_1B_1 паралелограм. Поред тога, DB_1 је средња линија троугла $\triangle ACH$, па је $DB_1 \parallel CH$. Како је $CH \perp AB$ јер је CH висина, следи да је $DB_1 \perp AB$. Међутим, имамо да је $B_1A_1 \parallel AB$, па је $DB_1 \perp B_1A_1$. Према томе, угао $\measuredangle DB_1A_1$ је прав, па како је паралелограм који има један прав угао заправо правоугаоник, следи да је четвороугао DEA_1B_1 правоугаоник. Како се око правоугаоника може описати круг, следи да постоји круг који садржи тачке A_1, B_1, D, E.

Аналогно се показује да је и четвороугао B_1C_1EF је правоугаоник.

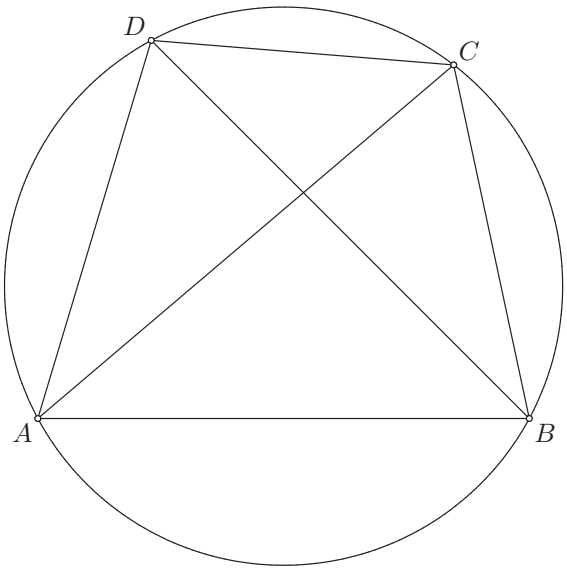


Како је дијагонала правоугаоника пречник његовог описаног круга, следи да је његов центар средиште дијагонале, а полупречник половина дијагонале. Дуж B_1E је заједничка дијагонала правоугаоника DEA_1B_1 и B_1C_1EF, па следи да описани кругови тих правоугаоника имају исти центар и исти полупречник, односно та два правоугаоника имају исти описани круг. Дакле, круг који садржи тачке A_1, B_1, D, E садржи и тачке B_1, C_1, E, F. Дакле, постоји круг, назовимо га k, који садржи тачке A_1, B_1, C_1, D, E, F.

Остаје нам још да докажемо да тачке A', B', C' припадају том кругу. Дуж B_1E је пречник круга k, а угао $\measuredangle B_1B'E$ је прав, јер је $B'E$ висина, а права B_1B' је иста као и права AC. Како је $\measuredangle B_1B'E$ прав као и периферијски угао над пречником B_1E круга k, то тачка B' припада кругу k. Слично доказујемо и да тачке A', C' припадају кругу k. Уочимо дијагоналу DA_1 правоугаоника DEA_1B_1 и приметимо да је угао $\measuredangle DA'A_1$ прав, јер је DA' висина, а права $A'A_1$ је иста као и права BC. Како је $\measuredangle DA'A_1$ прав, онда тачка A' припада кругу k са пречником DA_1. За тачку C' уочимо дијагоналу FC_1 правоугаоника B_1C_1EF и приметимо да је $\measuredangle FC'C_1 = \frac{\pi}{2}$ јер је FC' висина, а права $C'C_1$ иста као и права AB. Како је угао $\measuredangle FC'C_1$ прав, онда тачка C' припада кругу k са пречником FC_1.

Дефиниција 5. Круг који садржи тачке $A', B', C', A_1, B_1, C_1, D, E, F$ зове се *Ојлеров круг*.

Дефиниција 6. Четвороугао $ABCD$ је *тетиван* ако се око њега може описати круг, тј. ако постоји круг који садржи његова темена A, B, C, D.

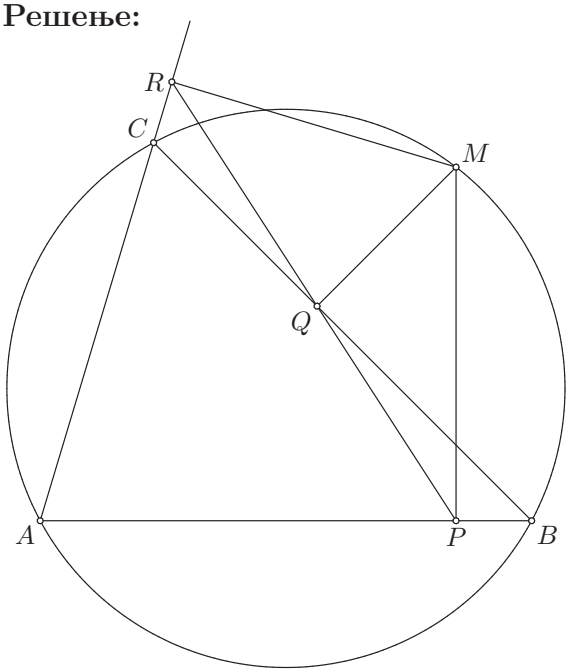


Четвороугао $ABCD$ је тетиван ако и само ако су наспрамни углови конвексног четвороугла суплементни. Специјално, уколико су напрамни углови четвороугла $ABCD$ прави, онда су они суплементни, па је четвороугао $ABCD$ тетиван.

Ако је четвороугао $ABCD$ конвексан и $\measuredangle ADB = \measuredangle ACB$, онда је тај четвороугао тетиван.

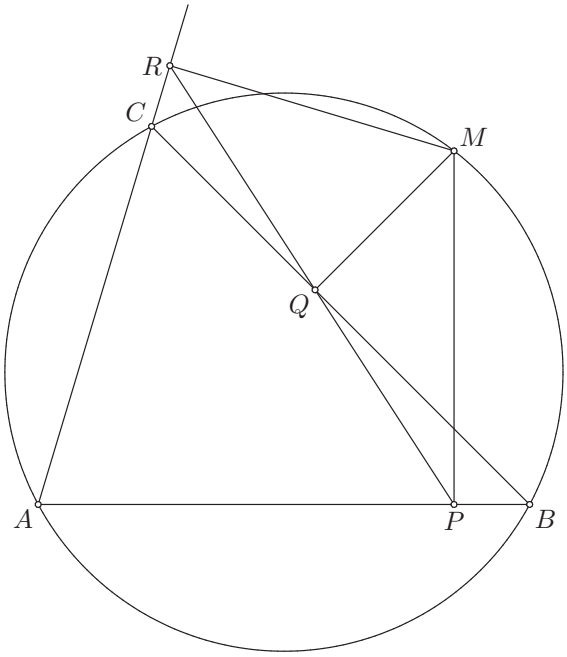
6. (**Симсонова права**) Подножја нормала из произвољне тачке круга описаног око неког троугла, на правама које садрже странице тог троугла, припадају једној правој.

Решење:



Нека је M произвољна тачка на кругу описаном око троугла $\triangle ABC$ и нека су P, Q, R редом подножја нормала из M на праве AB, BC, CA. Уколико докажемо да је $\measuredangle PQB = \measuredangle CQR$, онда ће због колинеарности тачака B, Q, C (Q је подножје нормале из M на праву BC, па припада тој правој) углови $\measuredangle PQB$ и $\measuredangle CQR$ бити унакрсни, па ће онда и тачке P, Q, R припадати једној правој, тј. биће колинеарне.

Уочимо четвороугао $APMR$. Он је тетиван, јер су му наспрамни углови $\measuredangle APM$ и $\measuredangle ARM$ прави, па су суплементни. Следи да су и друга два наспрамна угла суплементна, тј. $\measuredangle PAR + \measuredangle PMR = \pi$. Даље, уочимо четвороугао $CQMR$. И он је тетиван, јер су му супротни углови $\measuredangle CQM$ и $\measuredangle CRM$ прави, па су суплементни. Одавде закључујемо да су периферијски углови $\measuredangle CQR$ и $\measuredangle CMR$ над луком $\overset{\frown}{CR}$ подударни. Дакле, $\measuredangle CQR = \measuredangle CMR$.



Посматрајмо сада четвороугао $PBMQ$. Њему су углови $\measuredangle BQM$ и $\measuredangle BPM$ над BM подударни, јер су то прави углови. Следи да је четвороугао $PBMQ$ тетиван, па је $\measuredangle PQB = \measuredangle PMB$, јер су то периферијски углови над луком $\widehat{PB}$. Коначно, четвороуга $ABMC$ је тетиван (по дефиницији, његова темена A, B, M, C припадају једном кругу и то баш описаном кругу троугла $\triangle ABC$), па су супротни углови $\measuredangle BAC$ и $\measuredangle BMC$ суплементни, тј. $\measuredangle BAC + \measuredangle BMC = \pi$.

Сада, како је $\measuredangle BAC = \measuredangle PAR$ јер је у питању исти угао и како важи да је $\measuredangle BAC + \measuredangle BMC = \pi$ и $\measuredangle PAR + \measuredangle PMR = \pi$, закључујемо да је $\measuredangle BMC = \measuredangle PMR$. А како имамо да је $\measuredangle BMC = \measuredangle PMB + \measuredangle PMC$ и $\measuredangle PMR = \measuredangle PMC + \measuredangle CMR$, следи да је $\measuredangle PMB = \measuredangle CMR$. Одавде следи, због $\measuredangle PQB = \measuredangle PMB$ и $\measuredangle CQR = \measuredangle CMR$, да је $\measuredangle PQB = \measuredangle CQR$, што смо и желели да докажемо.

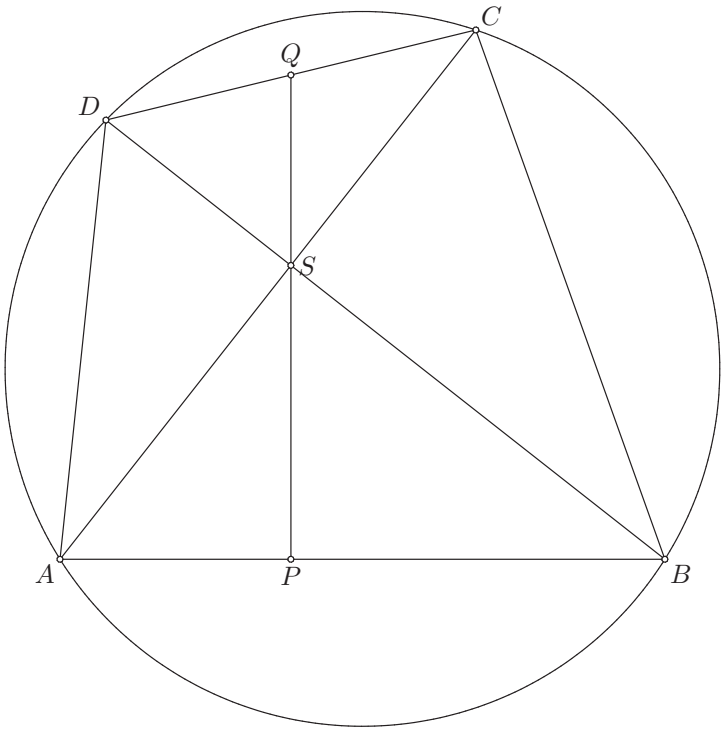
Напомена 1. Тачке P, Q, R не могу све истовремено припадати дужима AB, BC, AC редом. Без умањења општости, нека тачка припада луку $\widehat{BC}$ ком не припада тачка A. Тада ће важити $\mathcal{B}(C, Q, B)$ и $\mathcal{B}(A, P, B)$. На основу распореда тачака $\mathcal{B}(A, P, B)$ закључујемо да $\measuredangle ABM < \measuredangle APM = \frac{\pi}{2}$. Како је четвороугао $ABMC$ тетиван знамо да важи $\measuredangle ABM + \measuredangle ACM = \pi$. На основу тога добијамо да је $\measuredangle ACM > \frac{\pi}{2}$. Како је $\measuredangle ARM = \frac{\pi}{2}$, закључујемо да је $\measuredangle ACM > \measuredangle ARM$, тј. не важи $\mathcal{B}(A, R, C)$. Тачка R не може припадати дужи AC.

Дефиниција 7. Права која садржи тачке P, Q, R зове се *Симсонова права*.

7. Дат је тетиван четвороугао $ABCD$ чије су дијагонале међусобно нормалне и секу се у тачки S.

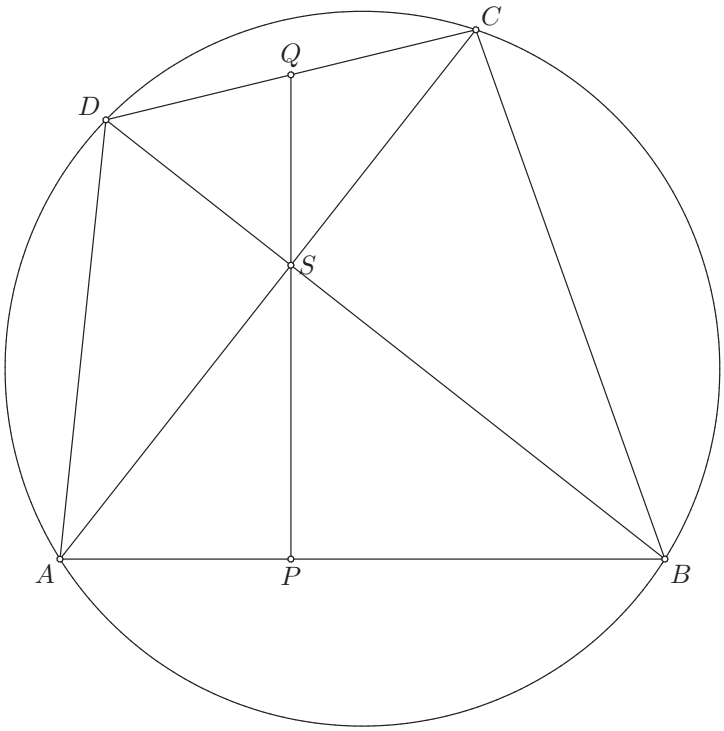
а) Права која садржи тачку S и нормална је на правој AB садржи средиште дужи CD. Доказати.

Решење:



Нека је P подножје нормале из S на страници AB и нека је Q пресечна тачка праве PS и странице CD. Означимо угао $\measuredangle BAC = \alpha$ и угао $\measuredangle ABD = \beta$. Како је $\measuredangle BAS = \measuredangle BAC = \alpha$ и $\measuredangle ABS = \measuredangle ABD = \beta$, из $\measuredangle BAS + \measuredangle ABS + \measuredangle ASB = \pi$ и $\measuredangle ASB = \frac{\pi}{2}$ (дијагонале четвороугла $ABCD$ су нормалне) следи да је $\alpha + \beta + \frac{\pi}{2} = \pi$, тј. да је $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$.

Даље, $\measuredangle BDC = \measuredangle BAC = \alpha$ и $\measuredangle ACD = \measuredangle ABD = \beta$ (периферијски углови над истим луком). Како је $\measuredangle APS = \frac{\pi}{2}$ и $\measuredangle PAS = \measuredangle BAS = \alpha$, следи да је $\measuredangle PSA = \pi - \measuredangle APS - \measuredangle PAS = \pi - \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi}{2} - \alpha = \beta$. Поред тога, како је $\measuredangle ASB = \frac{\pi}{2}$, следи да је $\measuredangle PSB = \measuredangle ASB - \measuredangle PSA = \frac{\pi}{2} - \beta = \alpha$.

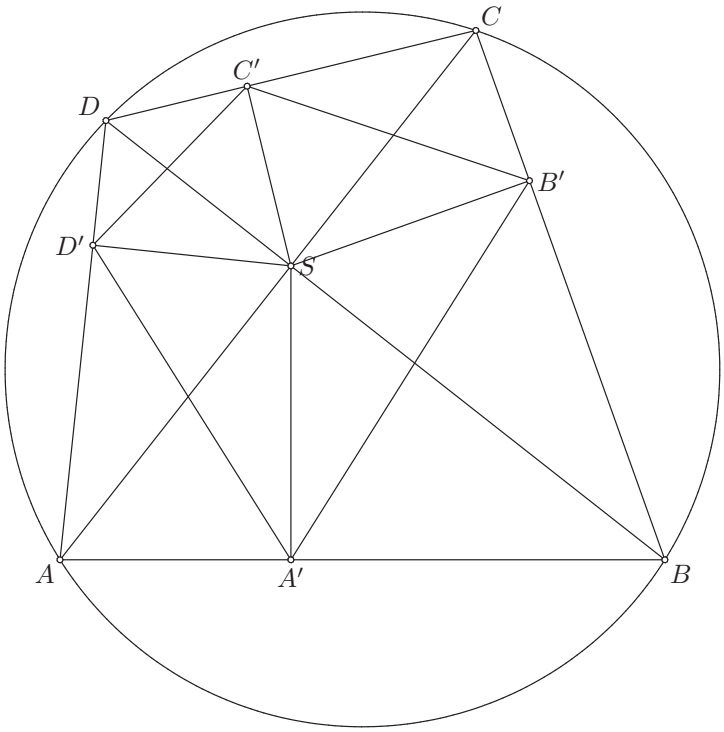


Сада приметимо да су углови $\measuredangle DSQ$ и $\measuredangle PSB$ унакрсни, па следи да је $\measuredangle DSQ = \measuredangle PSB = \alpha$. Такође, углови $\measuredangle CSQ$ и $\measuredangle PSA$ унакрсни, па је и $\measuredangle CSQ = \measuredangle PSA = \beta$. У троуглу $\triangle DSQ$ су углови $\measuredangle DSQ = \alpha$ и $\measuredangle SDQ$ подударни (јер је $\measuredangle SDQ = \measuredangle BDC = \alpha$), па је он једнакокраки. Следи да је $DQ = QS$. А у троуглу $\triangle CSQ$ су углови $\measuredangle CSQ = \beta$ и $\measuredangle SCQ$ подударни (јер је $\measuredangle SCQ = \measuredangle ACD = \beta$), па је и тај троугао једнакокраки. Следи да је $CQ = QS$, па заједно са $DQ = QS$ следи да је $CQ = DQ$, односно да је Q средиште CD.

Дефиниција 8. Четвороугао $ABCD$ је *тангентан* уколико се у њега може уписати круг, тј. уколико постоји круг такав да су странице тог четвороугла тангенте на том кругу.

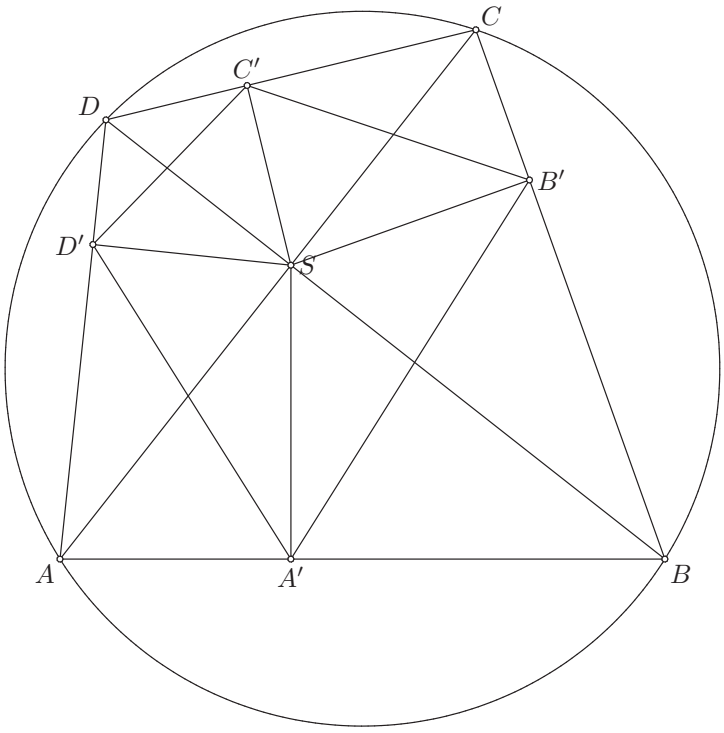
Ако се код четвороугла бисектрисе унутрашњих углова секу у једној тачки, онда је тај четвороугао тангентан.

б) Ако су A', B', C', D' пројекције тачке S на правама AB, BC, CD, DA, редом, тада је четвороугао $A'B'C'D'$ тетиван и тангентан. Доказати.



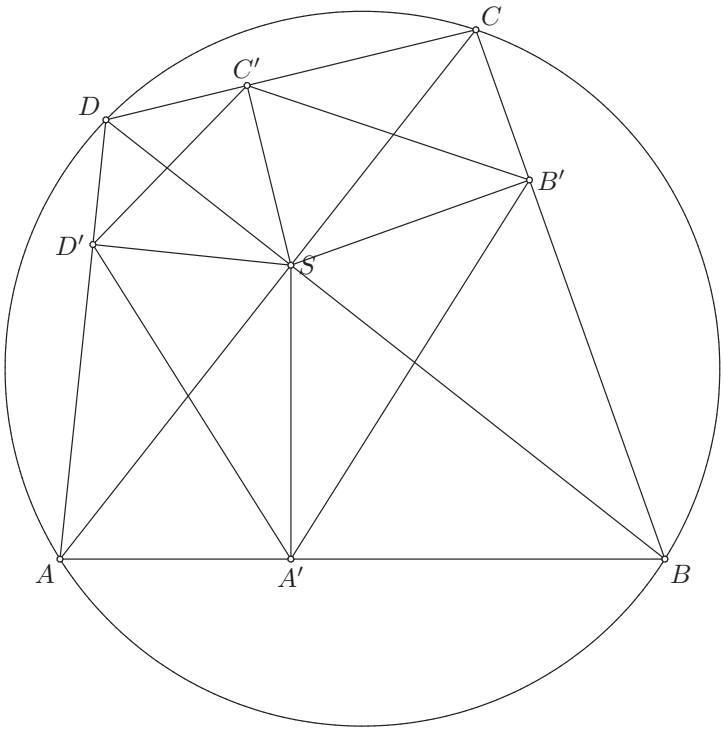
Докажимо да су $A'S, B'S, C'S, D'S$ симетрале унутрашњих углова код темена A', B', C', D' четвороугла $A'B'C'D'$. Тада ћемо имати да се симетрале унутрашњих углова четвороугла $A'B'C'D'$ секу у једној тачки (тачки S), па ће то бити центар његовог уписаног круга, а сам четвороугао ће бити тангентни.

Четвороугао $A'BB'S$ је тетиван. Заиста, наспрамни углови $\measuredangle BA'S$ и $\measuredangle BB'S$ су оба права, па су и суплементни. Слично, четвороугао $B'CC'S$ је тетиван јер су наспрамни углови $\measuredangle CB'S$ и $\measuredangle CC'S$ прави углови, па су суплементни, затим је четвороугао $C'DD'S$ тетиван јер су му наспрамни углови $\measuredangle DC'S$ и $\measuredangle DD'S$ оба права, па су суплементни, и, коначно, четвороугао $D'AA'S$ је тетиван јер су му наспрамни углови $\measuredangle AD'S$ и $\measuredangle AA'S$ оба права, па су суплементни. Иначе, сви малопре поменути углови су прави јер су, по дефиницији, тачке A', B', C', D' подножја нормала из S редом на страницама AB, BC, CD, DA.



Пре него што искористимо тетивност горепоменутих четвороуглова, означимо углове: $\measuredangle SA'B' = \alpha$, $\measuredangle SB'C' = \beta$, $\measuredangle SC'D' = \gamma$, $\measuredangle SD'A' = \delta$. Из тетивности четвороугла $A'BB'S$ следи да је $\measuredangle SBB' = \measuredangle SA'B' = \alpha$ (периферијски над луком $\overset{\frown}{SB'}$). Међутим, $\measuredangle DBC = \measuredangle SBB' = \alpha$, па из тетивности четвороугла $ABCD$ следи да је $\measuredangle DAC = \measuredangle DBC = \alpha$ (периферијски над луком $\overset{\frown}{DC}$), а сада из $\measuredangle SAD' = \measuredangle CAD = \alpha$ и тетивности четвороугла $D'AA'S$ следи да је $\measuredangle SA'D' = \measuredangle SAD' = \alpha$. Дакле, $\measuredangle SA'B' = \alpha = \measuredangle SA'D'$, па је заиста $A'S$ симетрала угла $B'A'D'$, тј. унутрашњег угла код темена A' четвороугла $A'B'C'D'$.

Сасвим слично се доказује да је $\beta = \measuredangle SB'C' = \measuredangle SCC' = \measuredangle ACD = \measuredangle ABD = \measuredangle A'BS = \measuredangle A'B'S$, тј. да је $\measuredangle SB'C' = \measuredangle SB'A' = \beta$, а затим и да је $\measuredangle SC'D' = \measuredangle SC'B' = \gamma$ и $\measuredangle SD'A' = \measuredangle SD'C' = \delta$. Дакле, заиста се тачка S налази у пресеку симетрала унутрашњих углова четвороугла $A'B'C'D'$, па је тај четвороугао тангентан.

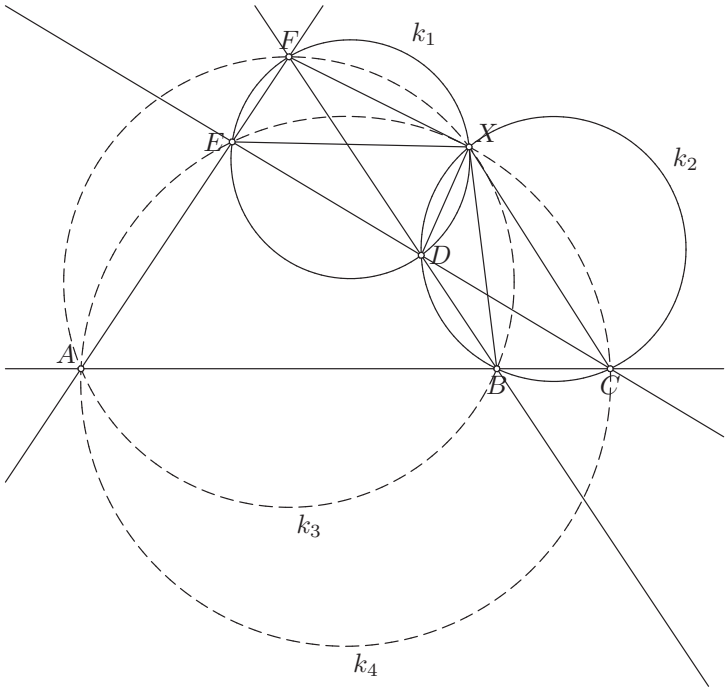


Приметимо да су унутрашњи углови код темена A', B', C', D' четвороугла $A'B'C'D'$ подударни редом угловима $2\alpha, 2\beta, 2\gamma, 2\delta$. Да бисмо доказали да је $A'B'C'D'$ тетиван, довољно је доказати да је збир нека два супротна угла, нпр. углова код темена A' и C', једнак опруженом углу. Другим речима, довољно је доказати да је $2\alpha + 2\gamma = \pi$, односно да је $\alpha + \gamma = \frac{\pi}{2}$. Из претходног имамо да је $\measuredangle SBC = \alpha$ и да је $\measuredangle SCB = \gamma$, па како из услова нормалности дијагонала AC и BD четвороугла $ABCD$ имамо да је $\measuredangle BSC = \frac{\pi}{2}$, следи да је

$$\alpha + \gamma = \measuredangle SBC + \measuredangle SCB = \pi - \measuredangle BSC = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

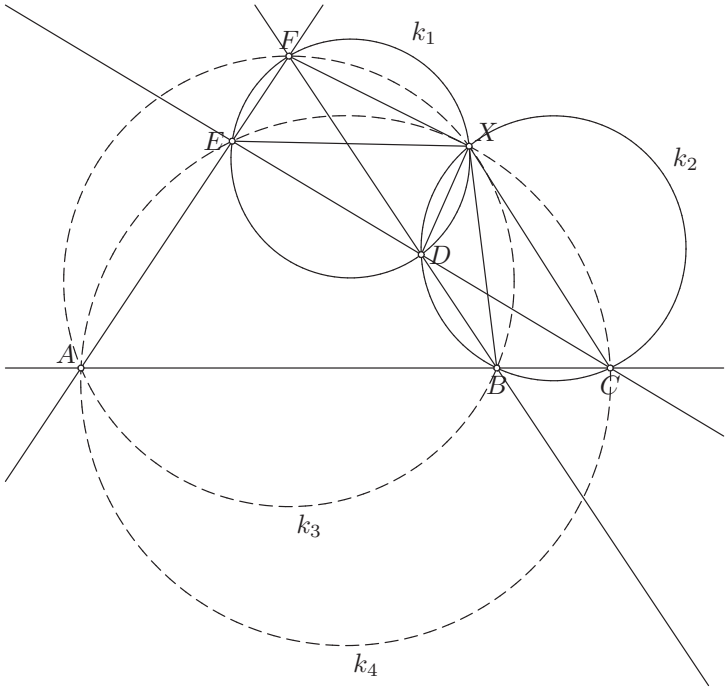
8. (**Микелова теорема**) Четири праве у општем положају у равни одређују четири троугла. Доказати да се описани кругови тих троуглова секу у једној тачки.

Решење:



Означимо пресечне тачке ових правих са A, B, C, D, E, F, као на слици. Тада имамо четири троугла (то су $\triangle DEF, \triangle BCD, \triangle ABF, \triangle ACE$). Нека су k_1, k_2, k_3, k_4 редом њихови описани кругови. Желимо да докажемо да се они секу у једној тачки. Нека су X, D пресечне тачке кругова k_1 и k_2. Означимо углове $\measuredangle EDF = \alpha$, $\measuredangle EXD = \beta$ и $\measuredangle DXB = \gamma$. Углови $\measuredangle BDC$ и $\measuredangle EDF$ су унакрсни, па су подударни. Дакле, $\measuredangle BDC = \alpha$. Угао $\measuredangle EXF$ је периферијски над луком $\widehat{EF}$, па је подударан углу $\measuredangle EDF$. Следи да је $\measuredangle EXF = \alpha$. Такође, угао $\measuredangle BXC$ је периферијски над луком $\widehat{BC}$, па је подударан углу $\measuredangle BDC$. Следи да је и $\measuredangle BXC = \alpha$.

Имамо и да је $\measuredangle EFD = \measuredangle EXD = \beta$ јер су то периферијски углови над луком $\widehat{ED}$, као и $\measuredangle DCB = \measuredangle DXB = \gamma$ јер су то периферијски углови над луком $\widehat{DB}$. Одредимо угао $\measuredangle BAF = \measuredangle CAE$, пошто је то заједнички унутрашњи угао четвороуглова $ABXF$ и $ACXE$. У томе ће нам помоћи угао $\measuredangle CEA$ који је спољашњи угао код темена E троугла DEF, па је једнак збиру његова два несуседна унутрашња угла, а то су $\measuredangle EFD = \beta$ и $\measuredangle EDF = \alpha$. Дакле, $\measuredangle CEA = \alpha + \beta$. Следи да је $\measuredangle CAE = \pi - \measuredangle CEA - \measuredangle ACE = \pi - \alpha - \beta - \gamma$.

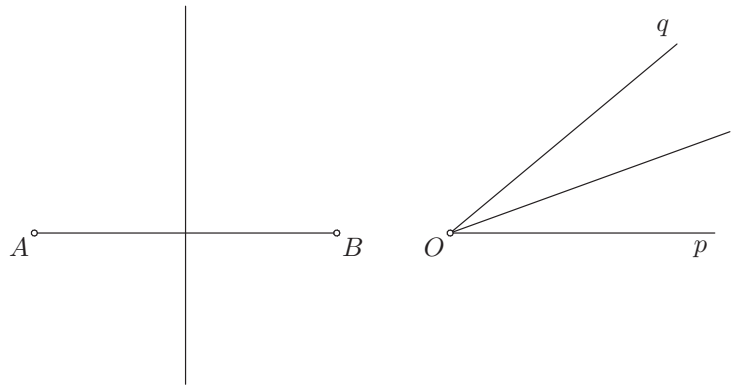


Сада доказујемо да су четвороуглови $ABXF$ и $ACXE$ тетивни, јер ћемо тада добити да њихово заједничко теме X припада круговима који садрже тачке A, B, F, односно A, C, E, а то су баш описани кругови троуглова $\triangle ABF$, односно $\triangle ACE$. А како је $\measuredangle BXF = \measuredangle BXD + \measuredangle DXE + \measuredangle EXF = \alpha+\beta+\gamma$, као и $\measuredangle CXE = \measuredangle CXB+\measuredangle BXD+\measuredangle DXE = \alpha+\beta+\gamma$, следи да су супротни углови $\measuredangle BAF$ и $\measuredangle BXF$ четвороугла $ABXF$, односно $\measuredangle CAE$ и $\measuredangle CXE$ четвороугла $ACXE$, суплементни. Дакле, то су тетивни четвороуглови, па имамо да X припада круговима k_3, k_4 (описаним око троуглова $\triangle ABF$, односно $\triangle ACE$).

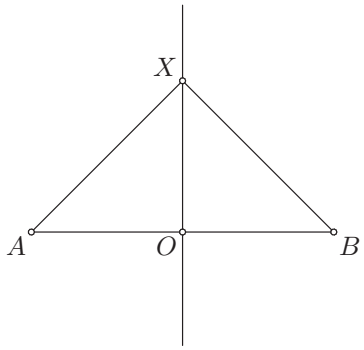
Према томе, тачка X припада круговима k_1, k_2, k_3, k_4. Како се кругови k_1, k_2 секу у тачкама D, X, а пресек сва четири круга садржи тачку X и мора бити подскуп скупа који је пресек k_1 и k_2, следи да је пресек сва четири круга или скуп $\{D, X\}$ или скуп $\{X\}$ (тј. само тачка X). Међутим, тачка D не припада ни кругу k_3 ни кругу k_4, па следи да не припада пресеку сва четири круга. Дакле, пресек кругова k_1, k_2, k_3, k_4 је само тачка X, тј. та четири круга секу се у једној тачки (тачки X).

Напомена 2. Када би кругови k_1 и k_2 имали само једну пресечну тачку D тј. тачку додира, тада праве не би биле у општем положају, већ би FE и BC биле паралелне. Дакле, кругови k_1 и k_2 се морају сећи у две различите тачке.

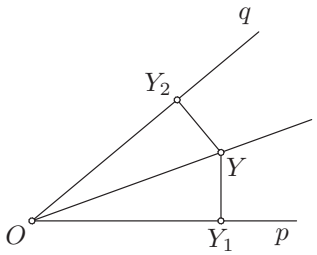
Медијатриса дужи је исто што и симетрала дужи, док је бисектриса угла *полуправа* која га дели на два подударна угла за разлику од симетрале угла која је *права* која садржи бисектрису.



Медијатриса дужи која се налази у равни α је скуп свих тачака равни α које су подједнако удаљене од њених темена.

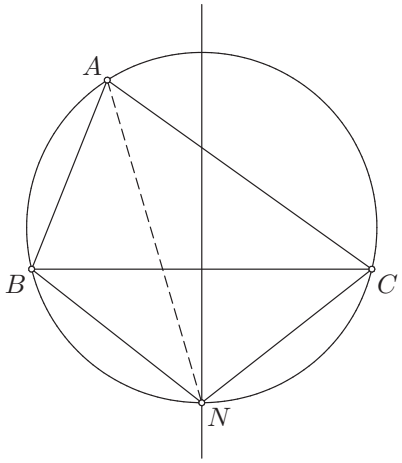


Бисектриса угла који се налази у равни α је скуп свих тачака равни α које припадају углу и које су подједнако удаљене од његових кракова.



9. Медијатриса странице и бисектриса наспрамног угла троугла секу се у тачки која припада описаном кругу тог троугла. Доказати.

Решење:

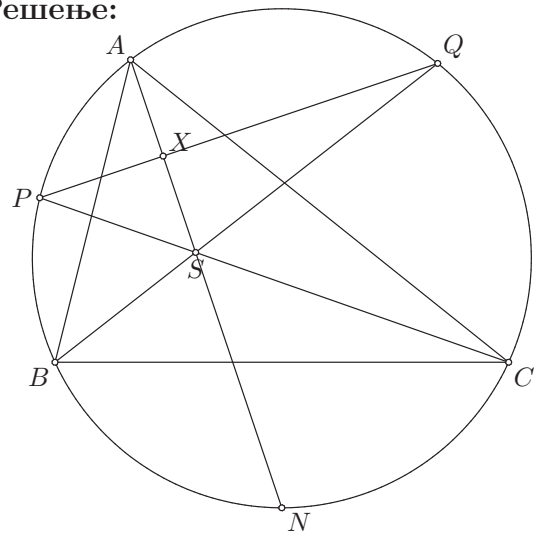


Нека је N пресечна тачка медијатрисе странице BC и описаног круга троугла $\triangle ABC$ која припада оном луку $\overset{\frown}{BC}$ којем не припада тачка A (наиме, постоје две пресечне тачке медијатрисе странице BC и описаног круга, па морамо прецизирати коју од њих желимо означити са N, а како желимо да то буде она тачка која се налази у углу $\measuredangle BAC$ и како имамо два лука $\overset{\frown}{BC}$, за N бирамо тачку на оном луку $\overset{\frown}{BC}$ на којем се не налази тачка A). Све што сада треба доказати јесте да је полуправа AN бисектриса угла $\measuredangle BAC$, па је довољно доказати да је $\measuredangle BAN = \measuredangle NAC$.

Троугао $\triangle NBC$ је једнакокраки јер је $NB = NC$ (N је на медијатриси дужи BC), па следи да је $\measuredangle NBC = \measuredangle BCN$. Означимо те углове са φ. Углови $\measuredangle BAN$ и $\measuredangle BCN$ су оба периферијска над луком $\overset{\frown}{BN}$, па су они подударни, тј. $\measuredangle BAN = \measuredangle BCN = \varphi$. Слично, углови $\measuredangle NAC$ и $\measuredangle NBC$ су оба периферијска над луком $\overset{\frown}{NC}$, па су они подударни, тј. важи $\measuredangle NAC = \measuredangle NBC = \varphi$. Овим је доказ завршен, јер је сада $\measuredangle BAN = \varphi = \measuredangle NAC$.

10. Нека су P и Q средишта лукова AB и AC круга описаног око троугла ABC и s_α бисектриса угла $\measuredangle BAC$. Доказати да је $PQ \perp s_\alpha$.

Решење:



Из 9. задатка имамо да су P, Q тачке такве да су CP, BQ бисектрисе углова $\measuredangle BCA$ и $\measuredangle ABC$. Као што знамо, бисектрисе унутрашњих углова троугла секу се у центру уписаног круга, па означимо пресечну тачку CP, BQ, s_α са S. Такође, означимо са X пресечну тачку PQ и s_α.

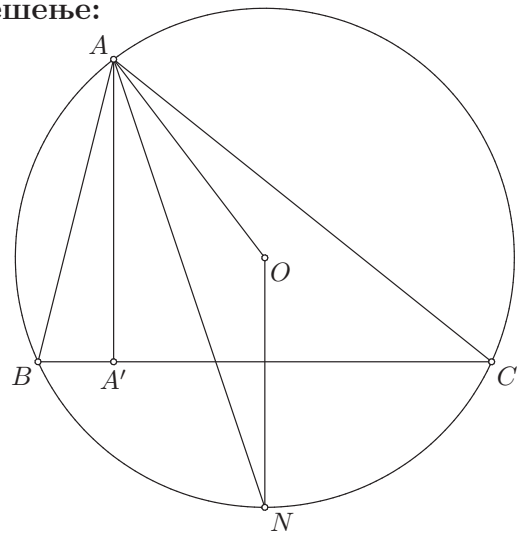
Посматрајмо троугао $\triangle XSQ$ и израчунајмо његове унутрашње углове. Прво имамо да је $\measuredangle XQS = \measuredangle PQB = \measuredangle PCB = \frac{\gamma}{2}$, јер је CP бисектриса угла $\measuredangle BCA = \gamma$. Угао $\measuredangle XSQ$ је спољашњи угао троугла $\triangle ABS$, па је једнак збиру његових несуседних унутрашњих углова, а то су углови $\measuredangle BAS$ и $\measuredangle ABS$. Из чињенице да су AS и BS бисектрисе углова $\measuredangle BAC = \alpha$ и $\measuredangle ABC = \beta$ следи да је $\measuredangle BAS = \frac{\alpha}{2}$ и $\measuredangle ABS = \frac{\beta}{2}$. Дакле, $\measuredangle XSQ = \measuredangle BAS + \measuredangle ABS = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$, па је

$$\measuredangle SXQ = \pi - \measuredangle XSQ - \measuredangle XQS = \pi - \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2},$$

а то управо значи да је $QX \perp XS$, односно да је $PQ \perp s_\alpha$.

11. Нека су A', N и O редом подножје висине из A, пресек бисектрисе угла $\measuredangle BAC$ са описаном кругом троугла ABC ($AB < AC$) и центар описаног круга, доказати $\measuredangle A'AN = \measuredangle ANO = \measuredangle NAO = \frac{1}{2}(\measuredangle ABC - \measuredangle ACB)$.

Решење:

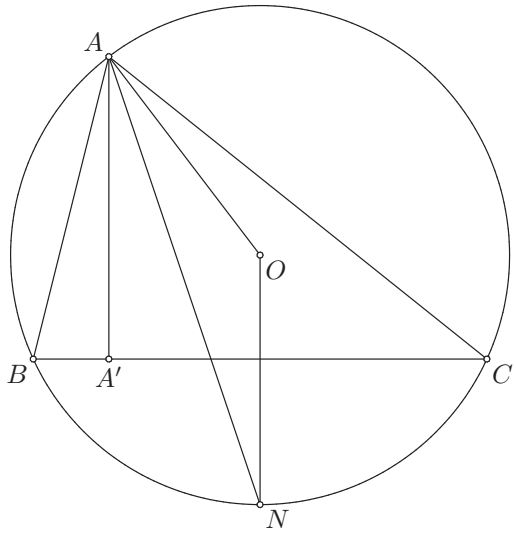


На основу 9. задатка следи да се тачка N налази на медијатриси странице BC, па као и тачка O припада тој медијатриси, следи да је права ON баш медијатриса странице BC. Одавде добијамо да је $ON \perp BC$, а како је и $AA' \perp BC$, следи да је $ON \parallel AA'$. Сада имамо да углови $\measuredangle A'AN$ и $\measuredangle ANO$ имају заједнички крак AN и паралелне краке $A'A$ и NO, па су то подударни углови. Дакле, $\measuredangle A'AN = \measuredangle ANO$. Троугао $\triangle ANO$ је једнакокрак, јер су OA и ON полупречници описаног круга троугла $\triangle ABC$, па су подударне дужи, тј. $OA = ON$. Следи да су углови наспрам њих подударни, тј. да је $\measuredangle ANO = \measuredangle NAO$.

Сада када знамо да су ови углови подударни, треба да изразимо било који од њих преко углова β и γ, тј. углова $\measuredangle ABC$ и $\measuredangle ACB$. Изразимо нпр. угао $\measuredangle A'AN$. Имамо да је $\measuredangle A'AN = \measuredangle BAN - \measuredangle BAA'$ и да је $\measuredangle BAN = \frac{\alpha}{2}$. Како је троугао $\triangle ABA'$ правоугли и $\measuredangle A'BA = \measuredangle CBA = \beta$, следи да је $\measuredangle BAA' = \pi - \measuredangle BA'A - \measuredangle A'BA = \pi - \frac{\pi}{2} - \beta = \frac{\pi}{2} - \beta$. Сада имамо да је

$$\begin{aligned} \measuredangle A'AN &= \measuredangle BAN - \measuredangle BAA' = \frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{2} + \beta = \frac{\alpha - \pi + 2\beta}{2} \\ &= \frac{\alpha - (\alpha + \beta + \gamma) + 2\beta}{2} = \frac{\beta - \gamma}{2}, \end{aligned}$$

што је и требало доказати.

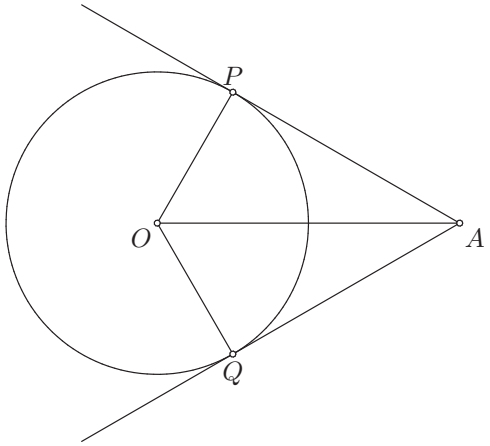


Напомена 3. Где се овде користила претпоставка да је $AB < AC$? Ако замислимо да смо на претходној слици обрнуто означили тачке B и C, онда није $\measuredangle A'AN = \frac{1}{2}(\measuredangle ABC - \measuredangle ACB)$, него је $\measuredangle A'AN = \frac{1}{2}(\measuredangle ACB - \measuredangle ABC)$. Поента је у томе што се при претпоставци $AB > AC$ мења распоред тачака на слици и онда не важе неке ствари које важе када је $AB < AC$. Конкретно, не важи $\measuredangle A'AN = \measuredangle BAN - \measuredangle BAA'$, већ $\measuredangle A'AN = \measuredangle A'AB - \measuredangle NAB$, па то мења резултат.

У строго формалном доказу, какви су нпр. докази на предавањима, морали бисмо помоћу претпоставке $AB < AC$ доказивати да важи распоред тачака који добијамо цртањем слике. Међутим, када решавамо задатке на колоквијуму или испиту, ми то не морамо да доказујемо, већ је довољно да то „видимо са слике". Зато је неопходно нацртати слику која одговара датој претпоставци. Конкретно у овом задатку, треба нацртати слику тако да заиста буде $AB < AC$, што смо и учинили.

Дефиниција 9. Нека је A тачка ван круга k и нека су P, Q додирне тачке тангенти из тачке A на кругу k. Дужи AP, AQ зову се *тангентне дужи* из тачке A на кругу k.

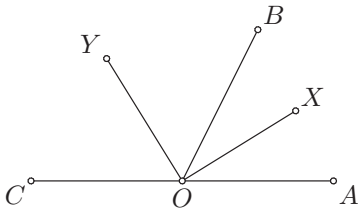
Теорема 6. *Тангентне дужи из тачке A на кругу k су подударне.*



Доказ: Посматрајмо троуглове $\triangle OPA$ и $\triangle OQA$. Њима је заједничка страница OA, странице OP и OQ су подударне јер су то полупречници круга k, углови $\measuredangle OPA$ и $\measuredangle OQA$ су прави (углови између тангенти и полупречника), па су подударни, а углови $\measuredangle OAP$ и $\measuredangle OAQ$ су оба оштра јер већ имамо праве углове у троугловима $\triangle OPA$ и $\triangle OQA$, па преостали углови морају бити оштри. Закључујемо на основу става ССУ да је $\triangle OPA \cong \triangle OQA$, па је $AP = AQ$, што је и требало доказати. □

Дефиниција 10. *Напоредни углови* они углови који имају заједничко теме и један крак, а преостали краци припадају једној правој.

Теорема 7. *Бисектрисе напоредних углова су међусобно нормалне.*

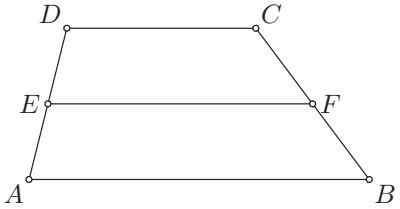


Доказ: Нека је $\measuredangle AOB = \alpha$ и $\measuredangle BOC = \beta$. Тада је $\alpha + \beta = \pi$. Ако је OX бисектриса угла $\measuredangle AOB$, а OY бисектриса угла $\measuredangle BOC$, онда је $\measuredangle XOB = \frac{\alpha}{2}$ и $\measuredangle BOY = \frac{\beta}{2}$. Следи да је $\measuredangle XOY = \measuredangle XOB + \measuredangle BOY = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\pi}{2}$, тј. да су бисектрисе OX и OY међусобно нормалне. □

Дефиниција 11. Четвороугао $ABCD$ је *трапез* са *основицама* AB, CD и *крацима* AD, BC ако је $AB \parallel CD$.

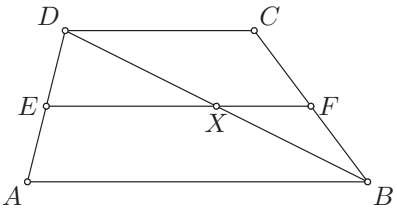
Имали смо средњу линију троугла, а сада ћемо дефинисати и средњу линију трапеза.

Дефиниција 12. Нека је $ABCD$ трапез и нека су E, F редом средишта кракова AD, BC. Дуж EF зове се *средња линија* трапеза $ABCD$.



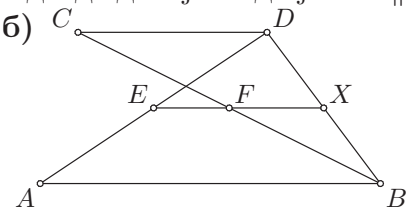
Теорема 8. *Нека је четвороугао $ABCD$ трапез и нека су E, F средишта кракова AD, BC. Тада је средња линија EF паралелна основицама трапеза, тј. $EF \parallel AB$ и $EF \parallel CD$ и важи*
а) *$EF = \frac{1}{2}(AB + CD)$ ако је трапез $ABCD$ конвексан;*
б) *$EF = \frac{1}{2}(AB - CD)$ ако је трапез $ABCD$ неконвексан и $AB > CD$.*

Доказ: **а**)



Нека је X средиште дијагонале BD трапеза $ABCD$. Следи да је EX средња линија троугла $\triangle ABD$, па је $EX \parallel AB$ и $EX = \frac{1}{2}AB$. Слично, XF је средња линија троугла $\triangle BCD$, па је $XF \parallel CD$ и $XF = \frac{1}{2}CD$. Како је $AB \parallel CD$, следи да је $EX \parallel XF$, па су тачке E, X, F колинеарне. Одавде добијамо да је $EF \parallel AB$ и $EF = EX + XF = \frac{1}{2}(AB + CD)$.

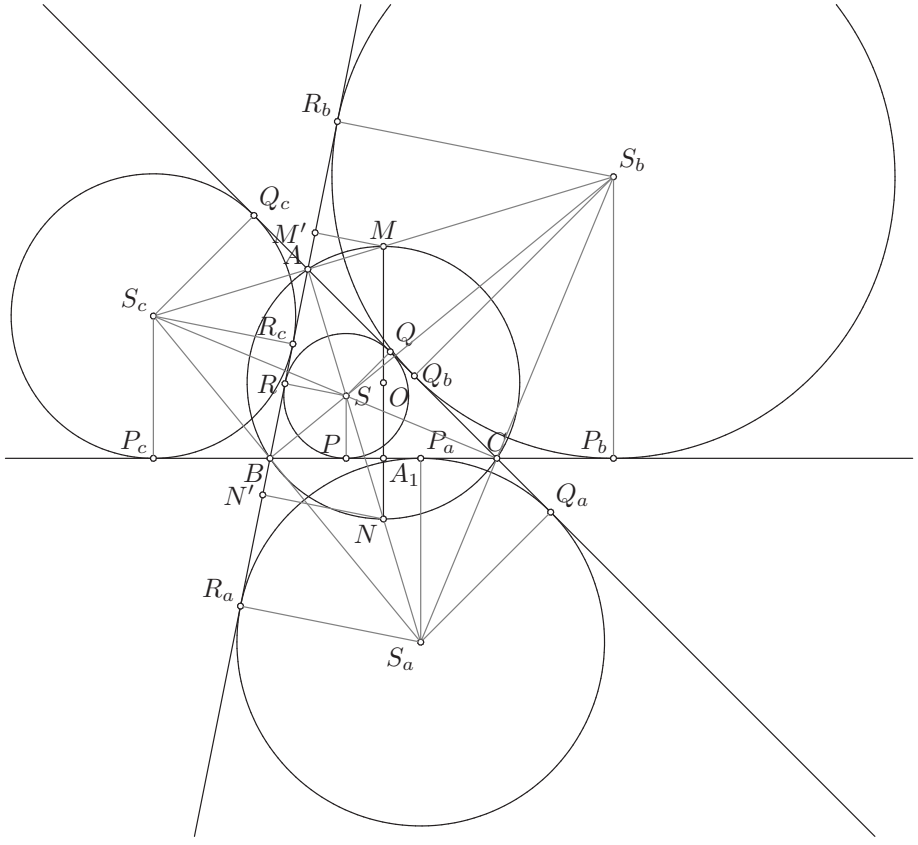
б)



Нека је X средиште дијагонале BD трапеза $ABCD$. Следи да је EX средња линија троугла $\triangle ABD$, па је $EX \parallel AB$ и $EX = \frac{1}{2}AB$. Слично, XF је средња линија троугла $\triangle BCD$, па је $XF \parallel CD$ и $XF = \frac{1}{2}CD$. Како је $AB \parallel CD$, следи да је $EX \parallel XF$, па су тачке E, X, F колинеарне. Одавде добијамо да је $EF \parallel AB$ и $EF = EX - XF = \frac{1}{2}(AB - CD)$. $\square$

Напомена 4. Ми смо доказали да су одређене дужи средње линије (троугла или трапеза) ако знамо да су њени крајеви средишта одговарајућих страница и онда смо добијали паралелност. Међутим, довољно је да знамо само за један крај дужи да је средиште одговарајуће странице и да знамо паралелност да би посматрана дуж била средња линија. Ово убудуће можемо користити.

12. (**Велики задатак**) Ако са A_1, B_1 и C_1 обележимо средишта ивица $BC = a, CA = b, AB = c$ троугла ABC $(b > c)$, са p полуобим тог троугла, са $l(O, r)$ описани круг тог троугла, са P, Q, R тачке у којима уписани круг $k(S, \rho)$ додирује праве BC, CA, AB, са P_i, Q_i, R_i $(i = a, b, c)$ тачке у којима споља уписани круг $k_i(S_i, \rho_i)$ додирује редом праве BC, CA, AB, са M и N тачке у којима медијатриса ивице BC сече круг l, при чему је M на луку BAC, са M' и N' подножја управних из тачака M и N на правој AB, са P', P'_a, P'_b, P'_c дијаметрално супротне тачке тачкама P, P_a, P_b, P_c,



доказати да је:

1) $\mathcal{B}(A, P', P_a), \quad \mathcal{B}(A, P, P'_a), \quad \mathcal{B}(P_c, A, P'_b), \quad \mathcal{B}(P_b, A, P'_c)$;

2) $AQ_a = AR_a = p, \quad QQ_a = RR_a = a, \quad Q_bQ_c = R_bR_c = a$;

3) $AQ = AR = BR_c = BP_c = CP_b = CQ_b = p - a$;

4) $PP_a = b - c, \quad P_bP_c = b + c$;

5) $PA_1 = P_aA_1, \quad P_cA_1 = P_bA_1$;

6) $NS = NS_a = NB = NC, \quad MS_b = MS_c = MB = MC$;

7) $A_1M = \frac{1}{2}(\rho_b + \rho_c), \quad A_1N = \frac{1}{2}(\rho_a - \rho)$;

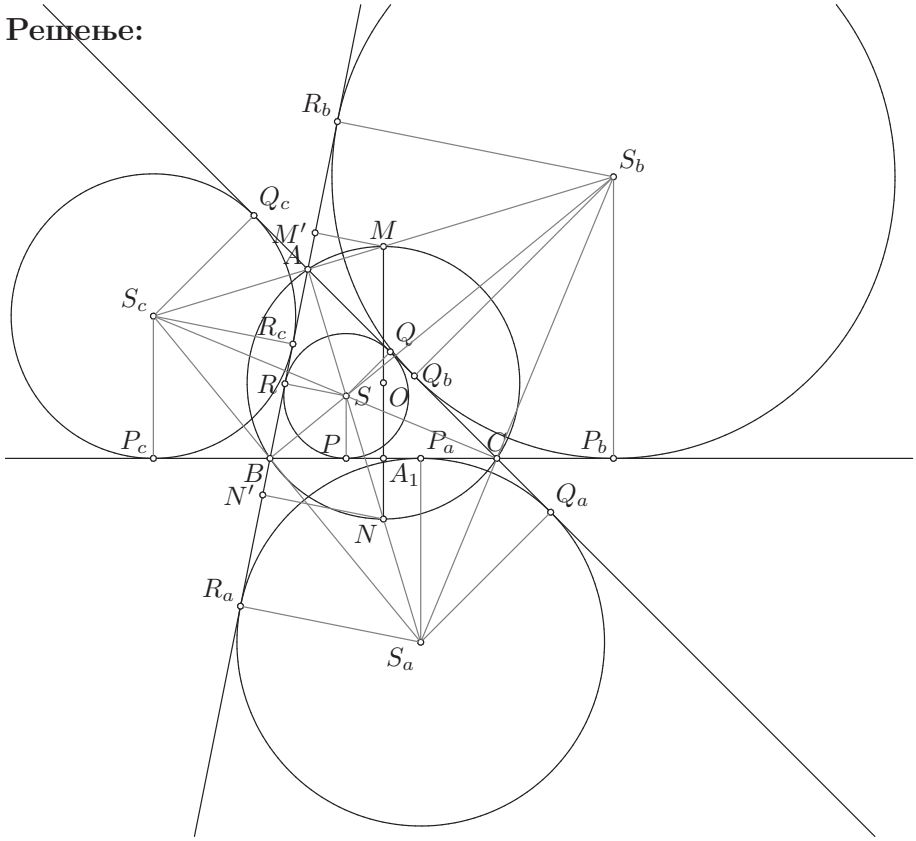
8) $MM' = \frac{1}{2}(\rho_b - \rho_c), \quad NN' = \frac{1}{2}(\rho + \rho_a)$;

9) $\rho_a + \rho_b + \rho_c = 4r + \rho$;

10) $AM' = \frac{1}{2}(b - c) = BN', \quad AN' = \frac{1}{2}(b + c) = BM'$;

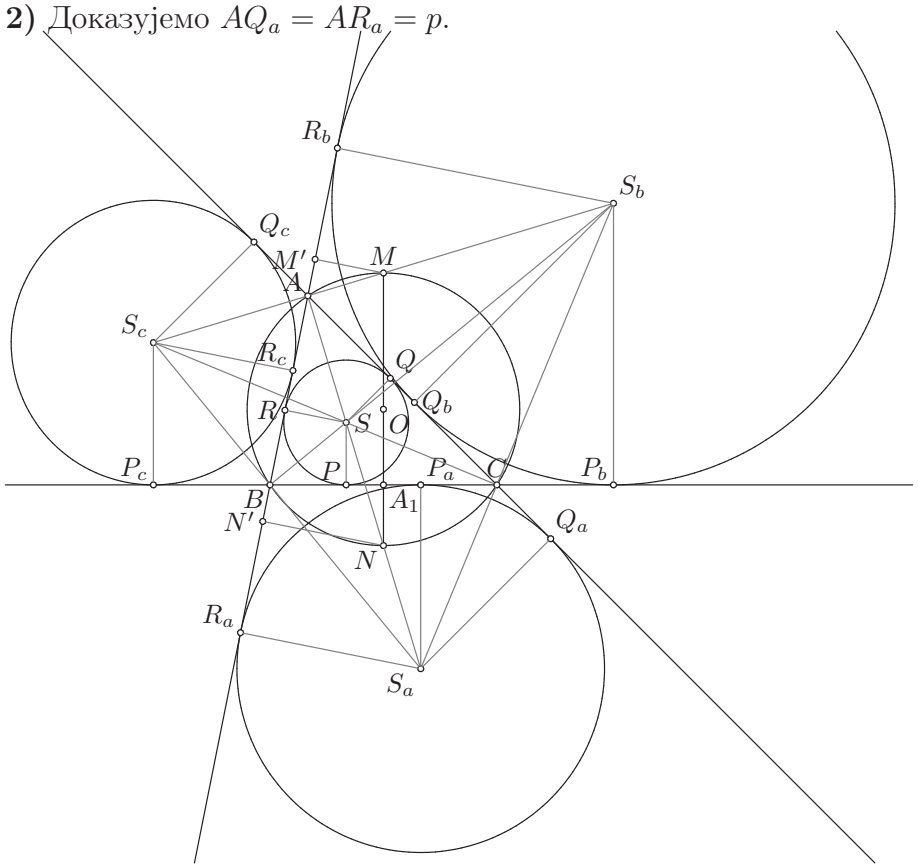
11) $M'N' = b$.

Решење:



1) $\mathcal{B}(A, P', P_a)$, $\mathcal{B}(A, P, P'_a)$, $\mathcal{B}(P_c, A, P'_b)$, $\mathcal{B}(P_b, A, P'_c)$;
Ово тврђење нећемо сада доказивати, јер ћемо у доказу користити сличност. Доказ ћемо видети у следећем поглављу.

2) Доказујемо $AQ_a = AR_a = p$.

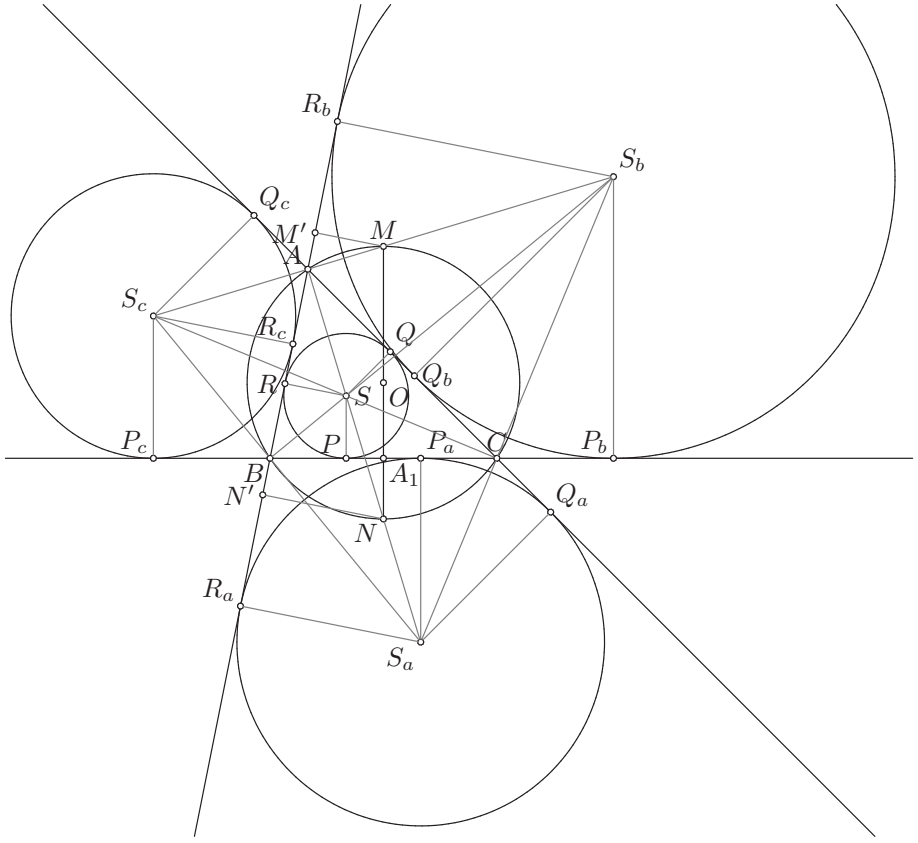


Дужи AQ_a и AR_a су тангентне дужи из тачке A на споља уписаном кругу k_a, па следи да су оне подударне, тј. да је $AQ_a = AR_a$. Да бисмо доказали да су те дужи једнаке полуобиму троугла $\triangle ABC$, посматрајмо збир $AQ_a + AR_a$. Имамо да је $AQ_a + AR_a = AC + CQ_a + AB + BR_a = AC + AB + CQ_a + BR_a$, па како је $CQ_a = CP_a$ и $BR_a = BP_a$, јер су то тангентне дужи редом из тачака C, B на кругу k_a, следи да је

$$\begin{aligned} AQ_a + AR_a &= AC + AB + CQ_a + BR_a \\ &= b + c + CP_a + BP_a = b + c + BC \\ &= b + c + a = 2p, \end{aligned}$$

па је $AQ_a = AR_a = \frac{2p}{2} = p$, што је и требало доказати. Такође, јасно је да смо овим доказали да је и $BP_b = BR_b = p$, као и $CP_c = CQ_c = p$, јер смо већ напомињали да су сва три темена троугла равноправна.

Доказујемо $QQ_a = RR_a = a, \quad Q_bQ_c = R_bR_c = a$;



Даље, како је $AQ = AR$, јер су то тангентне дужи из тачке A на уписаном кругу k, следи да је $QQ_a = AQ_a - AQ = AR_a - AR = RR_a$. Такође, пошто знамо да је $AQ_a = AR_a = p$, треба да докажемо да је $AQ = AR = p - a$, да би било $QQ_a = RR_a = AR_a - AR = p - (p - a) = a$. У том циљу, означимо $AQ = AR = x$, $BR = BP = y$ (тангентне дужи из B на k) и $CP = CQ = z$ (тангентне дужи из C на k). Сада из очигледних једнакости

$$\begin{aligned} AR + RB &= AB \\ BP + PC &= BC \\ CQ + QA &= CA \end{aligned}$$

следи да имамо следећи систем линеарних алгебарских једначина са непознатим x, y, z:

$$\begin{aligned} x + y &= c \\ y + z &= a \\ z + x &= b. \end{aligned}$$

Саберимо све три једначине и добићемо $x + y + y + z + z + x = c + a + b$, односно $2(x + y + z) = 2p$, односно $x + y + z = p$. Сада лако добијамо да је

$$\begin{aligned} x &= x + y + z - (y + z) = p - a, \\ y &= x + y + z - (x + z) = p - b \qquad \text{и} \\ z &= x + y + z - (x + y) = p - c. \end{aligned}$$

Дакле, доказали смо да је $AQ = AR = x = p - a$ (успут смо доказали и да је $BR = BP = y = p - b$ и $CP = CQ = z = p - c$), па је

$$QQ_a = RR_a = AR_a - AR = p - (p - a) = a.$$

Приметимо да је $Q_bQ_c = CQ_c - CQ_b$, а имамо да је $CQ_c = p$, као и да је $CQ_b = CP_b$ јер су то тангентне дужи из тачке C на кругу k_b. А како је $CP_b = BP_b - BC$ и $BP_b = p$, следи да је $CP_b = p - a$, па имамо да је

$$Q_bQ_c = CQ_c - CQ_b = p - CP_b = p - (p - a) = a.$$

Слично, приметимо да је $R_bR_c = BR_b - BR_c$, затим да је $BR_b = p$, да је $BR_c = BP_c = CP_c - CB$ и да је $CP_c = p$, па је $BR_c = CP_c - CB = p - a$, што значи да је

$$R_bR_c = BR_b - BR_c = p - (p - a) = a,$$

што је и требало доказати.

3) Доказујемо $AQ = AR = BR_c = BP_c = CP_b = CQ_b = p - a$.

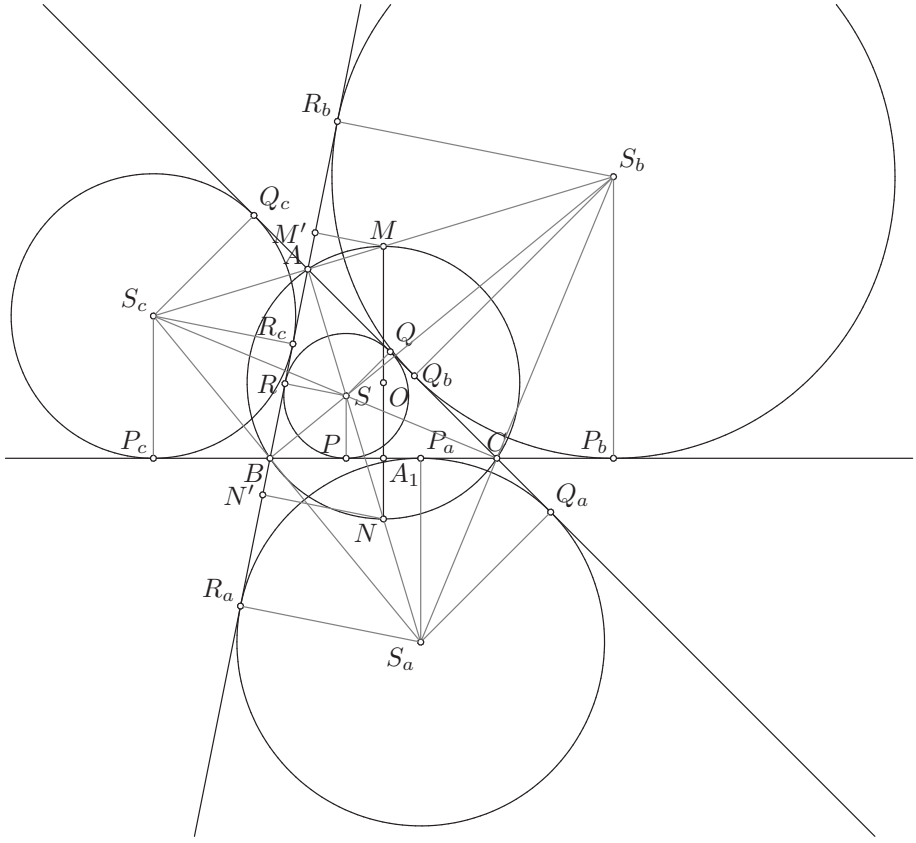
Све смо већ доказали док смо доказивали **2)**. Заиста, доказали смо да је $AQ = AR = x = p - a$, затим да је $CQ_b = CP_b = p - a$ и коначно да је $BR_c = BP_c = p - a$. Дакле, заиста је

$$AQ = AR = BR_c = BP_c = CP_b = CQ_b = p - a.$$

Аналогно важи: $BP = BR = CQ_a = CP_a = AQ_c = AR_c = p - b$.

$$CQ = CP = AR_b = AQ_b = BR_a = BP_a = p - c.$$

4) Доказујемо $PP_a = b - c, \quad P_bP_c = b + c.$



Имамо да је $PP_a = BP_a - BP$ и знамо да је $BP = y = p - b$. Како је $BP_a = BR_a$ јер су то тангентне дужи из B на кругу k_a и како је $BR_a = AR_a - AB = p - c$, следи да је

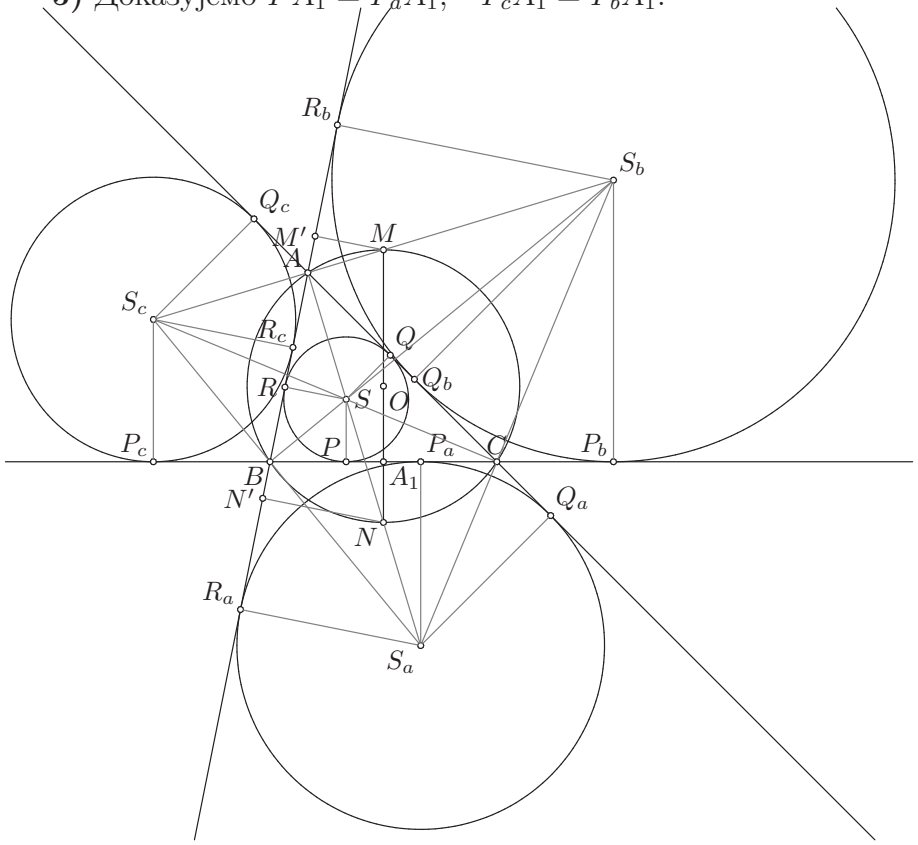
$$PP_a = BP_a - BP = BR_a - (p - b) = p - c - (p - b) = b - c.$$

Даље, имамо да је $P_bP_c = P_bC + CP_c$ и знамо да је $P_bC = p - a$ и да је $CP_c = p$, па следи да је

$$P_bP_c = P_bC + CP_c = p - a + p = 2p - a = a + b + c - a = b + c.$$

што је и требало доказати.

5) Доказујемо $PA_1 = P_aA_1, \quad P_cA_1 = P_bA_1$.



Потребно је доказати да је A_1 (средиште дужи BC) средиште дужи PP_a и P_bP_c. Имамо да је

$$\begin{aligned} PA_1 &= BA_1 - BP = \frac{1}{2}BC - (p-b) \\ &= \frac{a}{2} - \frac{a+b+c}{2} + b = \frac{a-a-b-c+2b}{2} \\ &= \frac{b-c}{2} = \frac{1}{2}PP_a, \end{aligned}$$

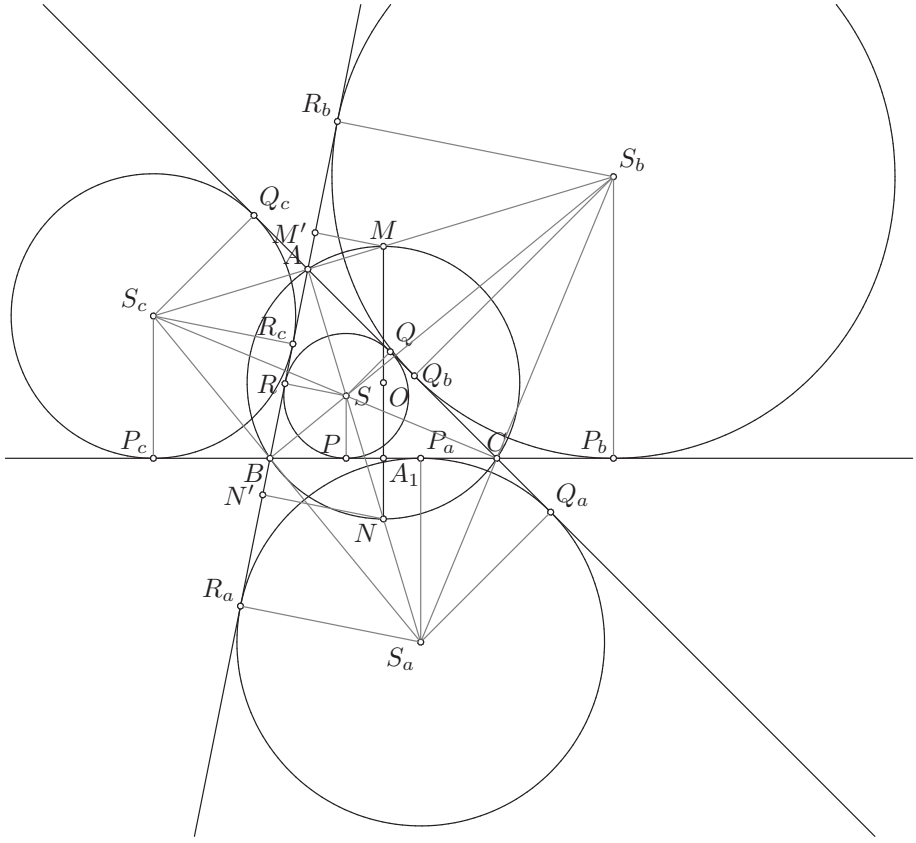
па је заиста A_1 средиште дужи PP_a, тј. $PA_1 = P_aA_1$.

Слично, имамо да је

$$\begin{aligned} P_cA_1 &= P_cB + BA_1 = p - a + \frac{1}{2}BC \\ &= \frac{a+b+c}{2} - a + \frac{a}{2} = \frac{a+b+c-2a+a}{2} \\ &= \frac{b+c}{2} = \frac{1}{2}P_cP_b, \end{aligned}$$

па је A_1 средиште дужи P_cP_b, односно важи $P_cA_1 = P_bA_1$.

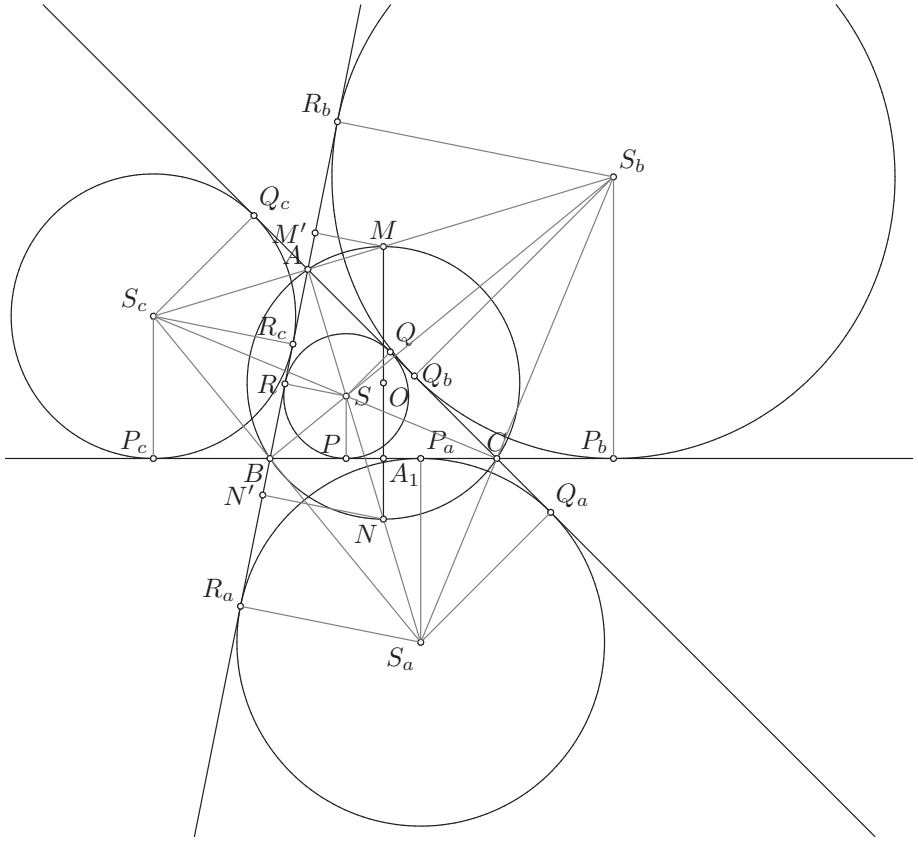
6) Доказујемо $NS = NS_a = NB = NC, \quad MS_b = MS_c = MB = MC.$



Посматрајмо троугао $\triangle S_aS_bS_c$. Важи да је $S_aA \perp S_bS_c$, јер је S_aA симетрала унутрашњег, а S_bS_c симетрала спољашњег угла код темена A троугла $\triangle ABC$, а за такве симетрале знамо да су међусобно нормалне. Дакле, тачка A је подножје висине из темена S_a троугла $\triangle S_aS_bS_c$. Слично су и тачке B, C редом подножја висина из темена S_b, S_c троугла $\triangle S_aS_bS_c$. Круг који садржи тачке A, B, C јесте описани круг l троугла $\triangle ABC$, а како су A, B, C подножја висина троугла $\triangle S_aS_bS_c$, следи да је круг l који их садржи Ојлеров круг троугла $\triangle S_aS_bS_c$. Осим подножја висина, Ојлеров круг садржи средишта страница и средишта дужи одређених теменима и ортоцентром троугла. У пресеку симетрала S_aA, S_bB, S_cC унутрашњих углова троугла $\triangle ABC$ налази се центар S уписаног круга троугла $\triangle ABC$, одакле следи да је S ортоцентар троугла $\triangle S_aS_bS_c$ (сетимо се, S_aA, S_bB, S_cC су висине троугла $\triangle S_aS_bS_c$). А пошто тачка N припада кругу l и припада дужи S_aS која спаја теме S_a и ортоцентар S троугла $\triangle S_aS_bS_c$, следи да тачка N мора бити баш средиште дужи S_aS, тј. мора бити $NS = NS_a$.

Троугао $\triangle SBS_a$ је правоугли с правим углом код темена B (SB је

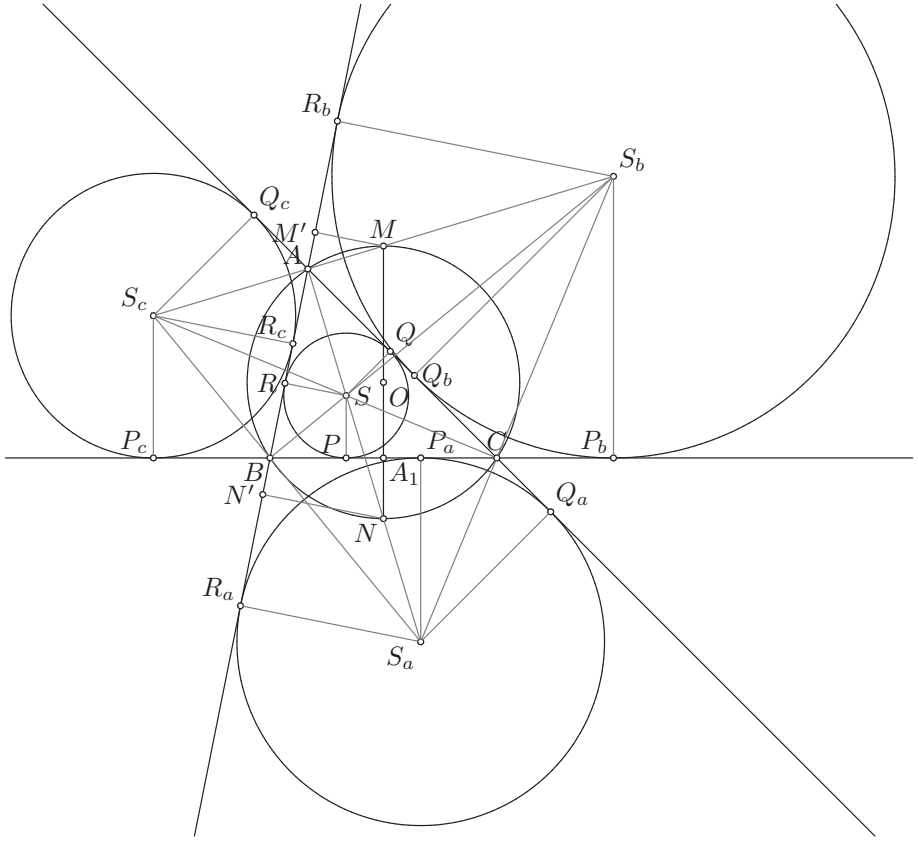
симетрала унутрашњег, а BS_a је симетрала спољашњег угла код темена B троугла $\triangle ABC$) и N је средиште хипотенузе SS_a, па је N центар описаног круга $\triangle SBS_a$. Следи да је $NS = NS_a = NB$, а како N припада симетрали дужи BC, следи да је $NB = NC$, па имамо да је $NS = NS_a = NB = NC$.



Докажимо да M припада бисекриси AS_b спољашњег угла $\measuredangle CAR_b$ троугла $\triangle ABC$. Како је AS бисектриса унутрашњег угла $\measuredangle BAC$ троугла $\triangle ABC$, следи да је $SA \perp AS_b$, тј. да је $\measuredangle SAS_b = \frac{\pi}{2}$. Тачка N припада бисектриси AS, па је $\measuredangle NAS_b = \frac{\pi}{2}$, а MN је пречник описаног круга l троугла $\triangle ABC$, па је $\measuredangle NAM = \frac{\pi}{2}$ (периферијски угао над пречником). Одавде закључујемо да тачка M припада полуправој AS_b, а самим тим и правој S_cS_b. С друге стране, како M припада Ојлеровом кругу l круга $\triangle S_aS_bS_c$ и како M није подножје висине, јер је то тачка A, следи да је M средиште странице S_bS_c. Троугао $\triangle S_bBS_c$ је правоугли с правим углом код темена B (S_bB је симетрала унутрашњег, а BS_c је симетрала спољa-

шњег угла код темена B троугла $\triangle ABC$) и M је средиште хипотенузе S_bS_c, па следи да је M центар описаног круга троугла $\triangle S_bBS_c$. Према томе, $MS_b = MS_c = MB$, а како је $MB = MC$ јер M припада симетрали дужи BC, па следи да је $MS_b = MS_c = MB = MC$.

7) Доказујемо $A_1M = \frac{1}{2}(\rho_b + \rho_c), \quad A_1N = \frac{1}{2}(\rho_a - \rho)$.



Четвороугао SPP_aS_a је трапез јер је $SP \perp BC$ и $S_aP_a \perp BC$, па је $SP \parallel S_aP_a$. Такође, $A_1N \perp BC$ јер је права A_1N симетрала дужи BC, па је $A_1N \parallel SP$ и $A_1N \parallel S_aP_a$. Како је A_1 средиште PP_a, следи да је A_1N средња линија неконвексног трапеза SPP_aS_a. Закључујемо да је $A_1N = \frac{1}{2}(S_aP_a - SP) = \frac{1}{2}(\rho_a - \rho)$.

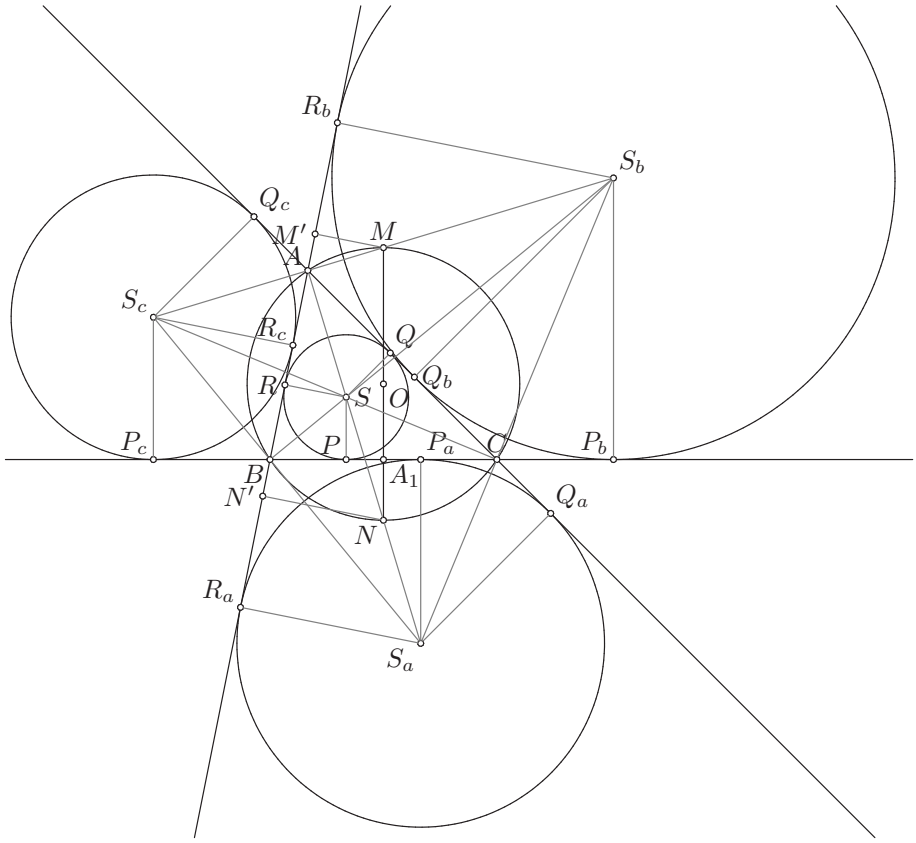
Приметимо да овде нисмо искористили чињеницу да је N средиште SS_a да бисмо добили да је A_1N средња линија трапеза. Да се нисмо сетили Ојлеровог круга, ово би био други начин да се докаже да је N средиште SS_a и реши део **6)** овог задатка.

Четвороугао $S_cP_cP_bS_b$ је трапез, јер је $S_cP_c \perp BC$ и $S_bP_b \perp BC$, па је $S_cP_c \parallel S_bP_b$. Такође, $A_1M \perp BC$ јер је права A_1M симетрала дужи BC, па је $A_1M \parallel S_cP_c$ и $A_1M \parallel S_bP_b$. Тачка A_1 је средиште P_cP_b, па следи да

је A_1M средња линија (конвексног) трапеза $S_cP_cP_bS_b$. Закључујемо да је $A_1M = \frac{1}{2}(S_bP_b + S_cP_c) = \frac{1}{2}(\rho_b + \rho_c)$.

Поново, приметимо да нисмо искористили чињеницу да је M средиште S_cS_b да бисмо добили да је A_1M средња линија трапеза и да смо могли на овај начин доказати да је M средиште S_cS_b да се нисмо сетили Ојлеровог круга. При томе, како год да доказујемо да је M средиште S_cS_b, морали бисмо прво да докажемо да M припада S_cS_b.

8) Доказујемо $MM' = \frac{1}{2}(\rho_b - \rho_c), \quad NN' = \frac{1}{2}(\rho + \rho_a)$.



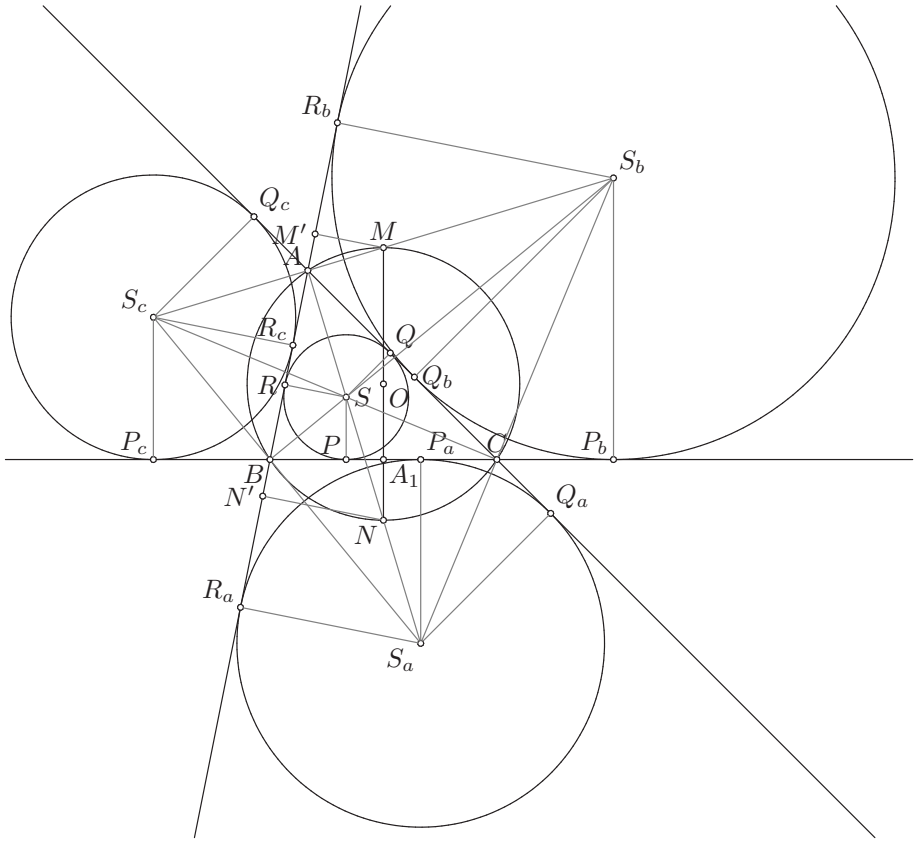
Четвороугао $S_cR_cR_bS_b$ је трапез јер је $S_cR_c \perp AB$ и $S_bR_b \perp AB$, па је $S_cR_c \parallel S_bR_b$. Такође, $MM' \perp AB$, па је $MM' \parallel S_cR_c$ и $MM' \parallel S_bR_b$, а M је средиште S_cS_b, па је MM' средња линија неконвексног трапеза $S_cR_cR_bS_b$. Следи да је $MM' = \frac{1}{2}(S_bR_b - S_cR_c) = \frac{1}{2}(\rho_b - \rho_c)$.

Четвороугао SRR_aS_a је трапез јер је $SR \perp AB$ и $S_aR_a \perp AB$, па је $SR \parallel S_aR_a$. Такође, $NN' \perp AB$, па је $NN' \parallel SR \parallel S_aR_a$ и N је средиште SS_a, па је NN' средња линија конвексног трапеза SRR_aS_a. Закључујемо да је $NN' = \frac{1}{2}(SR + S_aR_a) = \frac{1}{2}(\rho + \rho_a)$.

9) Доказујемо $\rho_a + \rho_b + \rho_c = 4r + \rho$.

За пречник MN описаног круга l троугла $\triangle ABC$ имамо с једне стране да је $MN = 2r$, а с друге стране из дела **7)** да је $MN = MA_1 + A_1N = \frac{1}{2}(\rho_b + \rho_c + \rho_a - \rho)$. Дакле, $2r = \frac{1}{2}(\rho_a + \rho_b + \rho_c - \rho)$, па је $4r = \rho_a + \rho_b + \rho_c - \rho$, односно $\rho_a + \rho_b + \rho_c = 4r + \rho$.

10) Доказујемо $AM' = \frac{1}{2}(b - c) = BN', \quad AN' = \frac{1}{2}(b + c) = BM'$.



У делу **8)** смо доказали да је MM' средња линија трапеза $S_cR_cR_bS_b$, па је M' средиште странице R_cR_b. Дакле, $R_cM' = \frac{1}{2}R_cR_b = \frac{a}{2}$. Даље имамо да је $BM' = BR_c + R_cM' = p - a + \frac{a}{2} = \frac{a+b+c-2a+a}{2} = \frac{1}{2}(b + c)$ и да је $AM' = BM' - BA = \frac{1}{2}(b + c) - c = \frac{1}{2}(b - c)$.

Такође, у делу **8)** доказали смо да је NN' средња линија трапеза SRR_aS_a, па је N' средиште RR_a. Следи да је $N'R_a = \frac{1}{2}RR_a = \frac{a}{2}$, па је $AN' = AR_a - N'R_a = p - \frac{a}{2} = \frac{a+b+c-a}{2} = \frac{1}{2}(b + c)$. Такође, следи да је $BN' = AN' - AB = \frac{1}{2}(b + c) - c = \frac{1}{2}(b - c)$.

Дакле, доказали смо да важи

$$AM' = BN' = \frac{1}{2}(b-c) \qquad \text{и} \qquad AN' = BM' = \frac{1}{2}(b+c).$$

11) Јасно је да је $M'N' = M'A + AN' = \frac{1}{2}(b-c+b+c) = b$ што је и требало доказати.

2 Сличност

Дефиниција 13. Нека је S произвољна тачка неке равни α и нека је $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ произвољан реалан број различит од нуле. Пресликавање $\mathcal{H}_{S,\lambda} : \alpha \longrightarrow \alpha$ такво да је $\mathcal{H}_{S,\lambda}(X) = X'$, где је $X' \in \alpha$ таква да је $\overrightarrow{SX'} = \lambda\overrightarrow{SX}$, зове се *хомотетија*. При томе је тачка S њен *центар*, а λ њен *коефицијент*.

Могуће је дефинисати хомотетију са коефицијентом 0, али такво пресликавање слика сваку тачку равни α у центар хомотетије, па нам оно није занимљиво.

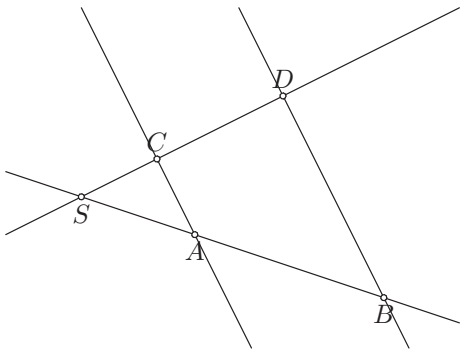
Испоставља се да је хомотетија управо пресликавање које нам треба, тј. то је пресликавање које „чува облик" фигура. Другим речима, када гледамо слику неке фигуре неком хомотетијом (скуп слика свих тачака те фигуре том хомотетијом), добијена фигура (скуп тачака) биће фигура истог облика као и полазна, а у зависности од тога да ли је $|\lambda| > 1$ или $|\lambda| < 1$, она ће бити већа, односно мања од полазне фигуре.

Напоменимо само да се све што овде причамо односи на *еуклидску* геометрију. У хиперболичкој геометрији се такође дефинише сличност, али ће ту бити знатних разлика у односу на сличност у еуклидској геометрији. Рећи ћемо само да ће испасти да је сличност исто што и подударност, иако је дефинисана на другачији начин.

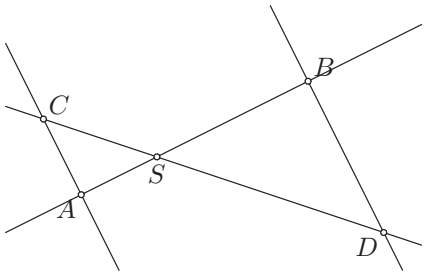
Формулишимо сада Талесову теорему, једну од најстаријих теорема у математици.

Теорема 9 (**Талес**). *Нека се праве p, q секу у тачки S. Нека су A, B две различите тачке праве p које су различите од S и нека су C, D две различите праве q које су различите од тачке S. Тада је*

$$\begin{aligned} AC \parallel BD &\iff \frac{SA}{SB} = \frac{SC}{SD} = \frac{AC}{BD} \\ &\iff \frac{SA}{SC} = \frac{SB}{SD} = \frac{AB}{CD}. \end{aligned}$$

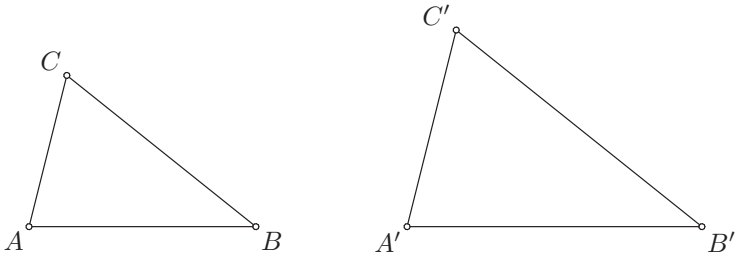


При томе, уопште не мора да важи распоред тачака као што је на овој слици. Теорема ће важити и ако имамо неки други распоред тачака.



Као што смо имали Ставове о подударности троуглова, постоје и Ставови о сличности троуглова. Што се тиче њихових формулација, имаћемо странице и углове, и то баш као код ставова о подударности (нпр. неке две и њима захваћен угао), с тим што имамо у виду да сличност чува *подударност углова* и *односе страница*.

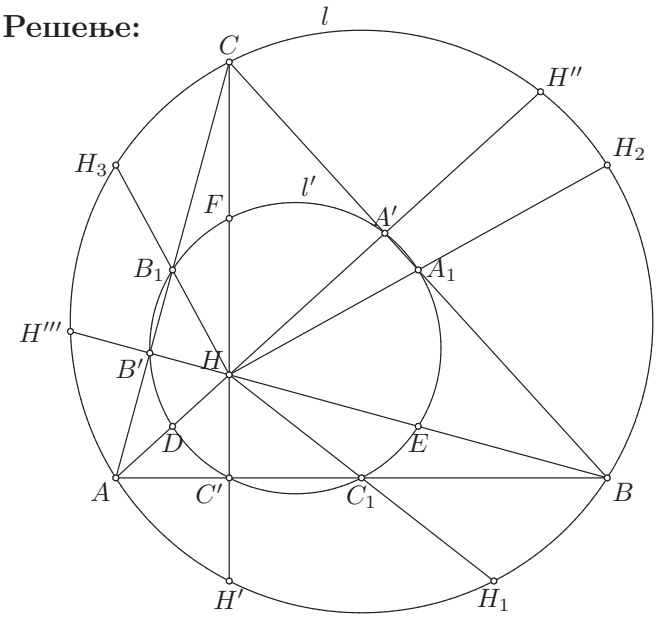
Став 2. *Нека су дати троуглови* $\triangle ABC$ *и* $\triangle A'B'C'$. *Ако важи нешто од следећег:*
1° $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$, $\measuredangle BAC = \measuredangle B'A'C'$;
2° $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$;
3° $\measuredangle BAC = \measuredangle B'A'C'$, $\measuredangle ABC = \measuredangle A'B'C'$;
4° $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$, $\measuredangle ACB = \measuredangle A'C'B'$, *а углови* $\measuredangle ABC$ *и* $\measuredangle A'B'C'$ *су оба оштра, оба права или оба тупа;*
онда је $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.



Сада када знамо шта је хомотетија и када смо се подсетили Ставова о сличности троуглова, можемо да их искористимо да докажемо постојање Ојлеровог круга на други начин (задатак 1.5), као и да решимо део **1)** Великог задатка (задатка 1.12).

1.5. (**Ојлеров круг**) Средишта страница, подножја висина и средишта дужи одређених теменима и ортоцентром троугла припадају једном кругу. Доказати.

Решење:



Нека су A', B', C' редом подножја висина из темена A, B, C на страницама BC, CA, AB троугла $\triangle ABC$ и нека су A_1, B_1, C_1 редом средишта страница BC, CA, AB. Дужи које спајају темена и ортоцентар H троугла $\triangle ABC$ су дужи AH, BH, CH, па означимо редом са D, E, F њихова средишта. Треба доказати да постоји круг који садржи ових девет тачака $(A', B', C', A_1, B_1, C_1, D, E, F)$.

Уочимо тачке H', H'', H''' које су симетричне тачки H редом у односу на странице AB, BC, CA и тачке H_1, H_2, H_3 које су симетричне тачки H редом у односу на средишта C_1, A_1, B_1 страница AB, BC, CA. На основу задатка 1.3 следи да тачке $H', H'', H''', H_1, H_2, H_3$ припадају описаном кругу l троугла $\triangle ABC$.

Нека је $l' = \mathcal{H}_{H,\frac{1}{2}}(l)$, тј. нека је l' слика круга l хомотетијом $\mathcal{H}_{H,\frac{1}{2}}$. Како хомотетија чува облик, следи да је l' круг. Шта ће бити слике тачака $A, B, C, H', H'', H''', H_1, H_2, H_3$ том хомотетијом? По дефиницији, за произвољну тачку X је $\mathcal{H}_{H,\frac{1}{2}}(X) = X'$, при чему је $\overrightarrow{HX'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HX}$, односно кад се ослободимо вектора, биће $\mathcal{B}(H, X', X)$ и $HX' = \frac{1}{2}HX$. Дакле, X' је средиште дужи HX, односно хомотетија $\mathcal{H}_{H,\frac{1}{2}}$ слика произвољну тачку у средиште дужи чији су крајеви та тачка и тачка H. Према томе, како су D, E, F средишта дужи AH, BH, CH, затим C', A', B' средишта дужи HH', HH'', HH''' и C_1, A_1, B_1 средишта дужи HH_1, HH_2, HH_3, сле-

ди да је

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{H,\frac{1}{2}}(A) &= D;\\
\mathcal{H}_{H,\frac{1}{2}}(B) &= E;\\
\mathcal{H}_{H,\frac{1}{2}}(C) &= F;\\
\mathcal{H}_{H,\frac{1}{2}}(H') &= C';\\
\mathcal{H}_{H,\frac{1}{2}}(H'') &= A';\\
\mathcal{H}_{H,\frac{1}{2}}(H''') &= B';\\
\mathcal{H}_{H,\frac{1}{2}}(H_1) &= C_1;\\
\mathcal{H}_{H,\frac{1}{2}}(H_2) &= A_1;\\
\mathcal{H}_{H,\frac{1}{2}}(H_3) &= B_1.
\end{aligned}$$

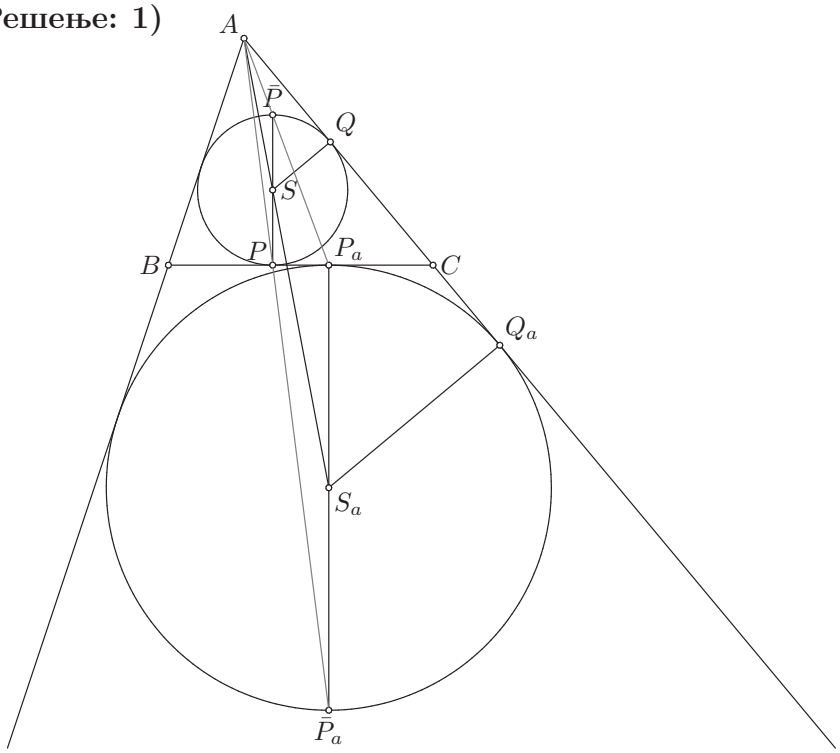
Како круг l садржи тачке $A, B, C, H', H'', H''', H_1, H_2, H_3$, следи да његова слика хомотетијом $\mathcal{H}_{H,\frac{1}{2}}$, дакле круг l', садржи слике тих тачака, дакле тачке $D, E, F, A', B', C', A_1, B_1, C_1$.

Видимо да је ово решење доста елегантније и краће од првобитног решења. Сада ћемо решити део **1)** Великог задатка користећи се Талесовом теоремом.

1.12. (**Велики задатак**) Ако са A_1, B_1 и C_1 обележимо средишта ивица $BC = a, CA = b, AB = c$ троугла ABC $(b > c)$, са p полуобим тог троугла, са $l(O, r)$ описани круг тог троугла, са P, Q, R тачке у којима уписани круг $k(S, \rho)$ додирује праве BC, CA, AB, са P_i, Q_i, R_i $(i = a, b, c)$ тачке у којима споља уписани круг $k_i(S_i, \rho_i)$ додирује редом праве BC, CA, AB, са M и N тачке у којима медијатриса ивице BC сече круг l, при чему је M на луку BAC, са M' и N' подножја управних из тачака M и N на правој AB, са P', P'_a, P'_b, P'_c дијаметрално супротне тачке тачкама P, P_a, P_b, P_c,доказати да је:

1) $\mathcal{B}(A, P', P_a)$, $\mathcal{B}(A, P, P'_a)$, $\mathcal{B}(P_c, A, P'_b)$, $\mathcal{B}(P_b, A, P'_c)$;

Решење: 1)



Нека је $\bar{P}$ пресечна тачка праве SP и праве AP_a. Како је $\mathcal{B}(A, S, S_a)$, следи да је $\mathcal{B}(A, \bar{P}, P_a)$, па је довољно доказати да је $P' = \bar{P}$. Како тачка P' припада уписаном кругу k троугла $\triangle ABC$ и правој SP, следи да је довољно доказати да је $S\bar{P} = \rho$.

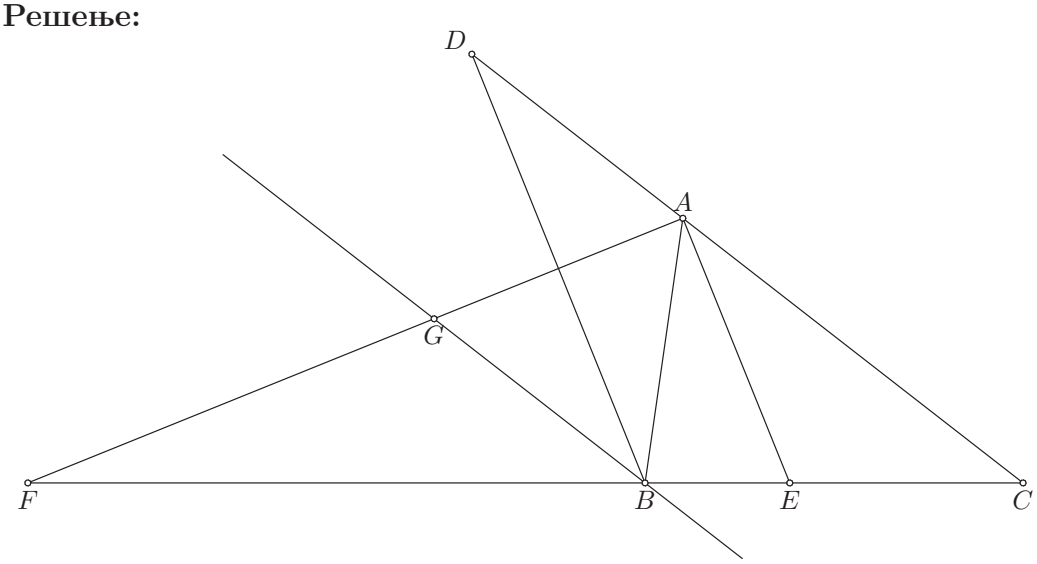
Праве SS_a и QQ_a се секу у тачки A и важи $SQ \perp AC$ и $S_aQ_a \perp AC$, па је $SQ \parallel S_aQ_a$. Према Талесовој теореми следи да је $\frac{AS}{AS_a} = \frac{SQ}{S_aQ_a} = \frac{\rho}{\rho_a}$. Такође, имамо и да се праве SS_a и $\bar{P}P_a$ секу у тачки A и да је $S\bar{P} \perp BC$ и $S_aP_a \perp BC$, па је $S\bar{P} \parallel S_aP_a$. Према Талесовој теореми следи да је $\frac{S\bar{P}}{S_aP_a} = \frac{AS}{AS_a} = \frac{\rho}{\rho_a}$. Међутим, $S_aP_a = \rho_a$, па је $\frac{S\bar{P}}{\rho_a} = \frac{\rho}{\rho_a}$, одакле закључујемо да је $S\bar{P} = \rho$, односно да је $P' = \bar{P}$. Дакле, важи $\mathcal{B}(A, P', P_a)$

Аналогно показујемо остале распореде тачака у великом задатку.

Сада прелазимо на задатке из сличности. Први задатак је Теорема о симетрали угла. Ова теорема је веома важна и треба је знати, јер ће се користити и у даљим задацима (нпр. као што се средња линија користи у многим другим задацима).

1. (**Теорема о симетрали угла**) Ако су E и F тачке у којима бисектрисе унутрашњег и спољашњег угла $\measuredangle BAC$ троугла $\triangle ABC$ (AB $<$ AC) секу праву BC доказати $BE : CE = BF : CF = AB : AC$.

Решење:



Идеја је да применимо Талесову теорему. Да бисмо пронашли колики је однос $BE : CE$, довољно је да нађемо колики је однос $CE : EB$, па потражимо на полуправој CA тачку D такву да је $AD = AB$. Уколико докажемо да је $DB \parallel AE$, према Талесовој теореми ће бити $CE : EB = CA : AD$, па ће одатле следити $BE : CE = AD : AC$. Како је $AD = AB$, добићемо да је $BE : CE = AB : AC$, а то и треба доказати.

Уколико докажемо да је $\measuredangle BDA = \measuredangle EAC = \frac{\alpha}{2}$, следиће да је су то углови с паралелним крацима, па ће бити $DB \parallel AE$. Како је $AD = AB$, следи да је троугао $\triangle ADB$ једнакокрак, па је $\measuredangle BDA = \measuredangle DBA$. Означимо те углове са φ. Угао $\measuredangle BAC = \alpha$ је спољашњи угао троугла $\triangle ADB$, па је једнак збиру унутрашњих несуседних углова $\measuredangle BDA = \varphi$ и $\measuredangle DBA = \varphi$. Дакле, $\alpha = \varphi + \varphi = 2\varphi$, па је $\varphi = \frac{\alpha}{2}$. Дакле, доказали смо да је $\measuredangle BDA = \frac{\alpha}{2}$, па је $DB \parallel AE$, а одатле следи да је $BE : CE = AB : AC$.

Сада желимо да нађемо однос $BF : CF = FB : FC$, па уочимо праву која садржи B и паралелна је са правом AC. Означимо са G њен пресек са правом FA. Талесова теорема нам тада даје да је $FB : FC = BG : CA$, па је довољно доказати да је $BG = AB$. Права AG је симетрала угла $\measuredangle BAD = \pi - \alpha$ (то је спољашњи угао код темена A троугла $\triangle ABC$), па је $\measuredangle GAB = \frac{\pi-\alpha}{2}$. Из $BG \parallel AC$ закључујемо да су углови $\measuredangle GBA$ и $\measuredangle BAC = \alpha$ углови с паралелним крацима, па су они подударни. Дакле, $\measuredangle GBA = \alpha$. Одавде је $\measuredangle BGA = \pi - \measuredangle GBA - \measuredangle GAB = \pi - \alpha - \frac{\pi-\alpha}{2} = \frac{\pi-\alpha}{2}$,

па је $\measuredangle BGA = \measuredangle GAB$. Дакле, троугао $\triangle BAG$ је једнакокраки, па је $BG = BA$. Овим је доказ завршен, јер је сада $BF : CF = BG : AC = AB : AC$, што је и требало доказати.

Видимо да је понекад потребно „доцртати" неке тачке и праве да би се лакше дошло до решења задатка. Овде су тачка D и права BG добијене у жељи да се искористи Талесова теорема.

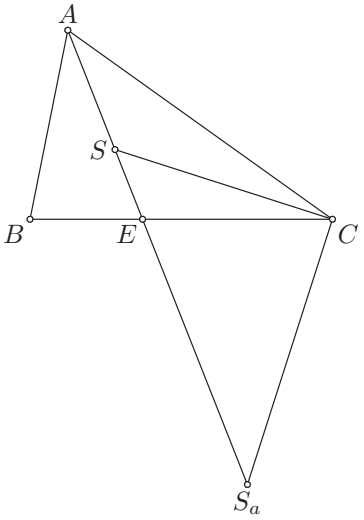
2. Нека су E и F тачке из претходног задатка. Доказати:

а) $AS : SE = AS_a : S_aE = (AB + AC) : BC$;

б) $AE : SE = (AB+AC+BC) : BC$, $AE : S_aE = (AB+AC-BC) : BC$;

в) $AS_b : S_bF = AS_c : S_cF = (AC - AB) : BC$.

Решење:
Овде су тачке E, F из 1. задатка, а тачке S, S_a, S_b, S_c су тачке из Великог задатка, дакле центри редом уписаног круга k и споља уписаних кругова k_a, k_b, k_c.
а) $AS : SE = AS_a : S_aE = (AB + AC) : BC$;



Применом Теореме о симетрали угла (1. задатка) на троугао $\triangle CAE$ закључујемо да је $AS : SE = AS_a : S_aE = AC : CE$. Такође, знамо да је $BE : CE = AB : AC$ (1. задатак), па је $AC : CE = AB : BE$. Означимо тај однос са λ, дакле нека је $\frac{AC}{CE} = \frac{AB}{BE} = \lambda$. Одавде је $AC = \lambda CE$ и $AB = \lambda BE$, па је $AB + AC = \lambda(BE + CE) = \lambda BC$. Следи да је $\lambda = (AB + AC) : BC$, а како је $AS : SE = AS_a : S_aE = AC : CE = \lambda$, следи да је $AS : SE = AS_a : S_aE = (AB + AC) : BC$.

б) $AE : SE = (AB+AC+BC) : BC$,$AE : S_aE = (AB+AC-BC) : BC$;

Како је $AE = AS + SE$, дељењем са SE добијамо да је

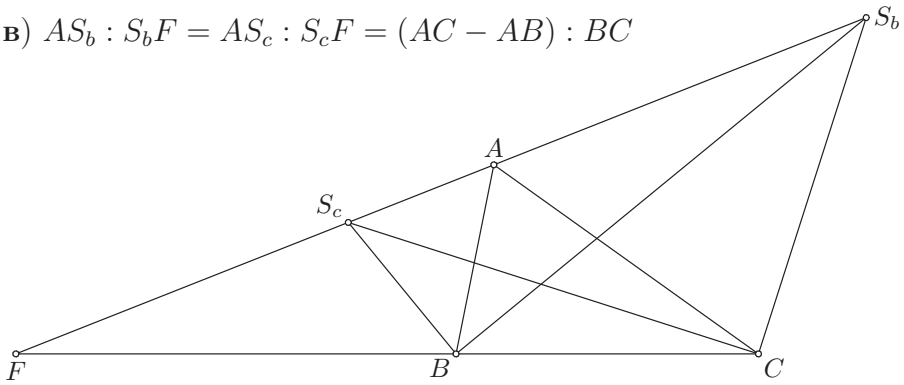
$$\begin{aligned}\frac{AE}{SE} &= \frac{AS+SE}{SE} = \frac{AS}{SE} + \frac{SE}{SE} \\ &= \frac{AS}{SE} + 1 = \frac{AB+AC}{BC} + 1 \\ &= \frac{AB+AC}{BC} + \frac{BC}{BC} = \frac{AB+AC+BC}{BC}.\end{aligned}$$

Слично, како је $AE = AS_a - S_aE$, дељењем са S_aE добијамо да је

$$\begin{aligned}\frac{AE}{S_aE} &= \frac{AS_a - S_aE}{S_aE} = \frac{AS_a}{S_aE} - \frac{S_aE}{S_aE} \\ &= \frac{AS_a}{S_aE} - 1 = \frac{AB+AC}{BC} - 1 \\ &= \frac{AB+AC}{BC} - \frac{BC}{BC} = \frac{AB+AC-BC}{BC}.\end{aligned}$$

Овде смо само користили претходне резултате и уз мало рачунања дошли до траженог новог резултата.

в) $AS_b : S_bF = AS_c : S_cF = (AC - AB) : BC$



Применом Теореме о симетрали угла на троугао $\triangle BAF$ добијамо да је $AS_b : S_bF = AS_c : S_cF = AB : BF$. Такође, применом те теореме на троугао $\triangle CAF$ добијамо да је $AS_b : S_bF = AS_c : S_cF = AC : CF$. Означимо тражени непознати однос са λ, дакле $AS_b : S_bF = AS_c : S_cF = \lambda$. На основу добијених резултата имамо да је $AB : BF = AC : CF = \lambda$. Иначе, овај резултат смо могли директно да добијемо из 1. задатка, јер из $BF : CF = AB : AC$ следи да је $AB : BF = AC : CF$. Одавде следи да је $AB = \lambda BF$ и $AC = \lambda CF$, па одузимањем добијамо да је $AC - AB = \lambda(CF - BF) = \lambda BC$. Дакле, $\lambda = (AC - AB) : BC$, па следи тражени резултат $AS_b : S_bF = AS_c : S_cF = (AC - AB) : BC$.

3. Доказати (важе ознаке из великог задатка):

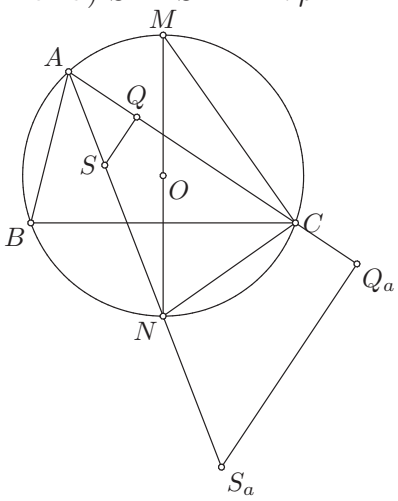
а) $SA \cdot SN = 2r\rho$;

б) $S_aA \cdot S_aN = 2r\rho_a$;

в) $S_bA \cdot S_bM = 2r\rho_b$;

г) $S_cA \cdot S_cM = 2r\rho_c$.

Решење: а) $SA \cdot SN = 2r\rho$



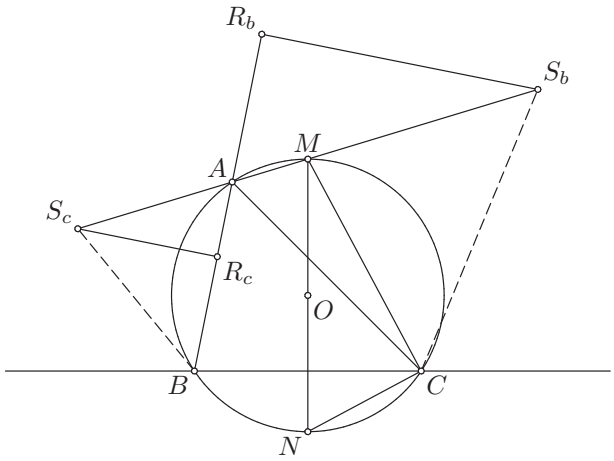
Сличност даје односе, а не производе дужи, али можемо те односе помножити дужима које су у имениоцима и доћи до производа. Како нам се јавља полупречник уписаног круга, морамо уочити подножје нормале из центра S уписаног круга на некој од страница троугла $\triangle ABC$, нпр. подножје Q на страници AC. Пошто нам се јавља $2r$, тј. пречник описаног круга, и пошто већ имамо тачку N, уочимо тачку M из Великог задатка, јер тада имамо пречник $MN = 2r$.

Сада имамо да је $\measuredangle SAQ = \measuredangle NAC = \measuredangle NMC$ (периферијски над луком $\widehat{NC}$) и да су углови $\measuredangle SQA$ и $\measuredangle NCM$ прави ($\measuredangle NMC$ је периферијски над пречником NM), па је $\measuredangle SQA = \measuredangle NCM$. Следи да је $\triangle ASQ \sim \triangle MNC$, па је $SA : NM = SQ : NC$. Множењем са NM и NC добијамо да је $SA \cdot NC = NM \cdot SQ$. Како је $NM = 2r$, $SQ = \rho$ и $NC = SN$ (Велики задатак, став **6)**), следи да је $SA \cdot SN = 2r\rho$, што је и требало доказати.

б) $S_aA \cdot S_aN = 2r\rho_a$

Слично као у делу **а)**, уочимо тачке M, Q_a из Великог задатка. Имамо да је $\measuredangle S_aAQ_a = \measuredangle NAC = \measuredangle NMC$ (периферијски над луком $\widehat{NC}$) и да су углови $\measuredangle S_aQ_aA$ и $\measuredangle NCM$ прави, па је $\measuredangle S_aQ_aA = \measuredangle NCM$. Следи да је $\triangle AS_aQ_a \sim \triangle MNC$, па је $S_aA : NM = S_aQ_a : NC$, односно, после множења, $S_aA \cdot NC = NM \cdot S_aQ_a$. Заменом $NM = 2r$, $S_aQ_a = \rho_a$ и $NC = S_aN$ (Велики задатак, став **6)**) добијамо $S_aA \cdot S_aN = 2r\rho_a$.

в) $S_bA \cdot S_bM = 2r\rho_b$



Како нам се овде јавља ρ_b, уочимо подножје нормале из S_b на некој од страница троугла $\triangle ABC$, нпр. на страници AB (дакле, тачку R_b) и како се поново јавља пречник описаног круга $2r$, уочимо пречник MN. Углови $\measuredangle MNC$ и $\measuredangle MAC$ су периферијски над луком $\widehat{MC}$, па су подударни, дакле $\measuredangle MNC = \measuredangle MAC = \frac{\pi-\alpha}{2}$ (права AM је симетрала спољашњег угла код темена A троугла $\triangle ABC$). Такође, $\measuredangle S_bAR_b = \frac{\pi-\alpha}{2}$, па је $\measuredangle MNC = \measuredangle S_bAR_b$. Важи и $\measuredangle MCN = \frac{\pi}{2} = \measuredangle S_bR_bA$, па следи да је $\triangle MNC \sim \triangle S_bAR_b$. Дакле, $S_bA : MN = S_bR_b : MC$, односно $S_bA \cdot MC = MN \cdot S_bR_b$. Заменом $MN = 2r$, $S_bR_b = \rho_b$ и $MC = S_bM$ (Велики задатак, став **6)**) добијамо $S_bA \cdot S_bM = 2r\rho_b$.

г) $S_cA \cdot S_cM = 2r\rho_c$

Слично као у делу **в)**, уочимо тачке M, R_c из Великог задатка. Имамо да је $\measuredangle S_cAR_c = \frac{\pi-\alpha}{2} = \measuredangle MAC = \measuredangle MNC$ (прве две једнакости важе јер је S_cM симетрала спољашњег угла код темена A, а последња јер су то периферијски углови над луком $\overset{\frown}{MC}$), као и $\measuredangle S_cR_cA = \frac{\pi}{2} = \measuredangle MCN$, па је $\triangle S_cAR_c \sim \triangle MNC$. Следи $S_cA : MN = S_cR_c : MC$, односно $S_cA \cdot MC = MN \cdot S_cR_c$. Заменом $MN = 2r$, $S_cR_c = \rho_c$ и $MC = S_cM$ (Велики задатак, став **6)**) добијамо $S_cA \cdot S_cM = 2r\rho_c$.