

II двочас вежби

2. Низови

2. Низови

Теоријски увод

Дефиниција 1. *Низ* (a_n) је функција дефинисана на скупу природних бројева $(\mathbb{N})$.

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots \end{pmatrix}.$$

Дефиниција 1. *Низ* (a_n) је функција дефинисана на скупу природних бројева $(\mathbb{N})$.

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots \end{pmatrix}.$$

Надаље бројне низове, тј. $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.

Користи се и ознака $\{a_n\}$.

Дефиниција 2. Низ (a_n) је:

1° *растући* $\nearrow$ ако важи $a_1 < a_2 < a_3 < \dots$, тј.
 $(\forall n \in \mathbb{N}) \ a_n < a_{n+1}$.

За низ са позитивним члановима $\frac{a_n}{a_{n+1}} < 1$.

Дефиниција 2. Низ (a_n) је:

1° *растући* $\nearrow$ ако важи $a_1 < a_2 < a_3 < \dots$, тј.
 $(\forall n \in \mathbb{N}) \ a_n < a_{n+1}$.

За низ са позитивним члановима $\frac{a_n}{a_{n+1}} < 1$.

2° *опадајући* $\searrow$ ако важи $a_1 > a_2 > a_3 > \dots$,
тј. $(\forall n \in \mathbb{N}) \ a_n > a_{n+1}$ (исл. $\frac{a_n}{a_{n+1}} > 1$).

Дефиниција 2. Низ (a_n) је:

1° *растући* $\nearrow$ ако важи $a_1 < a_2 < a_3 < \dots$, тј.
 $(\forall n \in \mathbb{N}) \ a_n < a_{n+1}$.

За низ са позитивним члановима $\frac{a_n}{a_{n+1}} < 1$.

2° *опадајући* $\searrow$ ако важи $a_1 > a_2 > a_3 > \dots$,
тј. $(\forall n \in \mathbb{N}) \ a_n > a_{n+1}$ (исл. $\frac{a_n}{a_{n+1}} > 1$).

3° *неопадајући* $\underline{\nearrow}$ ако важи $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots$,
тј. $(\forall n \in \mathbb{N}) \ a_n \leq a_{n+1}$ (исл. $\frac{a_n}{a_{n+1}} \leq 1$).

Дефиниција 2. Низ (a_n) је:

1° растући $\nearrow$ ако важи $a_1 < a_2 < a_3 < \dots$, тј.
 $(\forall n \in \mathbb{N}) \ a_n < a_{n+1}$.

За низ са позитивним члановима $\frac{a_n}{a_{n+1}} < 1$.

2° опадајући $\searrow$ ако важи $a_1 > a_2 > a_3 > \dots$,
тј. $(\forall n \in \mathbb{N}) \ a_n > a_{n+1}$ (исл. $\frac{a_n}{a_{n+1}} > 1$).

3° неопадајући $\underline{\nearrow}$ ако важи $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots$,
тј. $(\forall n \in \mathbb{N}) \ a_n \leq a_{n+1}$ (исл. $\frac{a_n}{a_{n+1}} \leq 1$).

4° нерастући $\overline{\searrow}$ ако важи $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots$, тј.
 $(\forall n \in \mathbb{N}) \ a_n \geq a_{n+1}$ (исл. $\frac{a_n}{a_{n+1}} \geq 1$).

Дефиниција 2. Низ (a_n) је:

1° растући $\nearrow$ ако важи $a_1 < a_2 < a_3 < \dots$, тј.
 $(\forall n \in \mathbb{N}) \ a_n < a_{n+1}$.

За низ са позитивним члановима $\frac{a_n}{a_{n+1}} < 1$.

2° опадајући $\searrow$ ако важи $a_1 > a_2 > a_3 > \dots$,
тј. $(\forall n \in \mathbb{N}) \ a_n > a_{n+1}$ (исл. $\frac{a_n}{a_{n+1}} > 1$).

3° неопадајући $\underline{\nearrow}$ ако важи $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots$,
тј. $(\forall n \in \mathbb{N}) \ a_n \leq a_{n+1}$ (исл. $\frac{a_n}{a_{n+1}} \leq 1$).

4° нерастући $\overline{\searrow}$ ако важи $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots$, тј.
 $(\forall n \in \mathbb{N}) \ a_n \geq a_{n+1}$ (исл. $\frac{a_n}{a_{n+1}} \geq 1$).

Низ је **монотон** ако је 1°, 2°, 3° или 4°.

Дефиниција 3. Низ је *ограничен* акко постоје бројеви m и M тако да је

$$m \leq a_n \leq M$$

за све $n \in \mathbb{N}$.

Дефиниција 4. Коначан број a је *гранична вредност низа* (a_n) уколико важи

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

Дефиниција 4. Коначан број a је *гранична вредност низа* (a_n) уколико важи

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

Тада кажемо да ”низ (a_n) тежи ка броју a ” и ”низ (a_n) *конвергуира*”.

Дефиниција 4. Коначан број a је *гранична вредност низа* (a_n) уколико важи

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

Тада кажемо да ”низ (a_n) тежи ка броју a ” и ”низ (a_n) *конвергуира*”.

То записујемо са $a_n \rightarrow a \ (n \rightarrow \infty)$ или чешће са $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

Дефиниција 4. Коначан број a је *гранична вредност низа* (a_n) уколико важи

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

Тада кажемо да ”низ (a_n) тежи ка броју a ” и ”низ (a_n) *конвергира*”.

То записујемо са $a_n \rightarrow a \ (n \rightarrow \infty)$ или чешће са $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

За низ који не конвергира кажемо да *дивергира*.

Дефиниција 5. За низ (a_n) кажемо да тежи ка бесконачности ако је:

Дефиниција 5. За низ (a_n) кажемо да тежи ка бесконачности ако је:

- $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) \quad a_n > \varepsilon$ и то записујемо са $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$;

Дефиниција 5. За низ (a_n) кажемо да тежи ка бесконачности ако је:

- $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) \quad a_n > \varepsilon$ и то записујемо са $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$;
- $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) \quad a_n < -\varepsilon$ и то записујемо са $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$.

Теорема 1. Монотон и ограничен низ је
конвергентан.

Теорема 1. Монотон и ограничен низ је конвергентан.

Обрнуто не мора да важи.

Сваки конвергентан низ јесте ограничен, али не мора бити монотон.

Теорема 1. Монотон и ограничен низ је конвергентан.

Обрнуто не мора да важи.

Сваки конвергентан низ јесте ограничен, али не мора бити монотон.

Нпр. низ $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ није монотон, али је конвергентан.

Пример1. Низ парних природних бројева
је дат са: $2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, \dots$

Испитати конвергенцију овог низа.

Пример1. Низ парних природних бројева је дат са: 2,4,6,8,10,12,14...

Испитати конвергенцију овог низа.

Решење. $a_n = 2n$.

Пример1. Низ парних природних бројева је дат са: 2,4,6,8,10,12,14...

Испитати конвергенцију овог низа.

Решење. $a_n = 2n$.

Овај низ је растући: $a_n = 2n < 2n + 2 = a_{n+1}$ и није ограничен.

Пример1. Низ парних природних бројева је дат са: 2,4,6,8,10,12,14...

Испитати конвергенцију овог низа.

Решење. $a_n = 2n$.

Овај низ је растући: $a_n = 2n < 2n + 2 = a_{n+1}$ и није ограничен.

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, па овај низ дивергира. 

Пример2. Низ задат са $a_n = (-1)^n$ је:
 $-1, 1, -1, 1, -1 \dots$

Испитати конвергенцију овог низа.

Пример2. Низ задат са $a_n = (-1)^n$ је:
 $-1, 1, -1, 1, -1, \dots$

Испитати конвергенцију овог низа.

Решење. Овај низ није монотон
(није ни растући, ни опадајући, ни нерас-
тући, ни неопадајући), али је ограничен:
 $-1 \leq a_n \leq 1$.

Пример2. Низ задат са $a_n = (-1)^n$ је:
 $-1, 1, -1, 1, -1, \dots$

Испитати конвергенцију овог низа.

Решење. Овај низ није монотон
(није ни растући, ни опадајући, ни нерас-
тући, ни неопадајући), али је ограничен:
 $-1 \leq a_n \leq 1$.

Овај низ не тежи неком броју
(него је наизменично -1 и 1), тј. он нема
граничну вредност: овај низ дивергира. 

Пример3. Низ реципрочних вредности је
дат са $a_n = \frac{1}{n}$: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \dots$

Испитати конвергенцију овог низа.

Пример3. Низ реципрочних вредности је дат са $a_n = \frac{1}{n}$: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \dots$

Испитати конвергенцију овог низа.

Решење. Овај низ је опадајући:

$$n < n + 1 \Rightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{n + 1}, \text{ тј. } a_n > a_{n+1}.$$

Пример3. Низ реципрочних вредности је дат са $a_n = \frac{1}{n}$: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \dots$

Испитати конвергенцију овог низа.

Решење. Овај низ је опадајући:

$$n < n + 1 \Rightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{n + 1}, \text{ тј. } a_n > a_{n+1}.$$

Овај низ је и ограничен, $0 \leq a_n \leq 1$

$$(n > 0 \Rightarrow \frac{1}{n} > 0, \text{ а } n \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{1} = 1).$$

Пример3. Низ реципрочних вредности је дат са $a_n = \frac{1}{n}$: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \dots$

Испитати конвергенцију овог низа.

Решење. Овај низ је опадајући:

$$n < n + 1 \Rightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{n + 1}, \text{ тј. } a_n > a_{n+1}.$$

Овај низ је и ограничен, $0 \leq a_n \leq 1$

$$(n > 0 \Rightarrow \frac{1}{n} > 0, \text{ а } n \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{1} = 1).$$

Стога овај низ конвергира.

Пример3. Низ реципрочних вредности је дат са $a_n = \frac{1}{n}$: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \dots$

Испитати конвергенцију овог низа.

Решење. Овај низ је опадајући:

$$n < n + 1 \Rightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{n + 1}, \text{ тј. } a_n > a_{n+1}.$$

Овај низ је и ограничен, $0 \leq a_n \leq 1$

$$(n > 0 \Rightarrow \frac{1}{n} > 0, \text{ а } n \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{1} = 1).$$

Стога овај низ конвергира.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$



Теорема 2.

(Лема о 2 полицајца или Теорема о 3 низа).

Нека су дата 3 низа (x_n) , (y_n) и (z_n) и нека за њих важи $x_n \leq y_n \leq z_n$.

Ако важи $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = A$ онда је и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = A.$$

Теорема 3. (Општи Кошијев (Cauchy) критеријум конвергенције низа).

Низ (a_n) конвергира ако и само ако

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0)(\forall k \in \mathbb{N})$$

$$|a_{n+k} - a_n| < \varepsilon.$$

Задаци

1.

Користећи дефиницију граничне вредност низа, доказати да је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{2n+1} = \frac{1}{2}.$$

Решење 1. Означимо са $a_n = \frac{n+2}{2n+1}$.

Треба наћи $n_0(\varepsilon)$ у дефиницији:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

$$a_n - a = \frac{n+2}{2n+1} - \frac{1}{2} = \frac{(2n+4)-(2n+1)}{4n+2} = \frac{3}{4n+2}.$$

$$|a_n - a| < \varepsilon \Rightarrow \frac{3}{4n+2} < \varepsilon \Rightarrow \frac{3}{\varepsilon} < 4n + 2 \Rightarrow$$

$$\frac{3}{\varepsilon} - 2 < 4n \Rightarrow \frac{3}{4\varepsilon} - \frac{1}{2} < n.$$

$$\text{Како је } n \geq n_0 \Rightarrow n_0 = \left\lceil \frac{3}{4\varepsilon} - \frac{1}{2} \right\rceil.$$

$\lceil x \rceil$ означава најмањи цео број који је $\geq x$.

Тиме смо показали да за сваки позитиван број ε постоји природан број $n_0 = \left\lceil \frac{3}{4\varepsilon} - \frac{1}{2} \right\rceil$ (који зависи од ε) такав да за свако $n \geq n_0$ важи $|a_n - \frac{1}{2}| < \varepsilon$, па смо по дефиницији показали да је $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}$. 

Решение 2.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{2n+1}$$

Решение 2.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot (1 + \frac{2}{n})}{n \cdot (2 + \frac{1}{n})}$$

Решение 2.

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{2n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{n} \cdot (1 + \frac{2}{n})}{\cancel{n} \cdot (2 + \frac{1}{n})} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{n}}{2 + \frac{1}{n}}\end{aligned}$$

Решение 2.

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{2n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{n} \cdot (1 + \frac{2}{n})}{\cancel{n} \cdot (2 + \frac{1}{n})} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{n}}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{1 + 0}{2 + 0} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$



$$\frac{C}{\infty} \rightarrow 0$$

Решение 3.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{2n+1} \cdot \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$$

Решение 3.

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{2n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{2n+1} \cdot \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{n} + \frac{2}{n}}{\frac{2n}{n} + \frac{1}{n}} = \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{n}}{2 + \frac{1}{n}} &= \frac{1}{2} .\end{aligned}$$


2.

Израчунати граничну вредност низа (a_n) датог

$$\text{са } a_n = \left(\frac{2n+1}{3n-5} \right)^3 .$$

2.

Израчунати граничну вредност низа (a_n) датог

са $a_n = \left(\frac{2n+1}{3n-5} \right)^3$.

Решење.
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{3n-5} \right)^3 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n(2 + \frac{1}{n})}{n(3 - \frac{5}{n})} \right)^3$$

2.

Израчунати граничну вредност низа (a_n) датог

са $a_n = \left(\frac{2n+1}{3n-5} \right)^3$.

Решење.
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{3n-5} \right)^3 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\cancel{n} \left(2 + \frac{1}{n} \right)}{\cancel{n} \left(3 - \frac{5}{n} \right)} \right)^3$$
$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2 + \frac{1}{n}}{3 - \frac{5}{n}} \right)^3$$

2.

Израчунати граничну вредност низа (a_n) датог

са $a_n = \left(\frac{2n+1}{3n-5} \right)^3$.

Решење.
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{3n-5} \right)^3 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\cancel{n} \left(2 + \frac{1}{n} \right)}{\cancel{n} \left(3 - \frac{5}{n} \right)} \right)^3$$
$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2 + \frac{1}{n}}{3 - \frac{5}{n}} \right)^3 = \left(\frac{2}{3} \right)^3 = \frac{8}{27}.$$



3.

Израчунати граничну вредност низа (a_n) датог

$$\text{са } a_n = \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}} .$$

Решење. У овом задатку ћемо користити следећи лимес:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} 0 & -1 < q < 1 \\ 1 & q = 1 \\ +\infty & q > 1 \\ \text{не постоји} & q \leq -1 \end{cases}$$

Решење. У овом задатку ћемо користити следећи лимес:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} 0 & -1 < q < 1 \\ 1 & q = 1 \\ +\infty & q > 1 \\ \text{не постоји} & q \leq -1 \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}} \cdot \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^n}}{\frac{1}{3^{n+1}}} =$$

Решење. У овом задатку ћемо користити следећи лимес:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} 0 & -1 < q < 1 \\ 1 & q = 1 \\ +\infty & q > 1 \\ \text{не постоји} & q \leq -1 \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}} \cdot \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^n}}{\frac{1}{3^{n+1}}} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{3} \left(\frac{-2}{3}\right)^n + \frac{1}{3} \cdot 1^n}{\left(\frac{-2}{3}\right)^{n+1} + 1^{n+1}}$$

Решење. У овом задатку ћемо користити следећи лимес:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} 0 & -1 < q < 1 \\ 1 & q = 1 \\ +\infty & q > 1 \\ \text{не постоји} & q \leq -1 \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}} \cdot \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^n}}{\frac{1}{3^{n+1}}} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{3} \left(\frac{-2}{3}\right)^n + \frac{1}{3} \cdot 1^n}{\left(\frac{-2}{3}\right)^{n+1} + 1^{n+1}} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 1}{0 + 1} = \frac{1}{3}.$$



4.

Израчунати граничну вредност низа (a_n) датог
са $a_n = \sqrt{n^2 + n} - n$.

4.

Израчунати граничну вредност низа (a_n) датог са $a_n = \sqrt{n^2 + n} - n$.

Решење. $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + n} - n =$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - n) \cdot \frac{\sqrt{n^2 + n} + n}{\sqrt{n^2 + n} + n} =$$

4.

Израчунати граничну вредност низа (a_n) датог са $a_n = \sqrt{n^2 + n} - n$.

Решење. $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + n} - n =$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - n) \cdot \frac{\sqrt{n^2 + n} + n}{\sqrt{n^2 + n} + n} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n - n^2}{\sqrt{n^2 + n} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2(1 + \frac{1}{n})} + n}.$$

4.

Изрaчунaти гpaничну вpeднocт низa (a_n) дaтoг
ca $a_n = \sqrt{n^2 + n} - n$.

Решeњe. $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + n} - n =$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - n) \cdot \frac{\sqrt{n^2 + n} + n}{\sqrt{n^2 + n} + n} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n - n^2}{\sqrt{n^2 + n} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2(1 + \frac{1}{n})} + n}.$$

$$(n \rightarrow \infty \Rightarrow n > 0 \Rightarrow \sqrt{n^2} = |n| = n)$$

Решение. $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + n} - n =$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - n) \cdot \frac{\sqrt{n^2 + n} + n}{\sqrt{n^2 + n} + n} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n - n^2}{\sqrt{n^2 + n} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2(1 + \frac{1}{n})} + n}.$$

$$(n \rightarrow \infty \Rightarrow n > 0 \Rightarrow \sqrt{n^2} = |n| = n):$$

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + n}$$

Решение. $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + n} - n =$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - n) \cdot \frac{\sqrt{n^2 + n} + n}{\sqrt{n^2 + n} + n} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n - n^2}{\sqrt{n^2 + n} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2(1 + \frac{1}{n})} + n}.$$

$$(n \rightarrow \infty \Rightarrow n > 0 \Rightarrow \sqrt{n^2} = |n| = n):$$

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \cancel{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{1} + 1} = \frac{1}{2}.$$



5.

Израчунати граничну вредност

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n + 1)} .$$

5.

Израчунати граничну вредност

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}.$$

Решење.

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2-1}{1 \cdot 2} + \frac{3-2}{2 \cdot 3} + \frac{4-3}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{(n+1)-n}{n \cdot (n+1)} =$$

5.

Израчунати граничну вредност

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}.$$

Решење.

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2-1}{1 \cdot 2} + \frac{3-2}{2 \cdot 3} + \frac{4-3}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{(n+1)-n}{n \cdot (n+1)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \end{aligned}$$

5.

Израчунати граничну вредност

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}.$$

Решење.

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2-1}{1 \cdot 2} + \frac{3-2}{2 \cdot 3} + \frac{4-3}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{(n+1)-n}{n \cdot (n+1)} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1.$$



6.

Израчунати граничну вредност низа (a_n) датог
са $a_n = \frac{1 + 2 + \dots + n}{n^2}$.

6.

Израчунати граничну вредност низа (a_n) датог
са $a_n = \frac{1 + 2 + \dots + n}{n^2}$.

Решење. Сума аритметичке прогресије

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}.$$

6.

Израчунати граничну вредност низа (a_n) датог
са $a_n = \frac{1 + 2 + \dots + n}{n^2}$.

Решење. Сума аритметичке прогресије

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}.$$

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n \cdot (n + 1)}{2}}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 1}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{2n} =$$

6.

Израчунати граничну вредност низа (a_n) датог
са $a_n = \frac{1 + 2 + \dots + n}{n^2}$.

Решење. Сума аритметичке прогресије

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}.$$

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n \cdot (n+1)}{2}}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 1}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{n} (1 + \frac{1}{n})}{2\cancel{n}} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2}.$$



7.

Користећи теорему о конвергенцији
монотоног и ограниченог низа доказати
конвергенцију низа (a_n) ако је $a_n = \frac{n^2 + 1}{3^n}$.

7.

Користећи теорему о конвергенцији монотоног и ограниченог низа доказати конвергенцију низа (a_n) ако је $a_n = \frac{n^2 + 1}{3^n}$.

Решење. $a_1 = \frac{2}{3}, a_2 = \frac{5}{9}, a_3 = \frac{10}{27}, a_4 = \frac{17}{81}, \dots$

7.

Користећи теорему о конвергенцији монотоног и ограниченог низа доказати конвергенцију низа (a_n) ако је $a_n = \frac{n^2 + 1}{3^n}$.

Решење. $a_1 = \frac{2}{3}, a_2 = \frac{5}{9}, a_3 = \frac{10}{27}, a_4 = \frac{17}{81}, \dots$

На основу претходног „видимо“ да је низ опадајући, али то није математички доказ!!!

Монотоност (мм паковање):

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)^2 + 1}{3^{n+1}} = \frac{n^2 + 2n + 2}{3 \cdot 3^n} \quad \text{за } n \geq 2$$

$$\leq \frac{\frac{1}{3}(n^2 + n^2 + n^2)}{3^n} = \frac{n^2}{3^n} < \frac{n^2 + 1}{3^n} = a_n.$$

Низ је опадајући.

МоноTONOCT (квадратна неједначина):

$$a_{n+1} = \frac{n^2 + 2n + 2}{3 \cdot 3^n} < \frac{n^2 + 1}{3^n} = a_n$$



$$n^2 + 2n + 2 < 3n^2 + 3$$



$$0 < 2n^2 - 2n + 1$$

За ову квадратну је $D = -4 < 0$ и $a = 2 > 0$
па је увек позитивна!

Низ је опадајући.

Ограниченост:

опadaјући $\Rightarrow \frac{2}{3} = a_1 > a_2 > \dots > a_n$.

$n^2 \geq 0 \Rightarrow n^2 + 1 > 0$ и $3^n > 0 \Rightarrow a_n = \frac{n^2+1}{3^n} > 0$.

$0 \leq a_n \leq \frac{2}{3}$, те је низ **ограничен**.

Ограниченост:

опadaјући $\Rightarrow \frac{2}{3} = a_1 > a_2 > \dots > a_n$.

$n^2 \geq 0 \Rightarrow n^2 + 1 > 0$ и $3^n > 0 \Rightarrow a_n = \frac{n^2+1}{3^n} > 0$.

$0 \leq a_n \leq \frac{2}{3}$, те је низ **ограничен**.

Монотон и ограничен низ је **конвергентан**.



8.

Испитати конвергенцију низа (a_n) ако је

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n}.$$

8. 5.6. д).

Испитати конвергенцију низа (a_n) ако је

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n}.$$

Решење. Монотоност:

$$a_{n+1} - a_n = \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{3n+3} \right) - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n} \right)$$

8. 5.6. д).

Испитати конвергенцију низа (a_n) ако је

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n}.$$

Решење. МОНОТОНОСТ:

$$a_{n+1} - a_n = \left(\frac{1}{\cancel{n+2}} + \frac{1}{\cancel{n+3}} + \dots + \frac{1}{3n+3} \right) - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{\cancel{n+2}} + \dots + \frac{1}{\cancel{3n}} \right)$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+3} - \frac{1}{n+1}$$

Решење. МОНОТОНОСТ:

$$a_{n+1} - a_n = \left(\frac{1}{\cancel{n+2}} + \frac{1}{\cancel{n+3}} + \dots + \frac{1}{3n+3} \right) - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{\cancel{n+2}} + \dots + \frac{1}{\cancel{3n}} \right)$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+3} - \frac{1}{n+1} >$$

$$\frac{1}{3n+3} + \frac{1}{3n+3} + \frac{1}{3n+3} - \frac{1}{n+1} = \frac{3}{3n+3} - \frac{1}{n+1} = 0.$$

$$\text{Могло: } a_{n+1} - a_n = \frac{9n+5}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)} > 0.$$

Низ је растући.

Ограниченост:

сви сабирци позитивни $\Rightarrow a_n > 0$.

Ограниченост:

сви сабирци позитивни $\Rightarrow a_n > 0$.

из $\frac{1}{n+k} < \frac{1}{n}$:

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n} < \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_{2n} =$$

$$2n \cdot \frac{1}{n} = 2.$$

Ограниченост:

сви сабирци позитивни $\Rightarrow a_n > 0$.

из $\frac{1}{n+k} < \frac{1}{n}$:

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n} < \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_{2n} =$$

$$2n \cdot \frac{1}{n} = 2.$$

Из **ограничен**: $0 < a_n < 2$.

Ограниченост:

сви сабирци позитивни $\Rightarrow a_n > 0$.

из $\frac{1}{n+k} < \frac{1}{n}$:

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n} < \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_{2n} =$$

$$2n \cdot \frac{1}{n} = 2.$$

Низ **ограничен**: $0 < a_n < 2$.

Монотон и ограничен низ $\Rightarrow$ **конвергентан**.



9.

Користећи теорему о конвергенцији монотоног и ограниченог низа доказати конвергенцију низа (a_n) ако је

$$a_n = \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{1}{(3n+1) \cdot (3n+4)}.$$

За домаћи!

10.

Доказати конвергенцију низа (a_n) и
израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ако је

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} .$$

10.

Доказати конвергенцију низа (a_n) и израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ако је

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}}.$$

Решење. $n^2 + k > n^2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}} < \frac{1}{\sqrt{n^2}} = \frac{1}{n}$

за $k = 1, 2, \dots, n$.

Решение. $n^2 + k > n^2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}} < \frac{1}{\sqrt{n^2}} = \frac{1}{n}$

за $k = 1, 2, \dots, n$.

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \\
 &< \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_n = n \cdot \frac{1}{n} = 1 = c_n .
 \end{aligned}$$

Решение. $n^2 + k > n^2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}} < \frac{1}{\sqrt{n^2}} = \frac{1}{n}$

за $k = 1, 2, \dots, n$.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \\ &< \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_n = n \cdot \frac{1}{n} = 1 = c_n. \end{aligned}$$

$$n^2 + k < n^2 + n + 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}} > \frac{1}{\sqrt{n^2 + n + 1}}$$

за $k = 1, 2, \dots, n$.

$$n^2 + k < n^2 + n + 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}} > \frac{1}{\sqrt{n^2 + n + 1}}$$

3a $k = 1, 2, \dots, n$.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \\ &> \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n^2 + n + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n + 1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n + 1}}}_n \\ &= n \cdot \frac{1}{\sqrt{n^2 + n + 1}} = \frac{n}{\sqrt{n^2 + n + 1}} = b_n. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \\
&> \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n^2 + n + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n + 1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n + 1}}}_n \\
&= n \cdot \frac{1}{\sqrt{n^2 + n + 1}} = \frac{n}{\sqrt{n^2 + n + 1}} = b_n.
\end{aligned}$$

Добили смо:

$$b_n = \frac{n}{\sqrt{n^2 + n + 1}} < a_n < 1 = c_n.$$

Добили смо:

$$b_n = \frac{n}{\sqrt{n^2 + n + 1}} < a_n < 1 = c_n.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1.$$

Добили смо:

$$b_n = \frac{n}{\sqrt{n^2 + n + 1}} < a_n < 1 = c_n.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1.$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} b_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + n + 1}} \cdot \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n} = \sqrt{\frac{1}{n^2}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}} = 1. \end{aligned}$$

Добили смо:

$$b_n = \frac{n}{\sqrt{n^2 + n + 1}} < a_n < 1 = c_n.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1.$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} b_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + n + 1}} \cdot \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n} = \sqrt{\frac{1}{n^2}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}} = 1. \end{aligned}$$

По Леми о 2 полицајца $\Rightarrow$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n, \text{ тј.}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1.$$



11.

Одредити тачке нагомилавања низа (a_n) ако је $a_n = \frac{(1 + (-1)^n)n^2 + n}{3n^2 - 1} + \cos \frac{2n\pi}{3}$.

11.

Одредити тачке нагомилавања низа (a_n) ако

је $a_n = \frac{(1 + (-1)^n)n^2 + n}{3n^2 - 1} + \cos \frac{2n\pi}{3}$.

Решење. $1 + (-1)^n = \begin{cases} 2 & n = 2k \\ 0 & n = 2k + 1 \end{cases},$

11.

Одредити тачке нагомилавања низа (a_n) ако

$$\text{је } a_n = \frac{(1 + (-1)^n)n^2 + n}{3n^2 - 1} + \cos \frac{2n\pi}{3}.$$

$$\text{Решење.} \quad 1 + (-1)^n = \begin{cases} 2 & n = 2k \\ 0 & n = 2k + 1 \end{cases},$$

$$n = 2k: \quad \frac{2n^2 + n}{3n^2 - 1} = \frac{n^2(2 + \frac{1}{n})}{n^2(3 - \frac{1}{n^2})} \rightarrow \frac{2}{3};$$

11.

Одредити тачке нагомилавања низа (a_n) ако

$$\text{је } a_n = \frac{(1 + (-1)^n)n^2 + n}{3n^2 - 1} + \cos \frac{2n\pi}{3}.$$

Решење. $1 + (-1)^n = \begin{cases} 2 & n = 2k \\ 0 & n = 2k + 1 \end{cases},$

$$n = 2k: \quad \frac{2n^2 + n}{3n^2 - 1} = \frac{n^2(2 + \frac{1}{n})}{n^2(3 - \frac{1}{n^2})} \rightarrow \frac{2}{3};$$

$$n = 2k + 1: \quad \frac{0n^2 + n}{3n^2 - 1} = \frac{n^2(0 + \frac{1}{n})}{n^2(3 - \frac{1}{n^2})} \rightarrow \frac{0}{3} = 0.$$

11.

Одредити тачке нагомилавања низа (a_n) ако

$$\text{је } a_n = \frac{(1 + (-1)^n)n^2 + n}{3n^2 - 1} + \cos \frac{2n\pi}{3}.$$

Решење. $1 + (-1)^n = \begin{cases} 2 & n = 2k \\ 0 & n = 2k + 1 \end{cases},$

$$n = 2k: \quad \frac{2n^2 + n}{3n^2 - 1} = \frac{n^2(2 + \frac{1}{n})}{n^2(3 - \frac{1}{n^2})} \rightarrow \frac{2}{3};$$

$$n = 2k + 1: \quad \frac{0n^2 + n}{3n^2 - 1} = \frac{n^2(0 + \frac{1}{n})}{n^2(3 - \frac{1}{n^2})} \rightarrow \frac{0}{3} = 0.$$

$\frac{(1 + (-1)^n)n^2 + n}{3n^2 - 1}$ има 2 тачке нагомилавања:

$\frac{2}{3}$ (за парне n) и 0 (за непарне n).

Решење. $1 + (-1)^n = \begin{cases} 2 & n = 2k \\ 0 & n = 2k + 1 \end{cases},$

па $\frac{(1+(-1)^n)n^2+n}{3n^2-1}$ има 2 тачке нагомилавања:
 $\frac{2}{3}$ (за парне n) и 0 (за непарне n).

$$\cos \frac{2n\pi}{3} = \begin{cases} 1 & n = 3k \\ -\frac{1}{2} & n = 3k + 1, \\ -\frac{1}{2} & n = 3k + 2 \end{cases}$$

Решење. $1 + (-1)^n = \begin{cases} 2 & n = 2k \\ 0 & n = 2k + 1 \end{cases},$

па $\frac{(1+(-1)^n)n^2+n}{3n^2-1}$ има 2 тачке нагомилавања:
 $\frac{2}{3}$ (за парне n) и 0 (за непарне n).

$$\cos \frac{2n\pi}{3} = \begin{cases} 1 & n = 3k \\ -\frac{1}{2} & n = 3k + 1, \\ -\frac{1}{2} & n = 3k + 2 \end{cases},$$

па $\cos \frac{2n\pi}{3}$ има 2 тачке нагомилавања:
 1 (за $n = 3k$) и $-\frac{1}{2}$ (за $n \neq 3k$).

Комбиновањем ова 2 резултата добијамо
тачке нагомилавања низа a_n :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3} & n = 6k \\ 0 + \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} & n = 6k + 1 \\ \frac{2}{3} + \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6} & n = 6k + 2 \\ 0 + 1 = 1 & n = 6k + 3 \\ \frac{2}{3} + \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6} & n = 6k + 4 \\ 0 + \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} & n = 6k + 5 \end{array} \right.$$

Комбиновањем ова 2 резултата добијамо тачке нагомилавања низа a_n :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3} & n = 6k \\ 0 + (-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2} & n = 6k + 1 \\ \frac{2}{3} + (-\frac{1}{2}) = \frac{1}{6} & n = 6k + 2 \\ 0 + 1 = 1 & n = 6k + 3 \\ \frac{2}{3} + (-\frac{1}{2}) = \frac{1}{6} & n = 6k + 4 \\ 0 + (-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2} & n = 6k + 5 \end{array} \right.$$

тј. да низ (a_n) има 4 тачке нагомилавања:

$\frac{5}{3}$, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$ и 1 .



12.

Нека је $a_n = \left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^n + A \sin \frac{n\pi}{2}$, $A \in \mathbb{R}$.

- а) Одредити тачке нагомилавања низа (a_n) .
- б) Одредити вредност A тако да низ (a_n) буде конвергентан.

12.

Нека је $a_n = \left(\frac{2n+3}{2n+1} \right)^n + A \sin \frac{n\pi}{2}$, $A \in \mathbb{R}$.

- а) Одредити тачке нагомилавања низа (a_n) .
- б) Одредити вредност A тако да низ (a_n) буде конвергентан.

Решење.

а)
$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{2n+1} \right)^n$$

12.

Нека је $a_n = \left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^n + A \sin \frac{n\pi}{2}$, $A \in \mathbb{R}$.

- а) Одредити тачке нагомилавања низа (a_n) .
- б) Одредити вредност A тако да низ (a_n) буде конвергентан.

Решење.

а)
$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^n = [1^\infty]$$

12.

Нека је $a_n = \left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^n + A \sin \frac{n\pi}{2}$, $A \in \mathbb{R}$.

a) Одредити тачке нагомилавања низа (a_n) .

б) Одредити вредност A тако да низ (a_n) буде конвергентан.

Решење.

a)
$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^n = [1^\infty] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1+2}{2n+1}\right)^n$$

12.

Нека је $a_n = \left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^n + A \sin \frac{n\pi}{2}$, $A \in \mathbb{R}$.

a) Одредити тачке нагомилавања низа (a_n) .

б) Одредити вредност A тако да низ (a_n) буде конвергентан.

Решење.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad L &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^n = [1^\infty] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1+2}{2n+1}\right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{2n+1}\right)^{n \cdot \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{2}{2n+1}} \end{aligned}$$

Решение.

$$\begin{aligned}\mathbf{a)} \quad L &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{2n+1} \right)^n = [1^\infty] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1+2}{2n+1} \right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{2n+1} \right)^{n \cdot \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{2}{2n+1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{\frac{2n+1}{2}} \right)^{\frac{2n+1}{2}} \right)^{\frac{2n}{2n+1}} = e^1 = e.\end{aligned}$$

Решење.

$$\begin{aligned}\text{a)} \quad L &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{2n+1} \right)^n = [1^\infty] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1+2}{2n+1} \right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{2n+1} \right)^{n \cdot \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{2}{2n+1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{\frac{2n+1}{2}} \right)^{\frac{2n+1}{2}} \right)^{\frac{2n}{2n+1}} = e^1 = e.\end{aligned}$$

$\left(\frac{2n+3}{2n+1} \right)^n$ има једну тачку нагомилавања *e*.

Решење.

$$\begin{aligned}\text{a)} \quad L &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{2n+1} \right)^n = [1^\infty] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1+2}{2n+1} \right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{2n+1} \right)^{n \cdot \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{2}{2n+1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{\frac{2n+1}{2}} \right)^{\frac{2n+1}{2}} \right)^{\frac{2n}{2n+1}} = e^1 = e.\end{aligned}$$

$\left(\frac{2n+3}{2n+1} \right)^n$ има једну тачку нагомилавања e .

$$\sin \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0 & n = 2k \\ 1 & n = 4k + 1, \\ -1 & n = 4k + 3 \end{cases}$$

$\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^n$ има једну тачку нагомилавања e .

$$\sin \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0 & n = 2k \\ 1 & n = 4k + 1, \\ -1 & n = 4k + 3 \end{cases}$$

па $A \sin \frac{n\pi}{2}$ има 3 тачке нагомилавања:

0 ($n = 2k$), A ($n = 4k + 1$) и $-A$ ($n = 4k + 3$).

$\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^n$ има једну тачку нагомилавања e .

$$\sin \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0 & n = 2k \\ 1 & n = 4k + 1, \\ -1 & n = 4k + 3 \end{cases}$$

па $A \sin \frac{n\pi}{2}$ има 3 тачке нагомилавања:

0 ($n = 2k$), A ($n = 4k + 1$) и $-A$ ($n = 4k + 3$).

Тачке нагомилавања (a_n) су e , $e+A$ и $e-A$.

$$\sin \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0 & n = 2k \\ 1 & n = 4k + 1, \\ -1 & n = 4k + 3 \end{cases}$$

па $A \sin \frac{n\pi}{2}$ има 3 тачке нагомилавања:

0 ($n = 2k$), A ($n = 4k + 1$) и $-A$ ($n = 4k + 3$).

Тачке нагомилавања (a_n) су e , $e+A$ и $e-A$.

б) Конвергентан низ има само једну тачку нагомилавања, а то је могуће само за $A = 0$.

13.

Доказати конвергенцију низа (a_n) и израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ако је $5a_{n+1} = a_n^2 + 6$ и $a_1 \in (2, 3)$.

За домаћи!

КРАЈ ЧАСА