

Векторска анализа - домаћи

1. а) Показати да сфера S^n допушта структуру глатке многострукости конструкцијом глатког атласа.
б) Показати да је функција висине на сфери глатка функција.
в) Дати пример функције на сфери која је непрекидна, али није глатка.
г) Показати да сфера допушта структуру глатке многострукости користећи функцију $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ дефинисану са $f(x_1, \dots, x_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n+1} x_k^2$ и теорему о рангу.
д) Показати да је тангентни простор на сферу у тачки p изоморфан векторском простору $\ker df_p$.
ђ) Показати да је са $X = \sum_{k=1}^n (x_{2k} \frac{\partial}{\partial x_{2k-1}} - x_{2k-1} \frac{\partial}{\partial x_{2k}})$ добро дефинисано векторско поље на сфери S^{2n-1} и да ово векторско поље ни у једној тачки не дефинише нула пресликавање.
е) Да ли сфера S^{2n} допушта векторско поље које нигде није нула?
ж) Дати пример векторског поља на $\mathbb{R}^{n+1}$ чија рестрикција на сферу S^n није векторско поље на тој сфери.
2. Показати да је са $X_{(x_1, x_2, x_3)} = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}$ добро дефинисано векторско поље на S^2 . Одредити његове интегралне криве и нацртати их.
3. Под којим условом је комутатор $[X, Y]$ векторских поља $X = \sum_{k=1}^3 f_k(x) \frac{\partial}{\partial x_k}$ и $Y = \frac{\partial}{\partial x_1}$ глатко векторско поље на $\mathbb{R}^3$?
4. а) Одредити и нацртати интегралне криве векторског поља $X = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}$ на $\mathbb{R}^2$.
б) Одредити векторско поље f_*X , при чему је $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ функција дефинисана са $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1)$.
в) Одредити интегралне криве векторског поља f_*X на два начина.
5. а) Одредити и нацртати интегралне криве векторског поља $X = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$ на $\mathbb{R}^2$.
б) Одредити векторско поље f_*X , при чему је $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ функција дефинисана са $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1)$.
в) Одредити интегралне криве векторског поља f_*X на два начина.
6. Показати да је свако глатко пресликавање непрекидно.
7. На часу смо показали да је диференцијал дифеоморфизма у свакој тачки изоморфизам одговарајућих векторских простора. Да ли важи обрнуто, ако је диференцијал глатког пресликавања у свакој тачки изоморфизам векторских простора, да ли је то глатко пресликавање дифеоморфизам?
8. Проверити Јакобијев идентитет комутатора векторских поља на примеру три векторска поља на $\mathbb{R}^3$.

9. Наћи три векторска поља на S^3 која чине глобални покретни репер тангентног раслојења TS^3 .

10. а) Дати пример два векторска поља на $\mathbb{R}^2$ чији је комутатор нула. Показати да придружене једнопараметарске групе дифеоморфизама комутирају.

б) Дати пример две једнопараметарске групе дифеоморфизама на $\mathbb{R}^3$ које комутирају. Показати да је комутатор придружених векторских поља нула.

11. Дати пример дифеоморфизма f на $\mathbb{R}^3$ и одредити:

а) f_*X_k , при чему је $X_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$, $k = 1, 2, 3$.

б) f^*dx_k , $k = 1, 2, 3$.

в) $f^*(dx_i \wedge dx_j)$, $i, j \in \{1, 2, 3\}$.

г) $f^*(dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3)$.

12. а) Показати да је са

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

добро дефинисана Риманова метрика g на $\mathbb{R}^3$.

б) Да ли је ова метрика изометрична стандардној Римановој метрици g_0 на $\mathbb{R}^3$?

в) Нека је дато пресликавање $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ дефинисано са $F(x, y, z) = (\sqrt{2}x + \frac{3}{\sqrt{2}}y, \frac{1}{\sqrt{2}}y, z)$. Одредити метрику F^*g_0 .

г) Одредити градијент функције $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ дате са $f(x, y, z) = x + y + z$ у односу на Риманове метрике g, g_0, F^*g_0 .

13. Нека су $X = yz \frac{\partial}{\partial x}$ и $Y = x \frac{\partial}{\partial y}$ векторска поља и $\alpha = \sin z dx + dy + dz$ диференцијална 1-форма на $\mathbb{R}^3$. Израчунати $\iota_X \alpha$, $\iota_Y \alpha$, $d\alpha$, $d\alpha(X, Y)$, $[X, Y]$, $X(\alpha(Y))$ и $Y(\alpha(X))$. Показати да важи

$$d\alpha(X, Y) = X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) - \alpha([X, Y]).$$

14. Показати да важи Картанова формула на примеру $X = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$ и $\alpha = \sin z dx + dy + dz$.

15. Израчунати $\iota_X \alpha \wedge \beta$, при чему је $X = yz \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$, $\alpha = \sin z dx + dy + x^2 dz$ и β произволна 2-форма на $\mathbb{R}^3$.

16. Да ли пресликавање $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ дефинисано са $F(x, y, z) = (\sqrt{2}x + \frac{3}{\sqrt{2}}y, \frac{1}{\sqrt{2}}y, z)$ чува оријентацију? Одредити и $F^*(dx \wedge dy \wedge dz)$.

17. а) Одредити једну ортонормирану базу и Риманову форму запремине ω_g на $\mathbb{R}^3$ са метриком из задатка 12.

б) Одредити $\iota_X \omega_g$, при чему је $X = \frac{\partial}{\partial x}$.

в) Одредити ротор и дивергенцију векторског поља $X = \frac{\partial}{\partial x}$.

18. Наћи бар једно Лиувилово векторско поље за форму $\omega = x^2 dx \wedge dy \wedge dz$ на $\mathbb{R}^3$.

19. а) Показати да је са $\alpha = x dy - y dx + dz$ дефинисана контактна форма на $\mathbb{R}^3$. Написати ову контактну форму у цилиндричним координатама.

б) Нацртати контактне равни контактне многострукости $(\mathbb{R}^3, \ker \alpha)$.

в) Одредити карактеристичну фолијацију површи $\mathbb{R}^2 \times \{z = 0\}$.

20. а) Показати да је радијално векторско поље $X = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (x_k \frac{\partial}{\partial x_k} + y_k \frac{\partial}{\partial y_k})$ Лиувилу за 2-форму $\omega = \sum_{k=1}^n dx_k \wedge dy_k$ на $\mathbb{R}^{2n}$.

б) Показати да сфера S^{2n-1} допушта контактну структуру. (Користити део под а) и трансверзалност сфере и векторског поља X .)

21. а) Показати да је са $\alpha = \cos 4\pi\theta dt_1 + \sin 4\pi\theta dt_2$ дефинисана контактна форма на T^3 .

б) Нацртати контактне равни дуж круга $t_1 = c_1, t_2 = c_2$.

в) Одредити карактеристичну фолијацију торуса $\theta = c$.

22. Израчунати

а) $\int_{\gamma} ydx + zdz$, при чему је $\gamma(t) = (t^2, \cos t, 3t)$, $t \in [0, 1]$.

б) $\int_{\gamma} ydx + zdz$, при чему је $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 2)$, $t \in [0, 2\pi]$.

в) $\int_{\gamma} ydx + xdy + zdz$, при чему је $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 2)$, $t \in [0, 2\pi]$.

г) Да ли су 1-форме под интегралом затворене и тачне?

23. Израчунати интеграле б) и в) из претходног задатка уз помоћ Стоксове формуле.

24. Криволинијски интеграл векторског поља X дуж глатке криве $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ на произвољној Римановој многострукости (M, g) се дефинише на следећи начин

$$\int_{\gamma} X ds = \int_a^b g(X_{\gamma(t)}, \dot{\gamma}(t)) dt.$$

а) Израчунати $\int_{\gamma} X ds$, при чему је g Риманова метрика на $\mathbb{R}^3$ дата са

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

векторско поље $X = yz \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$ и $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 2)$, $t \in [0, 2\pi]$.

25. а) Показати да је са $\omega = -3(x^2 + 1)dx \wedge dy$ добро дефинисана форма запремине на $\partial\mathbb{H}^3$? Да ли она чува стандардну оријентацију на $\partial\mathbb{H}^3$? (Стандардна оријентација на $\partial\mathbb{H}^3$ се задаје векторским пољем $-\frac{\partial}{\partial z}$.)

б) Показати да је са $\omega = -3(x^2 + 1)dx \wedge dy \wedge dz$ добро дефинисана форма запремине на $\partial\mathbb{H}^4$? Да ли она чува стандардну оријентацију на $\partial\mathbb{H}^4$?

26. Нека је M^{2n} затворена (компактна и без границе) многострукост и нека је ω симплектичка форма на њој. Показати да ω не може бити тачна форма.

27. Израчунати $\int_{S^2} xdy \wedge dz + ydx \wedge dz + zdx \wedge dy$, при чему је S^2 сфера полупречника 1, оријентисана спољашњим вектором нормале на сферу.

28. Левоинваријантна векторска поља на Лијевим групама.

29. Показати да је S^3 Лијева група.