

2. домаћи

Диференцијална 1-форма α на многострукости V^{2n+1} , $n \geq 1$, се назива **контактном формом** ако је

$$\alpha \wedge (d\alpha)^n$$

форма запремине на V . Тада кажемо $(V, \ker \alpha)$ је **контактна многострукост**. У свакој тачки x контактне многострукости $(V, \ker \alpha)$ постоји хиперраван $\xi_x \subset T_x V$ која је језгро линеарног пресликавања $\alpha_x : T_x V \rightarrow \mathbb{R}$. Називамо је **контактном равни**. Скуп свих контактних равни је дистрибуција која се назива **контактном структуром**. То је управо језгро форме α .

1. Нека је дата многострукост V^{2n+1} са формом запремине $\alpha \wedge (d\alpha)^n$.

а) Описати језгро 1-форме α , као и језгро 2-форме $d\alpha$.

б) Показати да за свака два линеарно независна ненула векторска поља $X, Y \in \ker \alpha$ на V^3 важи $[X, Y] \notin \ker \alpha$.

б') Показати да је услов $\dim V = 3$ под б) неопходан.

в) Показати да постоји јединствено векторско поље R на V^{2n+1} тако да важи

$$\alpha(R) = 1 \text{ и } d\alpha(R, \cdot) = 0.$$

Назива се **Ребовим векторским пољем**.

2. а) Одредити Ребово векторско поље R контактне форме $\alpha = xdy + dz$ на $\mathbb{R}^3$. Описати његове трајекторије. Нацртати контактне равни дуж кружнице $z = 0, x^2 + y^2 = \pi^2$, као и у тачки $x = y = z = 0$.

б) Ако је $\alpha = \cos r dz + r \sin r d\theta$, где су (r, θ, z) цилиндричне координате на $\mathbb{R}^3$, показати да је α контактна форма. Одредити придружено Ребово векторско поље и његове трајекторије. Нацртати контактне равни дуж кружнице $z = 0, x^2 + y^2 = \pi^2$, као и у тачки $r = z = 0$.

3. На јединичној сфери $S^{2n+1} \subset \mathbb{R}^{2n+2}$, $n \geq 1$, посматрамо 1-форму $\alpha = \sum_{k=1}^{n+1} (x_k dy_k - y_k dx_k)$.

а) Показати да је α контактна форма и одредити придружено Ребово векторско поље. Описати његове трајекторије.

б) Показати $\ker \alpha = TS^{2n+1} \cap J(TS^{2n+1})$, при чему је $J : T\mathbb{R}^{2n+2} \rightarrow T\mathbb{R}^{2n+2}$ пресликавање дефинисано са

$$J \frac{\partial}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial y_k}, J \frac{\partial}{\partial y_k} = -\frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Дакле, $J : \mathbb{R}^{2n+2} \rightarrow \mathbb{R}^{2n+2}$ је пресликавање које је индуковано пресликавањем $(z_1, \dots, z_n) \mapsto (iz_1, \dots, iz_n)$.

Напомена. Кружница S^1 се такође може посматрати као контактна многострукост, при чему тражимо само да је α форма запремине.

4. Нека је дата симплектичка многострукост (M, ω) са непразном границом V и нека је дато векторско поље Y које је трансверзално на границу и усмерено ка спољашњости M . Ако је Y Лиувиллово векторско поље ($\mathcal{L}_Y \omega = \omega$) показати да је $\iota_Y \omega$ контактна форма на V . Да ли важи обрнуто, ако је $\iota_Y \omega$ контактна форма, да ли је Y Лиувиллово векторско поље у односу на ω ?

5. Описати сферу из задатка 3. као границу симплектичке многострукости из задатка 4.

6. Нека је дата Риманова многострукост (L, g) . Описати контактну структуру на косферном раслојењу од L уз помоћ задатка 4. (Почети од симплектичке многострукост кодиск раслојења над L .)