

1. домаћи

Лијеве групе и Лијеве алгебре

1. а) Показати да $\mathbb{S}^3$ допушта структуру Лијеве групе (користити кватернионе).
б) Одредити верну репрезентацију Лијеве групе $\mathbb{S}^3$.
в) Одредити Лијеву алгебру придружену $\mathbb{S}^3$.
2. Показати да $O(n)$ и $Sp(2n)$ допуштају структуру Лијеве групе и одредити њихове придружене Лијеве алгебре.
3. а) Доказати да ако је H затворена подгрупа Лијеве групе G , онда G/H допушта структуру глатке многострукости.
б) Да ли је G/H увек и Лијева група?
в) Показати да $\mathbb{S}^n$ и $\mathbb{RP}^n$ допуштају структуру глатких многострукости.
4. Показати да је свака Лијева група оријентабилна.
5. а) Показати да постоји наткривање Лијевих група $SU(2) \rightarrow SO(3)$. Одредити језгро овог хомоморфизма, као и чему је изоморфна слика овог хомоморфизма.
б) Описати Лијеве алгебре придружене Лијевим групама $SU(2)$ и $SO(3)$.
6. За које $n \in \mathbb{N}$ важи да $\mathbb{RP}^n$ допушта структуру Лијеве групе? Одредити њихове верне репрезентације. Упоредити са задатком 5. а)
7. Да ли постоји $n \in \mathbb{N}$ за које $\mathbb{CP}^n$ допушта структуру Лијеве групе?
8. а) Доказати да је скуп свих симплектичких векторских поља $Symp(M) \subset \mathfrak{X}(M)$ Лијева подалгебра свих векторских поља на симплектичкој многострукости (M, ω) . (Показати да је комутатор два симплектичка векторска поља Хамилтоново векторско поље, па и симплектичко.)
б) Доказати да је скуп свих Хамилтонових векторских поља $Ham(M) \subset \mathfrak{X}(M)$ Лијева подалгебра свих симплектичких векторских поља на (M, ω) . (Показати $[X_f, X_g] = -X_{\{f, g\}}$.)
9. Дати пример симплектичке многострукости (M, ω) где је $Ham(M)$ права Лијева подалгебра од $Symp(M)$. Зашто то није $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_{st})$?
10. Показати да постоји дифеоморфизам $\mathbb{CP}^n$ и количника $\mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$.
11. Нека је $exp : T_e G \rightarrow G$ експоненцијално пресликавање. Показати
а) $dexp_0 = id$
(Следи да је exp дифеоморфизам у некој околини нуле на $T_e G$.)
б) Показати да је $exp(X) = e^X$, при чему је $G = GL(n, \mathbb{R})$.
12. Показати $SP(2n, \mathbb{R}) \cap GL(2n, \mathbb{R}) \cong U(n)$.
13. Адјунгована репрезентација (произвољне Лијеве групе.) Показати да је заиста репрезентација.
14. Дарбуова теорема (симплектичка и контактна верзија).

15. Показати да $S^{n-1} \times \mathbb{R}^n$ наслеђује контактну структуру као јединично котангентно (косферно) раслојење. (Посматрати $\mathbb{R}^{2n}$ као котангентно раслојење над $\mathbb{R}^n$ са стандардном Римановом метриком).

16. Одредити Хамилтонову функцију дијагоналног S^1 дејства на

а) симплектичку многострукост $(\mathbb{C}^n, \frac{i}{2} \sum_{k=1}^n dz_k \wedge d\bar{z}_k)$,

б) контактну многострукост $(S^{2n-1}, \ker(\frac{i}{2} \sum_{k=1}^n (z_k d\bar{z}_k - \bar{z}_k dz_k)))$.

Написати придружено векторско поље и у поларним и у комплексним координатама.

17. Посматрати стандардно дејство торуза T^2 на $(S^1 \times S^2, \xi)$, при чему је контактна структура ξ добијена Луцовим полутвистом јединствене затегнуте контактне структуре на $S^1 \times S^2$). Показати да ово дејство чува контактну структуру и нацртати моментну слику.