

9. домаћи

1. а) Показати да је функција непрекидна ако и само ако је инверзна слика сваког отвореног скупа отворен скуп.

б) Показати да је свака непрекидна функција $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Борел мерљива. (Топологија на $\mathbb{R}$ је стандардна.)

в) Дати пример непрекидне функције на неком тополошком простору која није Борел мерљива.

2. Нека су функције $f + g$ и fg мерљиве. Да ли су тада мерљиве и функције f , g , $\frac{1}{f}$, $\frac{1}{g}$ и $\frac{1}{f} + \frac{1}{g}$? (Претпоставити $f \neq 0$ и $g \neq 0$.)

3. а) Нека је дата функција $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ дефинисана са $f(n) = 2^n$ и нека је $E = \{2, 4, 5, 7, 9, 11\}$. Израчунати интеграл

$$\int_E f d\nu,$$

где је $\nu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{R}$ бројачка мера.

б) Израчунати $\int_{\mathbb{N}} f d\nu$ за произвољну функцију $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.

4. а) Описати шта су мерљиве функције на $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

б) Нека је δ_c Диракова мера на $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ сконцентрисана у тачки $c \in \mathbb{R}$. Нека је дата произвољна функција $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Израчунати

$$\int_{\mathbb{R}} f d\delta.$$

5. Нека је $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ простор са мером и $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ две функције.

а) Ако је f мерљива, а g непрекидна, показати да је $g \circ f$ мерљива.

б) Може ли композиција две немерљиве функције бити мерљива?

в) Може ли композиција две непрекидне функције бити немерљива?