

2. домаћи

1. Нека је дата функција $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ дефинисана са $d(x, y) = |x^2 - y^2|$, за све $x, y \in \mathbb{R}$. Испитати да ли је d метрика на $\mathbb{R}$. Ако јесте, описати и нацртати отворене кугле.

2. Нека је дата функција $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ дефинисана са $d(x, y) = \max_{i=1, \dots, n} |x_i - y_i|$. Испитати да ли је d метрика на $\mathbb{R}^n$. Ако јесте, описати и нацртати отворене кугле у $\mathbb{R}^2$.

3. Нека је дата функција $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ дефинисана са $d(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$. Испитати да ли је d метрика на $\mathbb{R}^n$. Ако јесте, описати и нацртати отворене кугле у $\mathbb{R}^2$.

4. Нека је (X, d) метрички векторски простор над пољем $\mathbb{R}$. Нека важи:

а) транслаторна инваријантност метрике, тј. $d(a + c, b + c) = d(a, b)$, за све векторе $a, b, c \in X$;

б) хомогеност метрике, тј. $d(\lambda a, \lambda b) = |\lambda|d(a, b)$ за све $a, b \in X$ и све $\lambda \in \mathbb{R}$.

Показати да је тада са $\|a\| := d(a, 0)$ добро дефинисана норма на векторском простору X .

5. Нека је (X, d) метрички простор.

а) Показати да је пресек произвољно много затворених скупова затворен скуп.

б) Показати да је унија коначно много затворених скупова затворен скуп.

в) Примером показати да унија произвољно много затворених скупова не мора бити затворени скуп.

6. Нека је дат метрички простор $(\mathbb{R}, d_{st})$. Наћи A° (унутрашње тачке), $extA$ (спољашње тачке), ∂A (граничне тачке), $\overline{A}$ (затворење скупа A) и A' (тачке нагомилавања), при чему је скуп A :

а) $A = (0, 1] \cup \{3\}$.

б) $A = \mathbb{Q}$.

7. Показати

а) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$,

б) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$,

в) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$,

г) $A^\circ \cup B^\circ \subset (A \cup B)^\circ$,

д) Примерима показати да под в) и г) не мора бити једнакост.