

1. домаћи

1. а) Показати да је скуп комплексних бројева $\mathbb{C}$ векторски простор над пољем $\mathbb{R}$.
б) Показати да је димензија векторског простора $\mathbb{C}$ над пољем $\mathbb{R}$ једнака 2.
2. Дефинишимо функцију $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ са $d(x, y) = |e^x - e^y|$.
а) Објаснити да ли је $(\mathbb{R}, d)$ метрички простор.
б) Објаснити да ли је $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$ нормирани векторски простор, при чему је $\|x\| = d(x, 0)$.
3. Нека је $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ пред-Хилбертов простор.
а) Доказати неједнакост Минковског
$$\sqrt{\langle x + y, x + y \rangle} \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} + \sqrt{\langle y, y \rangle}.$$

б) Доказати неједнакост
$$\sqrt{(x_1 + y_1)^2 + \cdots + (x_n + y_n)^2} \leq \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} + \sqrt{y_1^2 + \cdots + y_n^2},$$
на пред-Хилбертовом простору $\mathbb{R}^n$ са скаларним производом
$$\langle x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n.$$
4. Нека је дата функција $d_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ дефинисана са $d_1(x, y) = |x - y|$, за све $x, y \in \mathbb{R}$.
а) Показати да је $(\mathbb{R}, d_1)$ метрички простор.
б) Описати отворене и затворене кугле на овом метричком простору.
5. Нека је дата функција $d_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ дефинисана са $d_2(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$, за све $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ и $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$
а) Показати да је $(\mathbb{R}^2, d_2)$ метрички простор.
б) Описати отворене и затворене кугле на овом метричком простору.