

12. домаћи

1. Израчунати

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^{\infty} \frac{dx}{(1+x/n)^n x^{1/n}}. \\ & \lim_{n \rightarrow \infty} n^5 \int_0^{1/n} x^2 \operatorname{arctg}(\log(1 + \frac{x}{n^2})) dx. \\ & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 n^2 x e^{-n^2 x^2} dx. \\ & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^{\infty} \frac{n \sin \frac{2x}{n}}{(x^{1/n} + \frac{1}{n} x^{1+1/n})^n} dx. \\ & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{3n \sin^4 x \log(x+7)}{6+7n^2 x^{3/2}} dx. \end{aligned}$$

2. Нека је $X = [0, 1]$ и на њему Лебегова мера m . Нека је дат низ функција $f_n(x) = \frac{\sqrt[5]{n^3 x}}{1+n^2 x^2}$.

- а) Да ли су f_n Лебег мерљиве функције?
- б) Да ли низ f_n конвергира на X и да ли конвергира скоро свуда на X ?
- в) Да ли низ f_n конвергира равномерно на X ?
- г) Израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n dm$.

3. Објаснити да ли се на низ функција $f_n(x) = \frac{3\sqrt{x}}{n} \chi_{[0,n]}$ може применити теорема о доминантној конвергенцији. (На простору $X = [0, \infty)$ са Лебеговом мером.)

4. Навести четири различите σ -алгебре које су садржане у Лебеговој σ -алгебри.

5. а) Дати пример функције која у једној метрици јесте равномерно непрекидна, а у другој није. (Објаснити.)

б) Дати пример повезаног и неограниченог метричког простора који није комплетан. (Објаснити.)