

11. домаћи

1. Нека је дат простор са мером $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ и нека је $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ мерљива функција. Показати да важи $\int_X \lambda f d\mu = \lambda \int_X f d\mu$, за сваку константу $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. Нека је $X = [0, \infty)$ и на њему Лебегова мера m . Нека је дат низ функција $f_n = \chi_{[0, n]}$.

- а) Да ли су f_n Лебег мерљиве функције?
- б) Да ли низ f_n конвергира на X и да ли конвергира скоро свуда на X ?
- в) Да ли низ f_n конвергира равномерно на X ?
- г) Израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n dm$.

3. Нека је $X = [0, 1]$, мера Лебегова и $f_n = n^{1/2} \chi_{(0, \frac{1}{n})}$ низ функција.

- а) Да ли су f_n Лебег мерљиве функције?
- б) Да ли низ f_n конвергира на X и да ли конвергира скоро свуда на X ?
- в) Да ли низ f_n конвергира равномерно на X ?
- г) Израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n dm$.

4. Нека је $X = [0, 1]$, мера Лебегова и $f_n(x) = \frac{\cos(\frac{x^2}{n})}{1+x^2}$ низ функција.

- а) Да ли су f_n Лебег мерљиве функције?
- б) Да ли низ f_n конвергира на X и да ли конвергира скоро свуда на X ?
- в) Да ли низ f_n конвергира равномерно на X ?
- г) Израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n dm$.