

10. домаћи

1. Нека је дат простор са мером $(X, \mathfrak{M}, \mu)$. Нека је $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ мерљива функција и нека је $\int_E f d\mu = 0$, за сваки скуп $E \in \mathfrak{M}$. Показати да је $f = 0$ скоро свуда.

2. Нека је дат низ функција $f_n : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ дефинисан са $f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 1, \\ (-1)^n, & x = 1. \end{cases}$

а) Показати да су функције f_1 и f_2 Лебег мерљиве.

б) Показати да је f_n низ Лебег мерљивих функција.

в) Да ли овај низ конвергира (тачка по точка) ка некој функцији?

г) Да ли овај низ конвергира скоро свуда ка некој функцији?

д) Израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{(0, \infty)} f_n dm$, где је m Лебегова мера.

3. Нека су μ_1 и μ_2 две мере на истој σ -алгебри $\mathfrak{M}$. Ако је $\mu = \mu_1 + \mu_2$, показати да је $\int_E f d\mu = \int_E f d\mu_1 + \int_E f d\mu_2$, за сваки скуп $E \in \mathfrak{M}$ и сваку мерљиву функцију $f : X \rightarrow \mathbb{R}$.

4. Нека је дат низ реалних бројева x_n , $n \in \mathbb{N}$.

а) Доказати да је са $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, $\mu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_E(x_n) + \delta_{\{2\}}(E)$ дефинисана једна мера на $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

б) Ако је $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$, наћи $\mu(\mathbb{Q})$ и $\mu(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.

в) Израчунати $\int_{[0,3]} f d\mu$, где је $f(x) = x$, а низ x_n дефинисан под б).

5. Дати пример непрекидне функције f у одређеном метричком простору X и дефинисати две различите σ -алгебре над X тако да f буде мерљива у односу на једну и немерљива у односу на другу σ -алгебру.

6. Нека је дат низ мерљивих функција $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$. Користећи теорему о монотonoј конвергенцији показати да важи

$$\int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu.$$

7. Навести пример мере у којој Канторов скуп јесте мерљив и пример мере у којој Канторов скуп није мерљив.