

Увод у Рачунарску Топологију

Александар Миладиновић

24. јун 2026.

Садржај

1	Основни појмови из Топологије	1
1.1	Компактност	2
1.2	Повезаност	2
1.3	Путна повезаност	3
1.4	Хомеоморфизам тополошких простора	4
1.5	Тополошке инваријанте	5
2	Графови	8
2.1	Планарни графови	8
2.2	Затворене криве у равни и полигоне линије	10
3	Површи	13
3.1	Количнички модел површи	14
3.2	Класификација затворених површи	16
3.3	Повезана сума (спајање) површи	17
3.4	Утапање графова	20
3.5	Триангулација површи	21
4	Хомологија тополошких простора	25
4.1	Симплицијални комплекси	25
4.2	Ланчасти комплекси	27
4.3	Хомологија симплицијалних комплекса	28
4.4	Рачунање хомологије са коефицијентима $\mathbb{Z}_2$	28
5	Перзистентна хомологија	30
5.1	Перзистентне класе и дијаграми	30
5.2	Рачунање перзистентних класа $\text{mod } 2$	31
5.3	Растојање перзистентних дијаграма и теорема стабилности	34

1 Основни појмови из Топологије

Сви простори са којима радимо биће потпростори еуклидских простора $\mathbb{R}^n$.

Дефиниција 1.1. Нека је U скуп, $U \subseteq \mathbb{R}^n$. За U кажемо да је отворен ако $(\forall x \in U)(\exists \varepsilon > 0)(B(x, \varepsilon) \subseteq U)$, где је $B(x, \varepsilon)$ отворена кугла са центром у x и полупречником ε . Скуп свих отворених скупова од $\mathbb{R}^n$ означавамо са $\mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$.

Дефиниција 1.2. За скуп $F \subset \mathbb{R}^n$ кажемо да је затворен ако је његов комплемент отворен скуп.

Пример 1.1. Размотримо следеће просторе:

1. $D^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1\}$ - затворени диск;
2. $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$ - кружница (затворен скуп/потпростор);
3. $B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| < r\}$ - отворена кугла са центром у x_0 , полупречника r ;
4. $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ - затворени n -димензиони диск;
5. $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ - n -димензиона сфера (затворен скуп/потпростор);

Дефиниција 1.3. Скуп $X \subseteq \mathbb{R}^n$ називамо тополошким потпростором од $\mathbb{R}^n$ (или, понекад, само простором), где су отворени скупови облика $X \cap U$ за $U \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$. За тополошки простор кажемо да је отворен (тј. затворен) ако је отворен (тј. затворен) као подскуп од $\mathbb{R}^n$.

Пример 1.2. Сви скупови из горњег примера су тополошки простори од $\mathbb{R}^2$ тј. $\mathbb{R}^n$. Такође, сви су затворени осим отворене кугле $B(x_0, r)$.

Дефиниција 1.4. Унутрашњост простора X представљају све тачке простора X за које постоји околина (отворени скуп који садржи ту тачку) која у потпуности припада простору X . Унутрашњост простора X обележавамо са $\text{int } X$. Другим речима, за $x \in X$ важи $x \in \text{int } X$ ако постоји отворен скуп U , $x \in U$ такав да $U \subseteq X$.

Дефиниција 1.5. Руб простора $X \subseteq \mathbb{R}^n$ дефинишемо као скуп $\partial X = \mathbb{R}^n \setminus (\text{int } X \cup \text{int}(\mathbb{R}^n \setminus X))$.

Пример 1.3. За $n \in \mathbb{N}$ је $\partial D^n = S^{n-1}$.

1.1 Компактност

Дефиниција 1.6. Нека је $X \subseteq \mathbb{R}^n$ један простор и нека је $\{U_i\}_{i \in I}$ фамилија отворених скупова у X . За фамилију $\{U_i\}_{i \in I}$ кажемо да је отворен покривач од X ако $X = \bigcup_{i \in I} U_i$.

Дефиниција 1.7. Простор $K \subseteq \mathbb{R}^n$ је компактан ако сваки његов отворен покривач има коначан потпокривач.

Теорема 1.1. Простор $K \subseteq \mathbb{R}^n$ је компактан ако и само ако је затворен и ограничен.

Напомена 1.1. Другим речима, тополошки простор K из горње теореме је компактан ако и само ако садржи све тачке са своје границе и ако $\exists a \in \mathbb{R}^n$ и $R > 0$ такви да је $K \subseteq B(a, R)$.

Пример 1.4. 1. $(-1, 1)$ није компактан. Уочимо његов отворен покривач $\{(-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n})\}_{n \in \mathbb{N}}$. Претпоставимо да постоји коначан потпокривач $\{(-1 + \frac{1}{n_1}, 1 - \frac{1}{n_1}), (-1 + \frac{1}{n_2}, 1 - \frac{1}{n_2}), \dots, (-1 + \frac{1}{n_k}, 1 - \frac{1}{n_k})\}$. Нека је $n_0 = \max\{n_1, n_2, \dots, n_k\}$. Сада је $(-1, 1) = \bigcup_{i=1}^k (-1 + \frac{1}{n_i}, 1 - \frac{1}{n_i}) = (-1 + \frac{1}{n_0}, 1 - \frac{1}{n_0})$ што је контрадикција.

2. По претходној теореме, простор $[-1, 1]$ јесте компактан.

3. Простори D^n и S^n за $n \in \mathbb{N}$ су компактни.

1.2 Повезаност

Дефиниција 1.8. Дисконексија простора X представља пар отворених подскупова од X (U_1, U_2) тако да је $U_1 \neq \emptyset$, $U_2 \neq \emptyset$, $X = U_1 \cup U_2$ и $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Дефиниција 1.9. Простор X је неповезан ако постоји његова дисконексија. X је повезан ако није неповезан.

Пример 1.5. 1. $X = B((-1, 0), 1) \cup B((1, 0), 1) \subseteq \mathbb{R}^2$ није повезан.

2. $Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 \leq 1\}$ (унутрашњост елипсе) је повезан.

1.3 Путна повезаност

Дефиниција 1.10. Нека је $X \subseteq \mathbb{R}^n$ и $x, y \in X$. Пут који повезује тачке x и y је непрекидна функција $u : [0, 1] \rightarrow X$ таква да је $u(0) = x$ и $u(1) = y$.

Пример 1.6. Простор $X = B((-1, 0), 1) \cup B((1, 0), 1) \subseteq \mathbb{R}^2$ из претходног примера није путно повезан, али има две компоненте путне повезаности: $B((-1, 0), 1)$ и $B((1, 0), 1)$.

Став 1.1. Сваки путно повезан простор је повезан.

Напомена 1.2. Међутим, обрнуто не мора да важи тј. повезан простор не мора увек бити путно повезан. Пример је *тополошка синусоида*: $\{0\} \times [-1, 1] \cup \{(x, \sin(\frac{1}{x})) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (0, 1)\}$.

Дефиниција 1.11. Простор X је просто-повезан ако сваку петљу можемо непрекидно кроз тај простор скупити у тачку.

Формално, простор X је просто-повезан ако за сваку петљу тј. непрекидно пресликавање $u : [0, 1] \rightarrow X$ такво да је $u(0) = u(1) = x_0 \in X$ постоји непрекидно пресликавање $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ такво да је $H(0, x) = u(x)$ и $H(1, x) = x_0$.

Пример 1.7. Кружница S^1 није просто-повезана, јер петљу која обмотава кружницу не можемо скупити у тачку. С друге стране, равна $\mathbb{R}^2$ као и сфера S^2 јесу просто-повезани простори.

Задатак 1.1. Испитати које од претходно споменутих особина имају следећи простори: $A = [0, 1]$, $B = (0, 1) \cup (3, 7)$, $C = [0, 100)$, $D = [10, +\infty)$, $E = \mathbb{N}$, $F = [-2, 1) \cup (1, 4]$.

Решење.

	Отворен	Затворен	Компактан	Путно повезан
A	Не	Да	Да	Да
B	Да	Не	Не	Не
C	Не	Не	Не	Да
D	Не	Да	Не	Да
E	Не	Да	Не	Не
F	Не	Не	Не	Не

□

Задатак 1.2. Испитати које од претходно споменутих особина имају следећи простори: $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 1)^2 + (y - 3)^2 \leq 1\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 2)^2 + (y - 2)^2 < 2\}$, $C = A \cup B$, $D = A \cap B$, $E = A \setminus \{(1, 3)\}$, $F = A^c \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 1\}$.

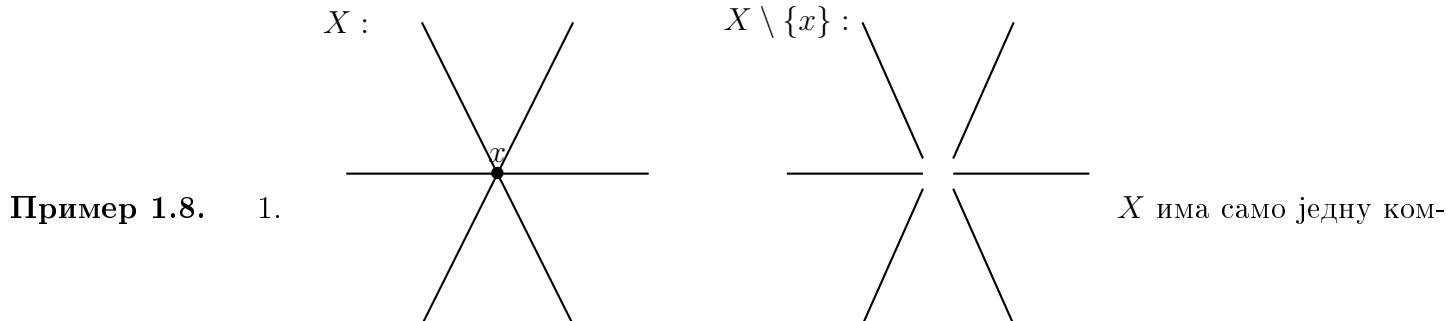
Решење.

	Отворен	Затворен	Компактан	Путно повезан	Просто-повезан
A	Не	Да	Да	Да	Да
B	Да	Не	Не	Да	Да
C	Не	Не	Не	Да	Да
D	Не	Не	Не	Да	Да
E	Не	Не	Не	Да	Не
F	Не	Не	Не	Да	Да

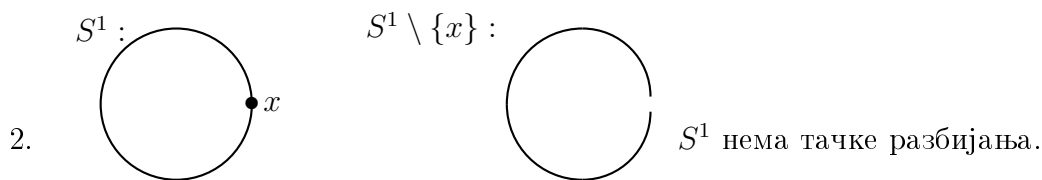
□

Вежба 1.1. Испитати које од претходно споменутих особина имају следећи простори: $A = S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$, $B = S^2 \cup [(1, 0, 0), (-1, 0, 0)]$, где је $[(1, 0, 0), (-1, 0, 0)] = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid (\exists t \in [0, 1])x = t(1, 0, 0) + (1-t)(-1, 0, 0)\}$ (тј. то је дуж чији су крајеви тачке $(1, 0, 0)$ и $(-1, 0, 0)$), $C = B((0, 0, 1), 5) \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \|(x, y, z) - (0, 1, 0)\| \leq 7\}$.

Дефиниција 1.12. Тачку $x_0 \in X$ зовемо тачком разбијања ако $X \setminus \{x_0\}$ има више компоненти повезаности него простор X .



поненту повезаности док их $X \setminus \{x\}$ има 6, дакле x је тачка разбијања.



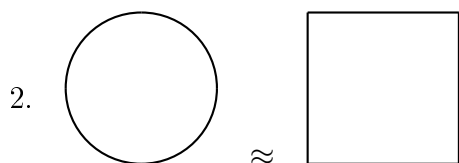
1.4 Хомеоморфизам тополошких простора

Дефиниција 1.13. Пресликавање тополошких простора $f : X \rightarrow Y$ је непрекидно ако је за сваки отворен скуп $U \subseteq X$, $f^{-1}(U)$ такође отворен.

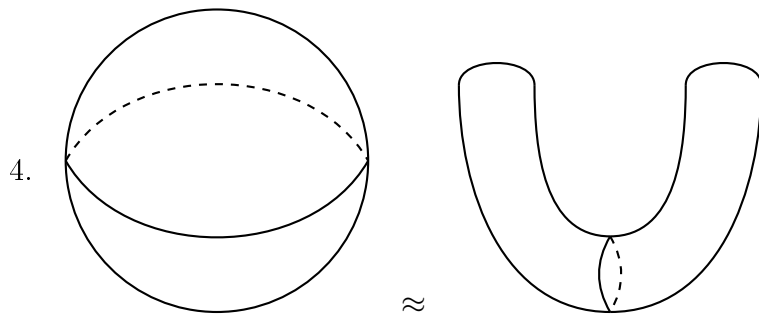
Дефиниција 1.14. Пресликавање $f : X \rightarrow Y$ називамо *хомеоморфизмом* тополошких простора ако:

1. f је непрекидно;
2. f је бијекција;
3. f^{-1} је непрекидно.

Два простора X и Y су хомеоморфни, у ознаци $X \approx Y$ ако постоји хомеоморфизам између њих.



3. $X = D^2 \approx Y = S^2 \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq 0\}$



Пример 1.10. Битност услова 3. из дефиниције хомеоморфизма можемо видети на следећем примеру:

Нека су дати простори $X = [0, 2\pi)$ и $Y = S^1$, као и пресликавање

$$f : X \rightarrow Y$$

$$f : x \mapsto (\cos(x), \sin(x))$$

Јасни је да је f непрекидна бијекција. Међутим, f^{-1} није непрекидно пресликавање, јер $(f^{-1})^{-1}([0, \frac{1}{2}))$ није отворен скуп у Y , док $[0, \frac{1}{2})$ јесте отворен у X .

Став 1.2. Нека су X и Y хомеоморфни простори. Тада је $(X \cap \partial X) \approx (Y \cap \partial Y)$.

Задатак 1.3. Доказати да су следећи простори хомеоморфни:

1. $(0, 1)$ и (a, b) ;
2. $(0, 1)$ и $\mathbb{R}$;
3. $(0, +\infty)$ и $\mathbb{R}$;
4. $(-\infty, 0)$ и $(3, 7)$.

Решење. 1. $f : (0, 1) \rightarrow (a, b)$, $t \mapsto a(1 - t) + bt$ је један хомеоморфизам;

2. Из претходног дела знамо да је $(0, 1) \approx (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Даље је $\text{tg} : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ један хомеоморфизам (инверз је $\arctg$) па је $(0, 1) \approx \mathbb{R}$;

3. $\ln : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ је хомеоморфизам (инверз је функција e^x);

4. Може се извести из претходног.

□

1.5 Тополошке инваријанте

Дефиниција 1.15. Тополошке инваријанте су особине тополошких простора које се чувају при хомеоморфизмима. Другим речима, особина P је тополошка инваријанта ако је $X \approx Y$ и X има особину P , онда и Y има особину P .

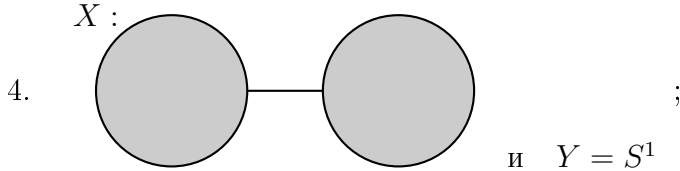
Став 1.3. Следеће особине су тополошке инваријанте:

- Повезаност и број компоненти повезаности;
- Путна повезаност и број компоненти путне повезаности;
- Просто-повезаност;
- Тачке разбијања;
- Компактност.

Став 1.4. Нека је $f : X \rightarrow Y$ хомеоморфизам и $x \in X$. Онда је и $X \setminus \{x\} \approx Y \setminus \{f(x)\}$.

Задатак 1.4. Доказати да наредни простори нису хомеоморфни:

1. $[0, 1]$ и $(0, 1)$;
2. $[0, 1)$ и $(0, 1)$;
3. $(0, 1)$ и S^1 ;



5. $X = D^2$ и $Y = D^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Решење. 1. $[0, 1]$ је компактан док $(0, 1)$ није;

2. Претпоставимо да постоји хомеоморфизам $f : [0, 1) \rightarrow (0, 1)$. Онда је и $(0, 1) \approx [0, 1) \setminus \{0\} \approx (0, 1) \setminus \{f(0)\}$. Међутим, први од ових простора је повезан, док други то не може бити;
3. $(0, 1)$ има тачке разбијања док S^1 нема;
4. X има тачке разбијања док Y нема;
5. X је просто-повезан, док Y није (нпр. петља $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ не може да се скупи у тачку, јер не можемо да пређемо преко $(0, 0)$).

□

Задатак 1.5. Доказати да су наредни простори хомеоморфни:

1. $\text{int } D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ и $\mathbb{R}^2$;
2. $S^2 \setminus \{N\}$ и $\mathbb{R}^2$, где је $N = (0, 0, 1)$;
3. $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ и $S^1 \times \mathbb{R}$.

Решење. 1. $f : \text{int } D^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x) = \frac{x}{1-||x||}$,
 $f^{-1}(y) = \frac{y}{1+||y||}$.

2. Стереографска пројекција је пресликавање које представља хомеоморфизам између ових простора.
3. $h : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}$, $h(x) = (\frac{x}{||x||}, \ln(||x||))$,
 $h^{-1}((y_1, y_2), z) = (e^z y_1, e^z y_2)$, где је $(y_1, y_2) \in S^1$, $z \in \mathbb{R}$.

□

Напомена 1.3. Претходни задатак дао нам је конкретне хомеоморфизме (f , стереографска пројекција h), међутим, у задацима главни акценат биће на томе да се разуме који простори су хомеоморфни, без уласка у конкретну конструкцију хомеоморфизама.

Задатак 1.6. Дати су следећи тополошки простори:

- $A = S^2 \setminus \{\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\}$;
- $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, x^2 + y^2 \leq 4\}$;
- $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x - y| \leq 2\}$;

- $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$;
- $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 2\}$;
- $F = E \setminus \{(1, 1)\}$.

Који од ових простора су међусобно хомеоморфни? Да ли међу њима има компактних?

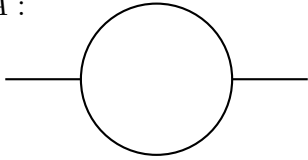
Решење. $B \approx E$ и они су уједно и једини компактни, $D \approx F$.

$D \approx \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1, y \geq 1\} \approx D^2 \setminus \{(1, 0)\} \approx F$.

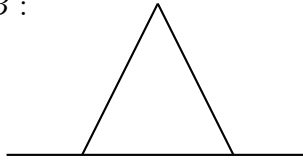
□

Задатак 1.7. Груписати следеће тополошке просторе у групе међусобно хомеоморфних:

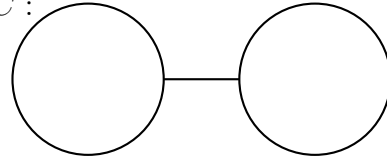
A :



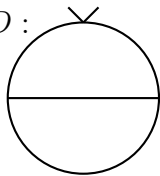
B :



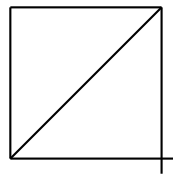
C :



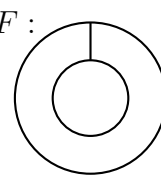
D :



E :



F :



Решење. $G_1 = \{A, B\}$, $G_2 = \{D, E\}$, $G_3 = \{C, F\}$.

□

Задатак 1.8. (Јул 2024) Дати су следећи тополошки простори:

1. $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \setminus \{(1, 0, 0), (-1, 0, 0)\}$;
2. $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\} \setminus \{(0, 0)\}$;
3. $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 1)^2 + y^2 < 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x + 1)^2 + y^2 < 1\}$;
4. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + y^2 = 1\} \times (0, 1)$;
5. $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 < 4, 4x^2 - y^2 > 1\}$.

Који од ових простора су међусобно хомеоморфни? Који су неповезани?

Решење. $A \approx D \approx B$ су повезани и $C \approx E$ који су неповезан.

□

Задатак 1.9. (Јун 2025) Дати су следећи тополошки простори:

1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, |x| \geq \frac{1}{2}\}$;
2. $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 4 \geq y^2\}$;
3. $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 \leq 1, x \geq 0\}$;
4. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq \max\{x, y\} \leq 2\}$;
5. $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x + 1)^2 + y^2 = \frac{1}{9}\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 1)^2 + y^2 = \frac{1}{9}\}$.

Који од ових простора су међусобно хомеоморфни? Који су компактни?

Решење. Ниједна два простора нису хомеоморфна, и сви осим простора B су компактни.

□

2 Графови

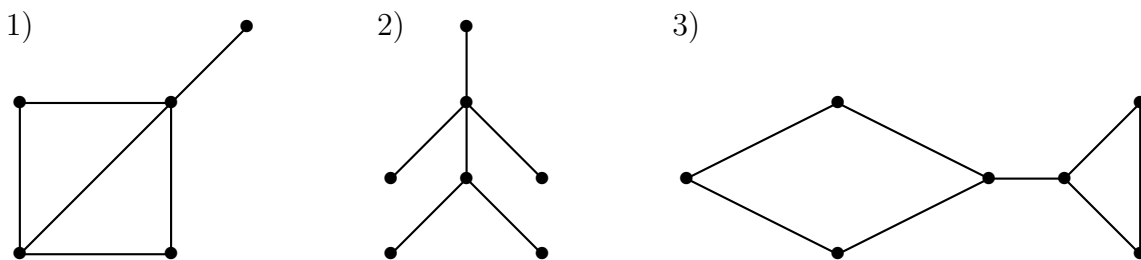
Дефиниција 2.1. Граф G представља пар $G = (V, E)$ где је V скуп темена, док је E скуп ивица графа који представљају парове темена.

Графове обично представљамо геометријски, тако да темена из скупа V представљамо тачкама у простору, а ивице као линије које повезују два темена.

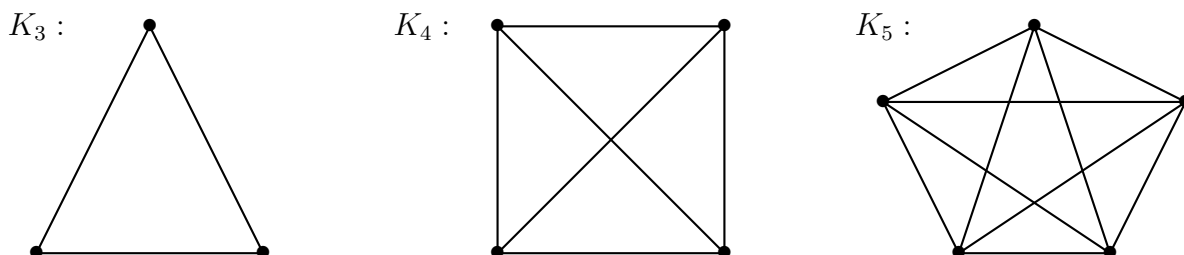
Дефиниција 2.2. Граф G је повезан ако постоји пут који повезује свака два његова темена. Пут између темена v и u можемо представити као низ ивица графа $e_1, e_2, \dots, e_n$, тако да је једно од темена ивице e_1 v , а једно од темена ивице e_n баш теме u .

Напомена 2.1. С обзиром да је већина читалаца упозната са алгоритмима везаним за графове (тражење компоненти повезаности, обиласци графова итд.), и с обзиром да нам нису главна тема овде се нећемо освртати на њих

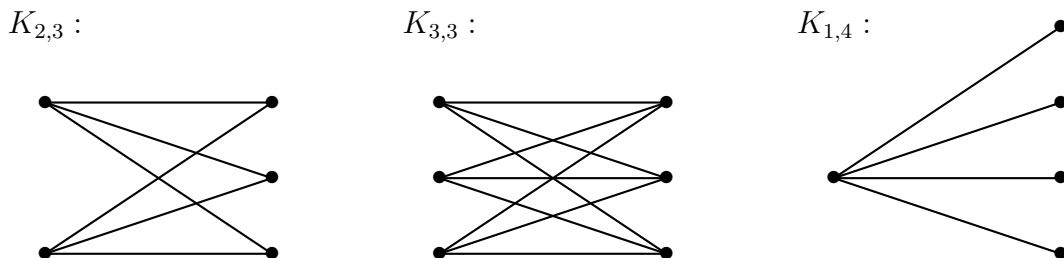
Пример 2.1. Неки примери графова су:



Пример 2.2. Комплетан граф са n темена, у ознаци K_n је граф код кога су између свака два темена постоји тачно једна ивица. Примери комплетних графова су:



Пример 2.3. Бипартитни граф $K_{n,m}$ је граф чији се скуп темена састоји од два скупа: први скуп има n темена а други m темена. Додатно, свако теме из првог скупа повезано је ивицом са сваким теменом из другог скупа. Примери бипартитних графова су:



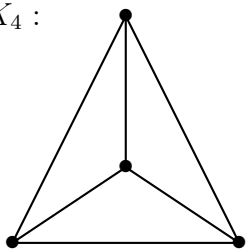
2.1 Планарни графови

Дефиниција 2.3. Граф је планаран ако постоји његово утапање у раван $\mathbb{R}^2$.

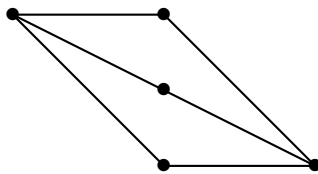
Напомена 2.2. Другим речима, граф је планаран ако можемо да га исцртамо у равни тако да се ниједна два темена не поклапају и тако да се ивице графа међусобно не секу (осим што потенцијално деле заједничке крајеве тј. темена)

Пример 2.4. Графови K_5 и $K_{3,3}$ из горњих примера нису планарни. Са друге стране, графове K_4 и $K_{2,3}$ јесмо нацртали тако да им се ивице секу, али променом положаја темена и ивица то се може променити:

K_4 :

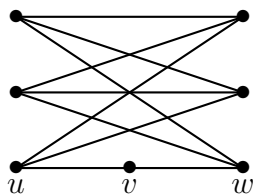


$K_{2,3}$:



Теорема 2.1. (Куратовског) Граф G није планаран ако и само ако садржи подграф који је хомеоморфан са K_5 или $K_{3,3}$.

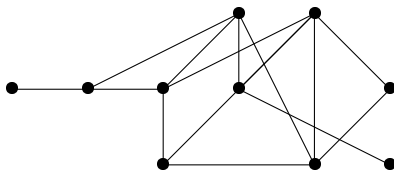
Пример 2.5. Наредни граф не садржи ни $K_{3,3}$ ни K_5 као подграф, али јесте хомеоморфан са $K_{3,3}$ јер доњи пут $u - v - w$ можемо заменити са $u - w$.



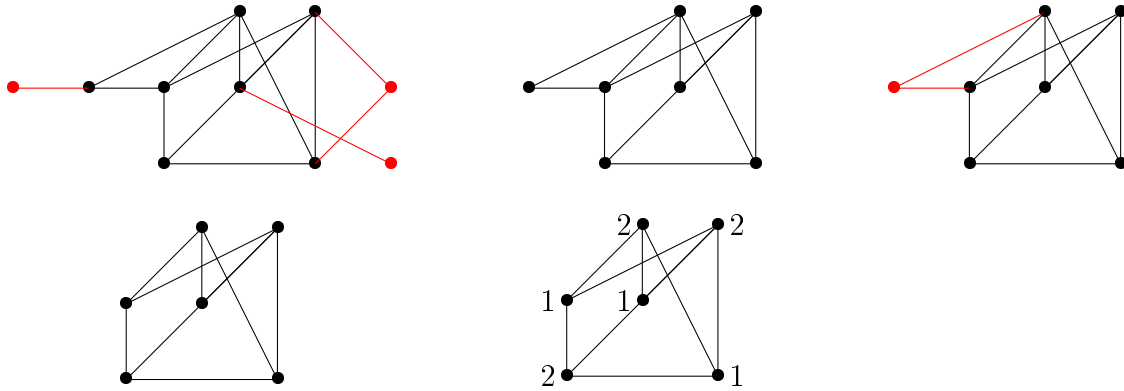
Алгоритам провере: Ако је дат граф G и желимо да проверимо да ли је он планаран радимо следеће:

1. За почетак сваком темену доделимо индекс или степен. Индекс темена је број ивица са којим је то теме инцидентно.
Приметимо да граф K_5 има 5 темена индекса 4, док граф $K_{3,3}$ има 6 темена индекса 3.
2. Свако теме степена 2, заједно са ивицама са којима је инцидентно заменимо јендом ивицом која повезује темена са којима је теме степена 2 било повезано.
3. Ако постоји више ивица које директно повезују два темена, обришимо све ивице осим једне.
4. Обележимо темена чији је индекс једнак 1, затим обришимо означена темена као и све ивице које су инцидентне са обележеним теменима.
5. Понављамо претходна три корака докле год то можемо.
6. Ако граф G има мање од 5 темена индекса бар 4 и има мање од 6 темена индекса бар 3 онда он не може садржати K_5 или $K_{3,3}$ као подграфове и закључујемо да је планаран. У супротном тражимо подграф хомеоморфан са K_5 или $K_{3,3}$.

Задатак 2.1. Доказати да граф G приказан на слици доле није планаран.

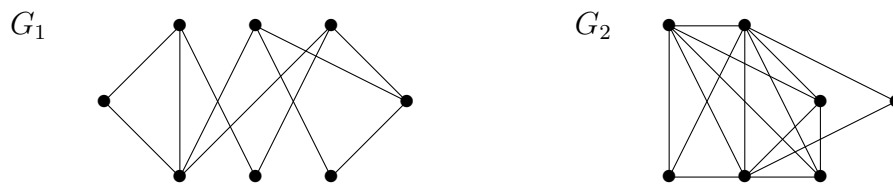


Решење. Поступимо према упутству изнад:

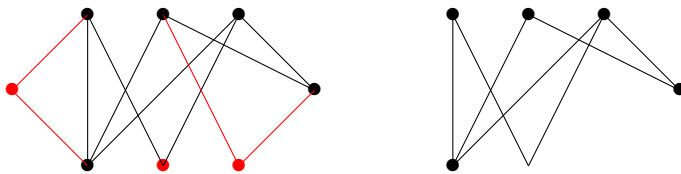


Као што можемо да видимо, граф G садржи граф $K_{3,3}$ као подграф те није планаран. $\square$

Задатак 2.2. (Септембар 1, 2024) Одредити који од наредних графова су планарни:

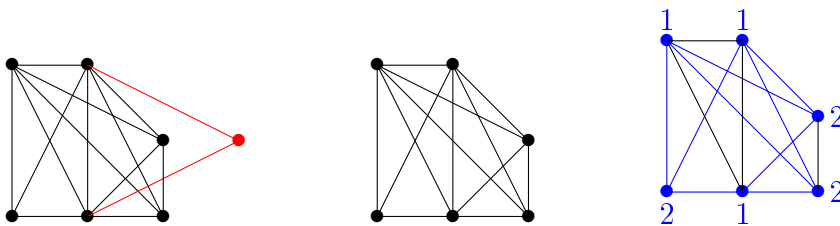


Решење. 1. G_1 :



Овде видимо да имамо само два темена индекса бар 3 тако да је граф G_1 планаран.

2. G_2 :



Овине смо нашли подграф $K_{3,3}$ стога G_2 није планаран. $\square$

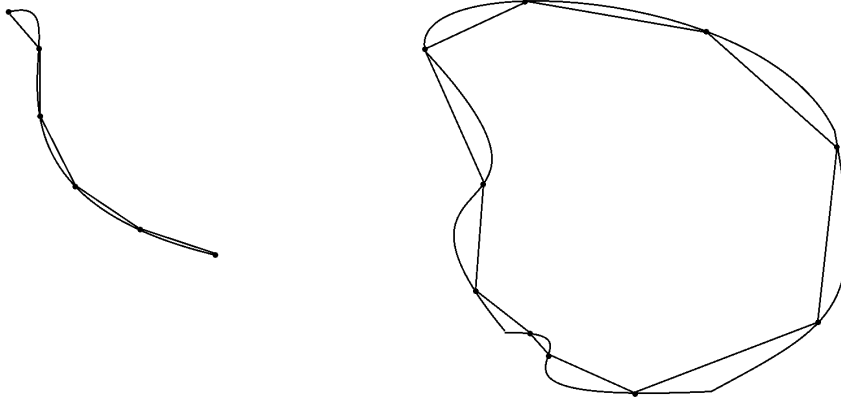
2.2 Затворене криве у равни и полигоне линије

Дефиниција 2.4. Затворена крива у равни је непрекидна функција $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ таква да је $u(0) = u(1)$. Криву u називамо простом ако она нема самопресека осим што се почетна и крајња тачка поклапају.

Теорема 2.2. (Жордан) Проста, затворена крива дели раван на две области, спољашњу и унутрашњу.

Полигонизација просте криве

Под полигонизацијом просте криве l подразумевамо низ тачака $A_1, A_2, \dots, A_n$ које припадају кривој l као и дужи $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$. Ако се ради о простој, затвореној кривој, онда узимамо $A_n = A_1$, као што можемо видети на примеру доле.



Приметимо да триангулацијом просте, затворене криве добијамо многоугао, који поново раван дели на две области: спољашњу и унутрашњу. Полигонизација представља апроксимацију криве. То нам може помоћи у решавању проблема као што је провера да ли задата тачка припада унутрашњој или спољашњој области које образује проста, затворена крива. Овде ћемо изложити један начин како да одговоримо на то питање уз две претпоставке везане за полигонизацију криве:

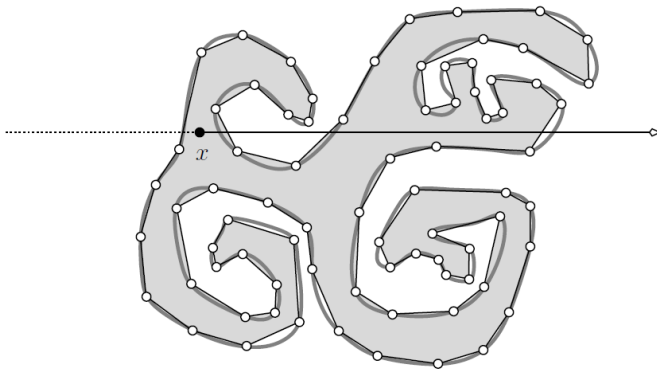
1. Не постоје три узастопна колинеарна темена полигонизације;
2. Ниједна два узастопна темена полигонизације не леже на истој хоризонтали.

Нека је сада дата тачка $X(x_1, x_2)$ која у равни која не лежи на полигону и обележимо полу-праву $Xp = \{(x, x_2) \mid x \geq x_1\}$. Нека су $A(a_1, a_2)$ и $B(b_1, b_2)$ два узастопна темена полигонизације и претпоставимо да важи $a_2 \leq x_2 < b_2$. Тада полуправа Xp сече ивицу AB ако је

$$\Delta(X, A, B) = \det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ 1 & a_1 & a_2 \\ 1 & b_1 & b_2 \end{bmatrix} > 0.$$

Да ли тачка X припада спољашњости или унутрашњости полигоне области утврђујемо на следећи начин:

Узмимо све ивице AB за које је $a_2 \leq x_2 < b_2$ и избројмо број оних за које је $\Delta(X, A, B) > 0$. Ако је овај број непаран, тачка X се налази у унутрашњости, а ако је паран у спољашњости полигоне области.



Напомена 2.3. Услов $a_2 \leq x_2 < b_2$ (прецизније, услов $x_2 < b_2$) узет је да не би дошло до дуплог бројања. Размотримо следећу ситуацију. Нека су $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ и $C(c_1, c_2)$ три узастопна темена полигонизације неке просте затворене криве и нека је $X(x_1, x_2)$ тачка која не припада полигонизацији. Претпоставимо даље да је $x_2 = b_2$ и $a_2 < x_2 < c_2$. Ако би важио услов $x_2 \leq b_2$ у горњем критеријуму

$\Delta(X, A, B) > 0$, $\Delta(X, B, C) > 0$ значи да би сматрали да полуправа Xp сече полигон два пута у истој тачки, што није тачно.

Дефиниција 2.5. Нека је $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ једна проста затворена крива. За плигонизацију те криве $A_1 A_2 \dots A_n$ кажемо да је равномерна ако важи $A_i = u(\frac{i}{n})$ за $i = 1, 2, \dots, n$.

Задатак 2.3. Дата је проста затворена крива $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ са $x \mapsto (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$. Одредити да ли тачка $X(-0.8, 0.1)$ припада унутрашњости ако криву апроксимирамо полигоном са 3 и са 4 темена која су равномерно постављена.

Решење. Размотримо први случај, када вршимо апроксимацију са 3 тачке. У том случају темена полигонизације су $A_1 = \gamma(\frac{1}{3}) = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $A_2 = \gamma(\frac{2}{3}) = (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$, $A_3 = \gamma(1) = (1, 0)$. Сада је

$$\Delta(X, A_2, A_1) = \det \begin{bmatrix} 1 & -0.8 & 0.1 \\ 1 & -0.5 & -0.866 \\ 1 & -0.5 & 0.866 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 0.3 & -0.966 \\ 0.3 & 0.766 \end{bmatrix} = 0.3(0.766 + 0.966) > 0$$

$$\Delta(X, A_3, A_1) = \det \begin{bmatrix} 1 & -0.8 & 0.1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -0.5 & 0.866 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1.8 & -0.1 \\ 0.3 & 0.766 \end{bmatrix} = 1.8 \cdot 0.766 + 0.03 > 0$$

Дакле, тачка X по овој апроксимацији не припада унутрашњој области криве γ .

У случају када апроксимацију вршимо са 4 тачке, темена су: $A_1 = \gamma(\frac{1}{4}) = (0, 1)$, $A_2 = \gamma(\frac{2}{4}) = (-1, 0)$, $A_3 = \gamma(\frac{3}{4}) = (0, -1)$, $A_4 = \gamma(\frac{4}{4}) = (1, 0)$ па имамо

$$\Delta(X, A_2, A_1) = \det \begin{bmatrix} 1 & -0.8 & 0.1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} -0.2 & -0.1 \\ 0.8 & 0.9 \end{bmatrix} = -0.18 + 0.08 = -0.1 < 0$$

$$\Delta(X, A_4, A_1) = \det \begin{bmatrix} 1 & -0.8 & 0.1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1.8 & -0.1 \\ 0.8 & 0.9 \end{bmatrix} = 1.8 \cdot 0.9 + 0.08 > 0$$

Дакле, по овој апроксимацији тачка X јесте у унутрашњој области криве

Ако би геометријски гледали, крива γ представља кружницу полупречника 1. Тачка X очигледно припада унутрашњој области те кружнице. Закључак који можемо да изведемо јесте да је апроксимација са 4 тачке боља од апроксимације са 3. $\square$

Задатак 2.4. Дата је проста затворена крива

$$\gamma(t) = \begin{cases} (2 \cos(3\pi t), 2 \sin(3\pi t)) & , t \in [0, \frac{1}{3}) \\ (\cos(3\pi t) - 1, \sin(3\pi t)) & , t \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \\ (-\cos(3\pi t) + 1, -\sin(3\pi t)) & , t \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$

Апроксимирати ову криву полигоном линијом са 6 равномерно постављених темена и испитати да ли тачка $X(-1.9, -0.9)$ припада унутрашњој области ове апроксимације.

Решење. Одредимо темена ове апроксимације: $A_1 = \gamma(\frac{1}{6}) = (0, 2)$, $A_2 = \gamma(\frac{2}{6}) = (-2, 0)$, $A_3 = \gamma(\frac{3}{6}) = (-1, -1)$, $A_4 = \gamma(\frac{4}{6}) = (0, 0)$, $A_5 = \gamma(\frac{5}{6}) = (1, -1)$, $A_6 = \gamma(\frac{6}{6}) = (2, 0)$.

Затим одређујемо број детерминанти позитивног знака:

$$\begin{aligned}\Delta(X, A_3, A_2) &= \det \begin{bmatrix} 1 & -1.9 & -0.9 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 0.9 & -0.1 \\ -0.1 & 0.9 \end{bmatrix} = 0.81 - 0.01 = 0.8 > 0 \\ \Delta(X, A_3, A_4) &= \det \begin{bmatrix} 1 & -1.9 & -0.9 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 0.9 & -0.1 \\ 1.9 & 0.9 \end{bmatrix} = 0.81 + 0.19 = 1 > 0 \\ \Delta(X, A_5, A_4) &= \det \begin{bmatrix} 1 & -1.9 & -0.9 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 2.9 & -0.1 \\ 1.9 & 0.9 \end{bmatrix} = 2.9 \cdot 0.9 + 1.9 \cdot 0.1 > 0 \\ \Delta(X, A_5, A_6) &= \det \begin{bmatrix} 1 & -1.9 & -0.9 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 2.9 & -0.1 \\ 3.9 & 0.9 \end{bmatrix} = 2.9 \cdot 0.9 + 3.9 \cdot 0.1 > 0\end{aligned}$$

Како је тај број паран (4 да будемо прецизнији) закључујемо да се тачка X не налази у унутрашњој области криве γ по овој апроксимацији. $\square$

3 Површи

Дефиниција 3.1. Многострукост димензије n је Хауздорфов простор M такав да свако $x \in M$ има неку околину $x \in U \subseteq M$ такву да је $U \approx \mathbb{R}^n$. Површ је многострукост димензије 2.

Пример 3.1. 1. Раван $\mathbb{R}^2$ је површ;

2. Торус $T = S^1 \times S^1$ јесте једна површ;

3. Мебијусова трака је површ;

4. Пројективна равна $\mathbb{R}P^2 = S^2 /_{x \sim -x} \approx D^2 /_{x \sim -x, x \in S^1}$ је површ.

Напомена 3.1. Присетимо се да је $\mathbb{R}^2 \approx I^2 = (-1, 1) \times (-1, 1)$. Уочимо наредни простор: $J = [0, 1) \times (-1, 1)$. Он ће нам служити за дефиницију површи са границом

Дефиниција 3.2. Површ са границом је простор X такав да за свако $x \in X$ постоји околина $x \in U \subseteq X$ таква да је $U \approx I^2$ или $U \approx J$. Уколико не постоји околина U таква да $U \approx J$ кажемо да је површ X без границе. У супротном кажемо да је X површ са границом.

Пример 3.2. 1. Цилиндар $C = S^1 \times [-1, 1]$ је површ са границом. Тачке $x \in S^1 \times \{-1, 1\}$ су тачке са границе тј. $\partial C = S^1 \times \{-1, 1\}$.

2. $\partial M \approx S^1$.

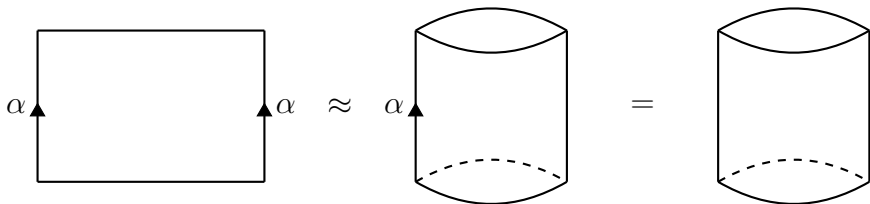
Став 3.1. Ако су X и Y површи са границом и ако је $X \approx Y$ онда је и $\partial X \approx \partial Y$.

Дефиниција 3.3. Затворена површ је компактна површ без границе.

3.1 Количнички модел површи

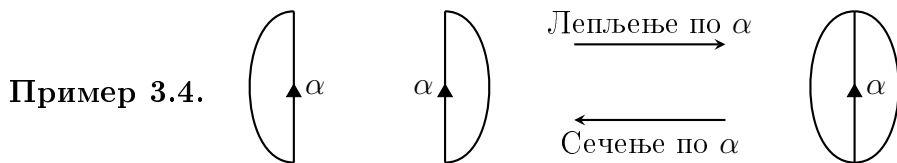
Неформално говорећи, количнички модел неке површи X представља низ многоуглова и правила како те многоуглове лепимо и/или сечемо по ивицама да би добили површ X . Ово ћемо најбоље разумети кроз примере:

Пример 3.3. Следећа илустрација представља количнички модел цилиндра:

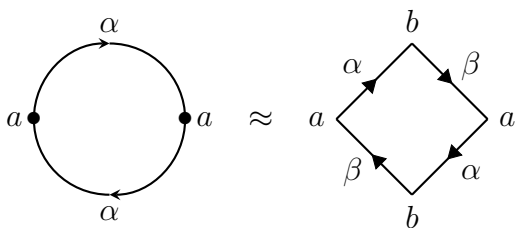


Објашњење: Замислимо да имамо правоугаоник који на левој и десној ивици има постављен рајсфершлус (линије α на левој слици). Када тај рајсфершлус закопчамо по α добијамо цилиндар као на слици десно.

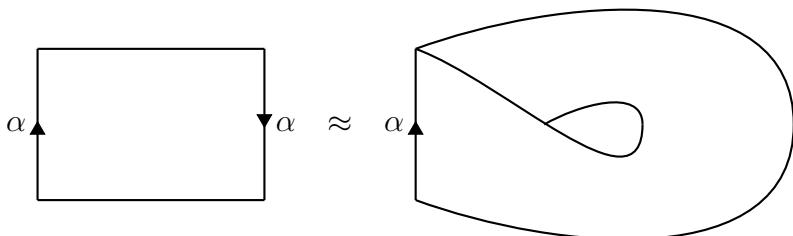
Ово је била илустрација лепљења. Такође можемо разматрати и операцију сечења при презентацији количничких модела:



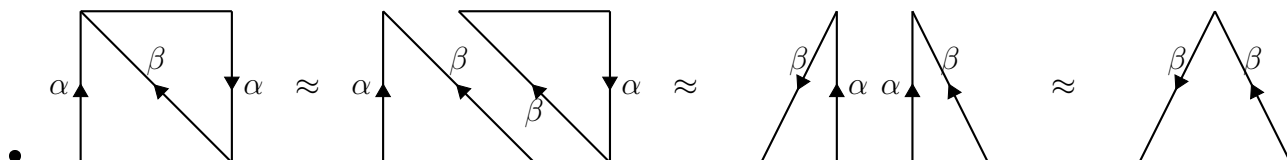
Пример 3.5. Пројективна равна $\mathbb{RP}^2$:

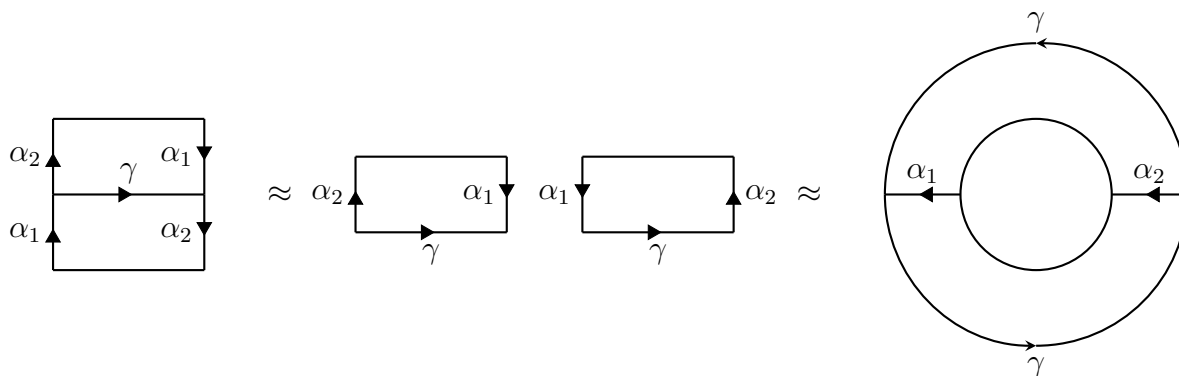


Пример 3.6. Мебијусова трака M



Лепљењем и сечењем можемо доћи до још еквивалентних количничких модела Мебијусове траке:

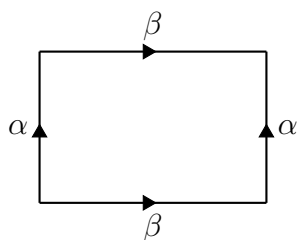




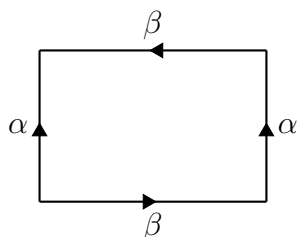
•

Одавде видимо да је заправо $M \approx \mathbb{R}P^2 \setminus D^2(0, \frac{1}{2})$.

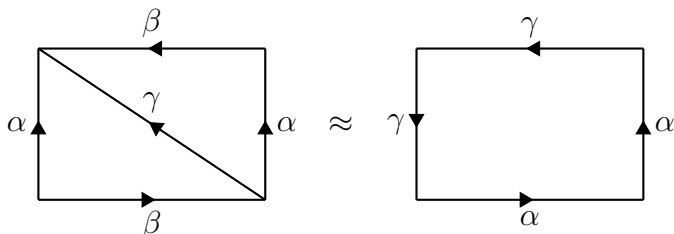
Пример 3.7. Торус T



Пример 3.8. Клајнова боца K .

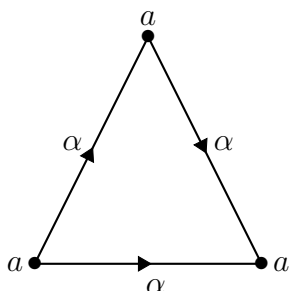


Алтернативно, Клајнову боцу можемо посматрати и као:



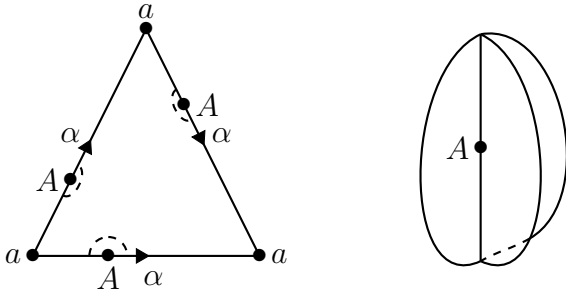
Клајнову боцу не можемо представити у тродимензионалном простору. Постоје 3D илустрације (погледати на интернету) где се види да Клајнова боца има самопресеке. Као што можемо видети са количничког модела, то није случај, али на илустрацији мора изгледати тако, јер не постоји утапање $K \subseteq \mathbb{R}^3$.

Задатак 3.1. Дат је количнички модел простора X :



Да ли је X хомеоморфан површи?

Решење. Уочимо тачку A која припада α и неку њену околину. Та околина има следећи облик:



Дакле, околина тачке A изгледа као тролисница. Оно што је још битније јесте да та околина није хомеоморфна отвореном диску тј. није хомеоморфна са $\mathbb{R}^2$, па X није површ. $\square$

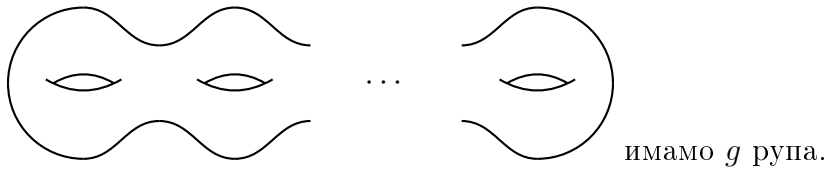
Напомена 3.2. За задатке овог типа, кључни детаљ јесте то што се α у количничком моделу појављује више од два пута. Генерално, ако се α појављује n пута у количничком моделу, онда тачке са α имају n -толисну околину, па самим тиме тај простор не може бити површ.

3.2 Класификација затворених површи

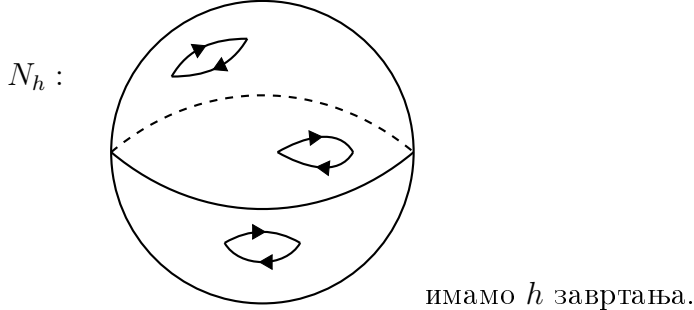
Затворене површи делимо на оријентабилне и неоријентабилне:

1. Оријентабилне:

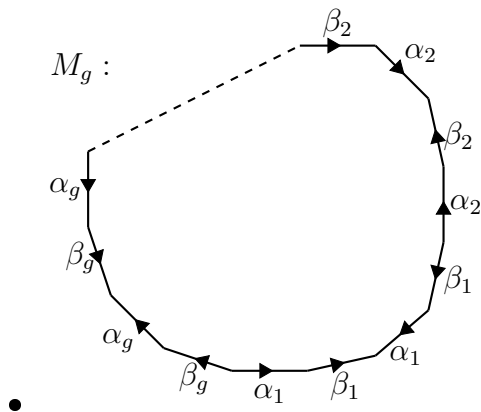
$M_g :$

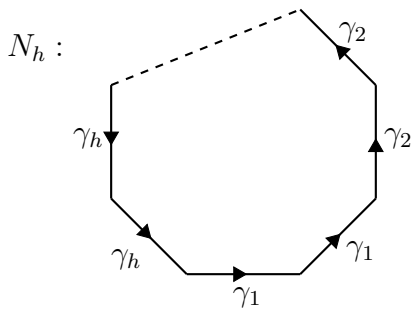


2. Неоријентабилне:



Количнички модели:





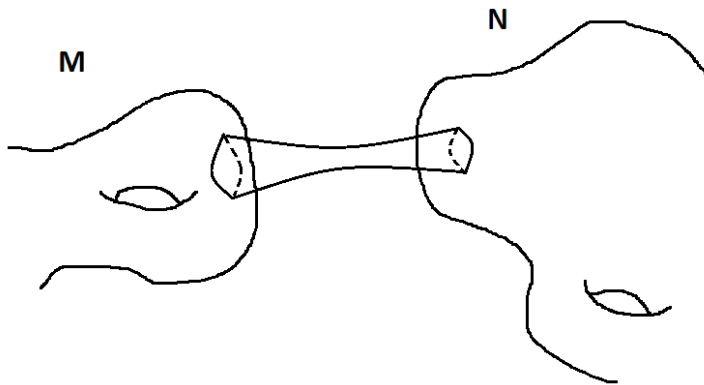
Пример 3.9. Приметимо да је $M_0 \approx S^2$, $M_1 \approx T$, као и $N_1 \approx \mathbb{R}P^2$, $N_2 \approx K$.

Дефиниција 3.4. Ојлерова карактеристика затворене површи X , у ознаци $\chi(X)$ дефинише се на следећи начин:

- $\chi(M_g) = 2 - 2g$;
- $\chi(N_h) = 2 - h$.

3.3 Повезана сума (спајање) површи

Ако су M и N површи, онда њихову повезану суму, $M \boxtimes N$, добијамо на следећи начин:

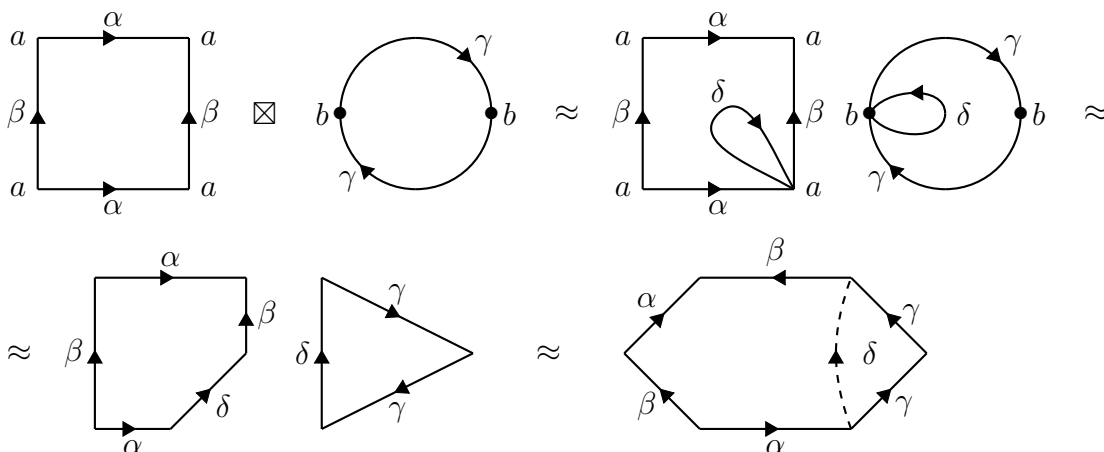


Став 3.2. За повезану суму важе наредна правила:

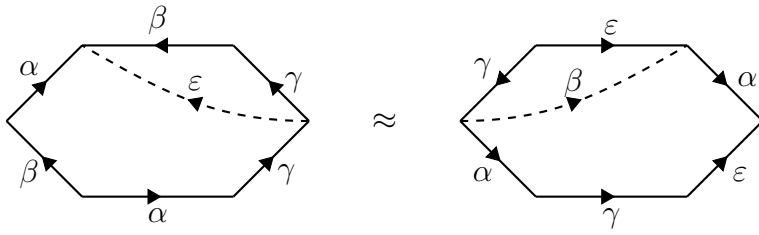
1. $M_{g_1} \boxtimes M_{g_2} \approx M_{g_1+g_2}$;
2. $N_{h_1} \boxtimes N_{h_2} \approx N_{h_1+h_2}$;
3. $M_g \boxtimes N_h \approx N_{2g+h}$.

Задатак 3.2. Показати да је $T \boxtimes \mathbb{R}P^2 \approx N_3$.

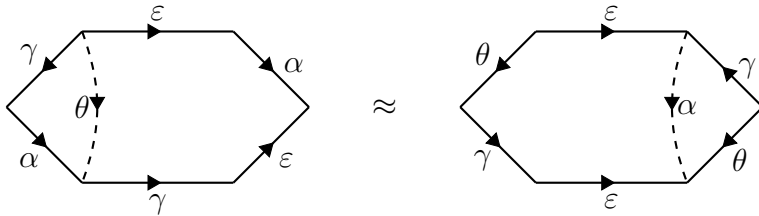
Решење. Користимо количничке моделе:



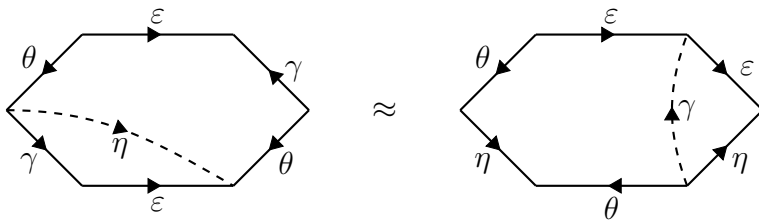
Сада сечемо по новој линији ε и лепимо по β , где је:



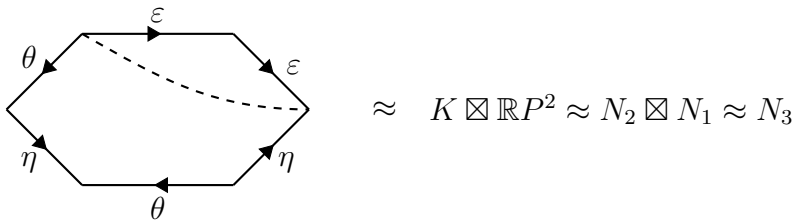
Затим сечемо по θ и лепимо по α , где је:



Коначно, сечемо по η и лепимо по γ где је:

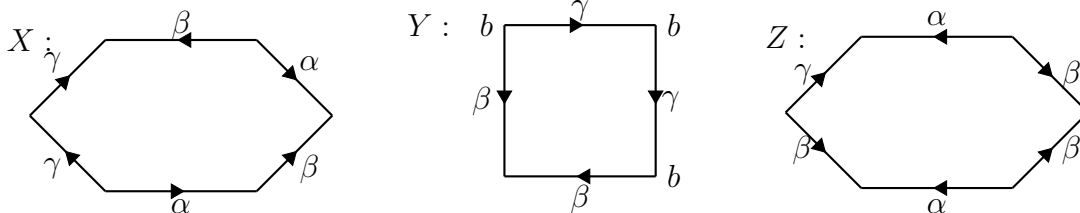


Коначно, приметимо да је ово повезана сума Клајнове боце и пројективне равни:



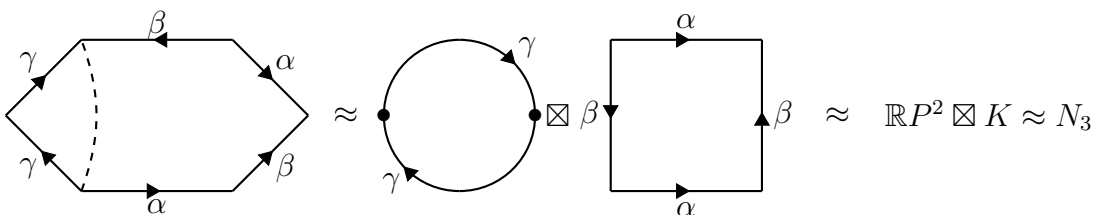
□

Задатак 3.3. (Јул 2024) Дати су количнички модели у равни простора X , Y и Z . Који од ових простора су хомеоморфни некој затвореној површи, и колика је Ојлерова карактеристика те површи?



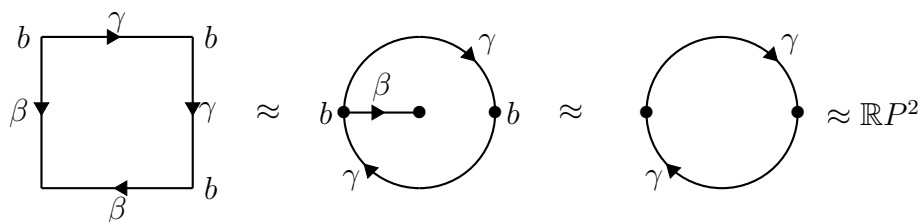
Решење. Кренимо редом:

• X :



Дакле, X јесте хомеоморфан површи N_3 .

• Y :

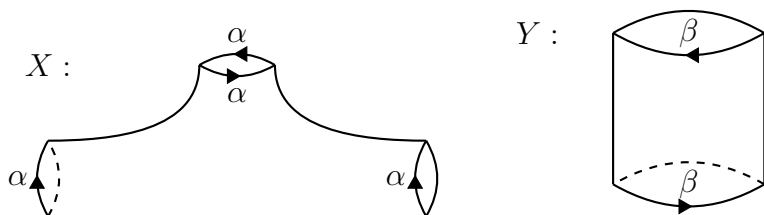


И простор Y је хомеоморфан затвореној површи, N_1 ;

- Код простора Z можемо приметити да се β појављује 3 пута, те Z не може бити хомеоморфан затвореној површи.

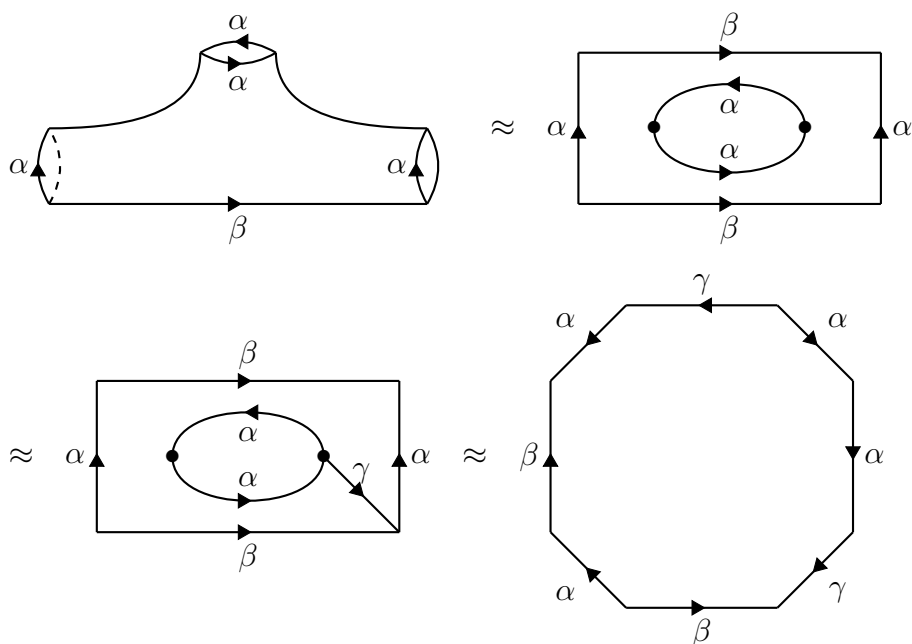
□

Задатак 3.4. (Септембар 1, 2024) Задати су следећи тополошки простори:

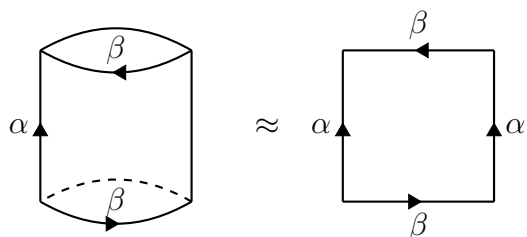


1. Нађи неки количнички модел за просторе X и Y ;
2. Да ли је неки од ових простора хомеоморфан некој затвореној површи?

Решење. 1. • X :



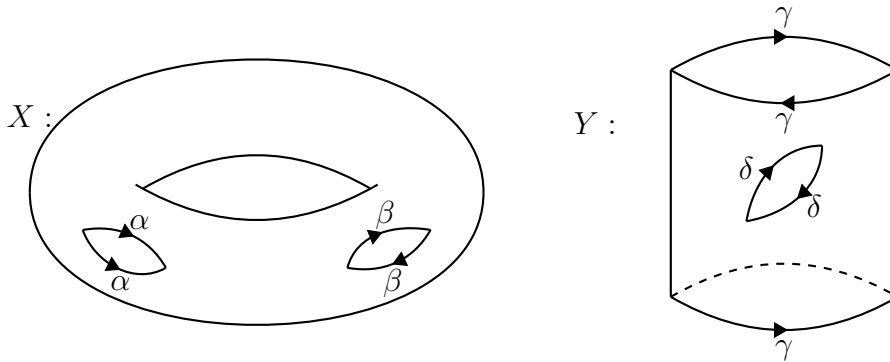
• Y :



2. Видимо да се у количничком моделу простора X α појављује 4 пута, што значи да X није хомеоморфан затвореној површи, док на основу количничког модела простора Y видимо да је он хомеоморфан Клајновој боци тј. површи N_2 .

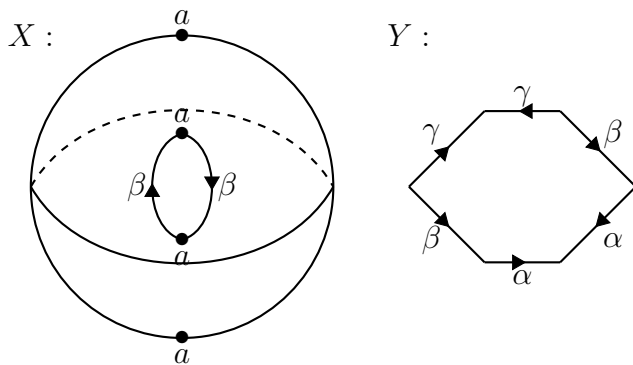
□

Вежба 3.1. Задати су следећи тополошки простори:



Да ли је неки од ових простора хомеоморфан некој затвореној површи?

Вежба 3.2. Дати су следећи тополошки простори:



1. Нађи неки количнички модел простора X .
2. Посматрајући околинду тачке a утврдити да ли X може бити површ или не.
3. Да ли је простор Y еквивалентан некој затвореној површи и ако јесте одредити којој?

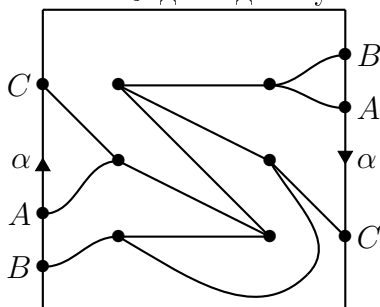
3.4 Утапање графова

У секцији о графовима упознали смо се са појмом планарног графа тј. графа који може да се утопи у раван. Ако то није случај, граф називамо непланарним. Међутим, непланарни графови се можда могу утопити у неке друге површи, и то је тема ове подсекције.

Граф утапамо у површ тако што налазимо утапање на количничком моделу те површи.

Задатак 3.5. Нађи утапање графа $K_{3,3}$ у Мебијусову траку.

Решење. Једно од могућих решења је следеће:



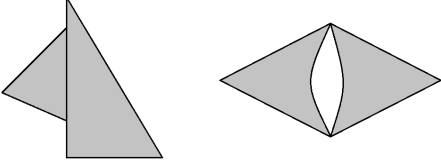
□

Вежба 3.3. Нађи једно утапање графа K_5 на Клајновој боци.

3.5 Триангулација површи

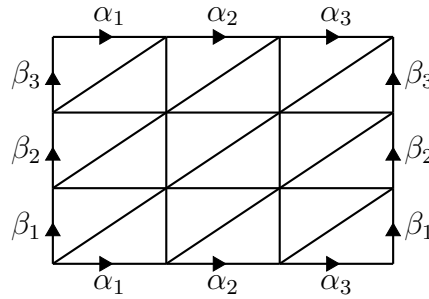
Дефиниција 3.5. Триангулација површи X јесте подела површи X на троугаоне области. Троугаоне области могу међусобно делити теме или могу имати заједничку страну. Ако стране два троугла имају више од једне заједничке тачке, онда они морају делити целу страну.

Напомена 3.3. На слици доле можете видети примере троуглова који не могу бити део триангулације површи.

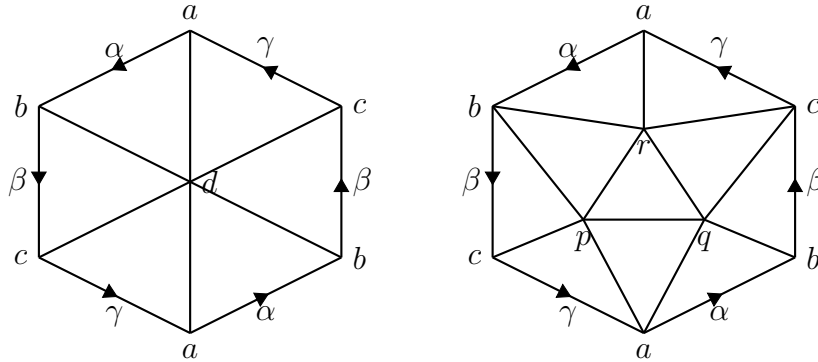


У првом случају, страна једног троугла је подскуп друге, што не долази у обзир, јер троуглови морају да деле страну. У другом случају, стране троугла имају више од једне заједничке тачке, па морају делити целу страну.

Пример 3.10. Једна добра триангулација торуса представљана је на следећој слици



Пример 3.11. Дата је триангулација пројективне равни, тј. површи N_1 на слици доле лево



Међутим, ова триангулација није добра. Ако погледамо два троугла bcd из те триангулације видимо да они имају заједничку ивицу bc и теме d , што ову триангулацију не чини добром по дефиницији. Добра триангулација може се видети на истој слици десно.

Дефиниција 3.6. Нека је K триангулација површи X (тј. K је скуп троуглова). Нека је t број темена, s број страна, а i број ивица ове триангулације. Ојлерову карактеристику површи X и њене триангулације K дефинишемо као број $\chi(K) = t - i + s$.

Напомена 3.4. Триангулација површи X није јединствена. На пример, тетраедар и октаедар представљају две триангулације сфере S^2 . Већа триангулација нам је потребна на пример у рачунарској графичи да би што веродостојније представили објекте, док је пак, при израчунавању појединих карактеристика простора добро имати мању триангулацију.

Став 3.3. Ојлерова карактеристика не зависи од избора триангулације површи.

Став 3.4. Нека је X затворена површ и K њена триангулација. Тада је $\chi(X) = \chi(K)$, где је $\chi(X)$ Ојлерова карактеристика из Дефиниције 3.4.

Одређивање типа површи на основу триангулације

Ако нам је задата триангулација површи и знамо да је у питању компактна затворена површ без границе (тј. површ M_g или N_h) онда на основу триангулациј можемо одредити о којој површи је реч. Наиме довољно је да знамо две ствари:

1. Оријентабилност;
 2. Ојлерова карактеристика.
1. Ако је површ оријентабилна знамо да је она облика M_g , а у случају да није онда је облика N_h .
 2. Означимо Ојлерову карактеристику површи са χ . На основу претходног, ако је површ оријентабилна онда добијамо $\chi = 2 - 2g$ тј. $g = \frac{2-\chi}{2}$, те је у питању површ $M_{\frac{2-\chi}{2}}$. У случају да је површ неоријентабилна имамо $\chi = 2 - h$, $h = 2 - \chi$ па је у питању површ $N_{2-\chi}$.

Пример 3.12. Утврдимо на основу (добре) триангулације из Примера 3.11 да се заиста ради о пројективној равни (површи N_1). Као што смо напоменули, потребно је утврдити оријентацију и одредити Ојлерову карактеристику.

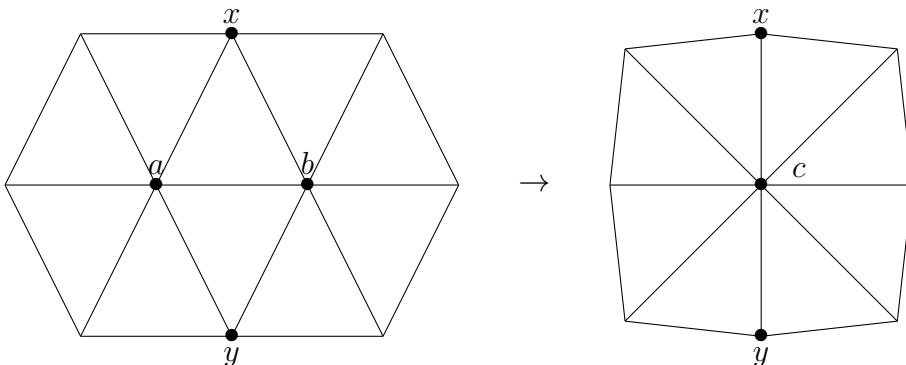
1. Кренимо од оријентације било ког троугла. Оријентишимо десни троугао bcr (**напомена:** редоследом темена утврђујемо оријентацију. Другим речима bcr и brc нису исте оријентације: једна иде у правилном математичком смеру, док друга иде у смеру казаљке на сату, што је математички негативан смер. С тим у вези, bcr и crb представљају исту оријентацију троугла). Сада све троуглове са којима bcr дели страницу оријентишимо тако да те оријентације буду усаглашене. Нпр. троугао доле лево ће имати оријентацију arc (из оријентације bcr имамо оријентацију странице cr , што значи да у троуглу arc она мора бити оријентисана супротно, тј. мора бити rc , што је и случај). Затим имамо оријентације aqr , abq и bcq . Међутим оријентације bcr и bcq нису усаглашене (у оба случаја имамо bc) те површ није оријентабилна.
2. У датој триангулацији имамо $t = 6$ темена, $i = 15$ ивица и $s = 10$ страна, те је Ојлерова карактеристика $\chi = 6 - 15 + 10 = 1$.

Како је у питању неоријентабилна површ, закључујемо да је $h = 2 - \chi = 1$. Коначно, ради се о површи N_1 , што је био и очекивани резултат.

Вежба 3.4. На основу триангулације из Примера 3.10 закључити да се заиста ради о торусу (површи M_1).

Редукција триангулације:

Триангулација површи веома је битна у математици као и у програмирању. Она нам омогућава да правимо алгоритме за израчунавање различитих карактеристика површи (о чему ће још бити речи у наставку). Наравно, веће триангулације захтевају већу рачунску моћ, због чега је природно размишљати о оптимизацији триангулације. Један пример дат је на наредној слици:



У овом примеру контраковали смо страницу ab , коју смо обележили тачком c у новој триангулацији. Нажалост, ова операција некада може имати нежељене ефекте. На пример, тетраедар јесте једна триангулација сфере, али ако контракујемо било коју страницу тетраедра добићемо неадекватну триангулацију. Несмотрено контраковање ивица у триангулацији може довести и до промене тополошког типа простора.

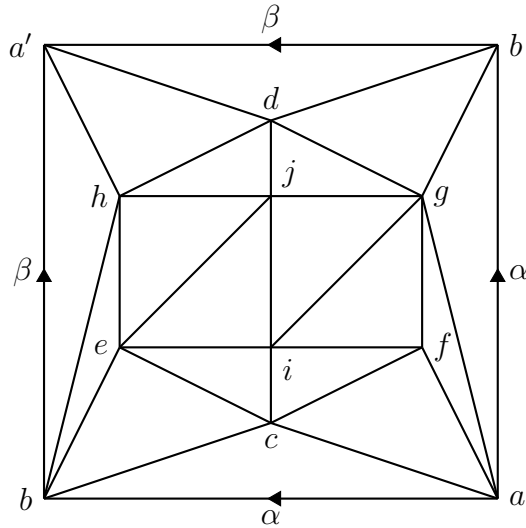
Дефиниција 3.7. Нека је K триангулација неке површи и нека је ab једна страница те триангулације. Повезаност странице ab , као и повезаност темена a у триангулацији представљају скупови:

- $\text{Lk}(ab) = \{x \in K \mid abx \in K\}$;
- $\text{Lk}(a) = \{x, xy \mid ax, axy \in K\}$.

Лема 3.1. Нека је K триангулација неке површи и нека је ab страница те триангулације. Нека је L триангулација добијена контраковањем странице ab . Триангулације K и L имају исти тополошки тип ако је

$$\text{Lk}(ab) = \text{Lk}(a) \cap \text{Lk}(b)$$

Задатак 3.6. Задата је триангулација неке затворене површи као на слици доле

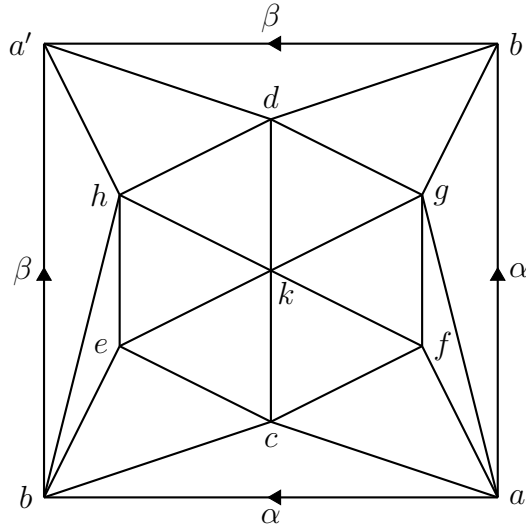


Редуковати триангулацију бар 5 пута тј. редуковати бар 5 ивица триангулације а затим одредити о којој површи је реч.

Решење. Приметимо да је

$$\begin{aligned}\text{Lk}(i) &= \{c, e, f, g, j, ce, cf, fg, gj, ej\}, \\ \text{Lk}(j) &= \{d, e, g, h, i, dg, dh, gi, eh, ei\}, \\ \text{Lk}(ij) &= \{e, g\},\end{aligned}$$

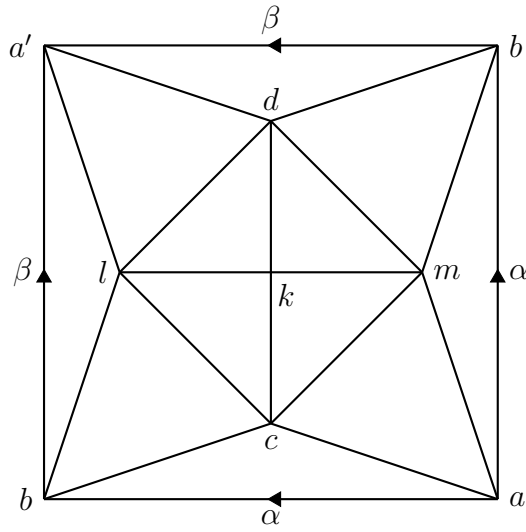
одакле закључујемо да је $\text{Lk}(ij) = \text{Lk}(i) \cap \text{Lk}(j)$, тј. ивицу ij можемо да контракујемо и заменимо теменом k . Тиме добијамо наредну триангулацију



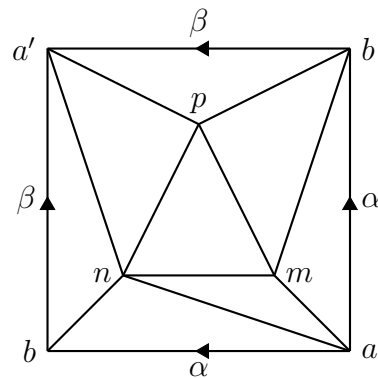
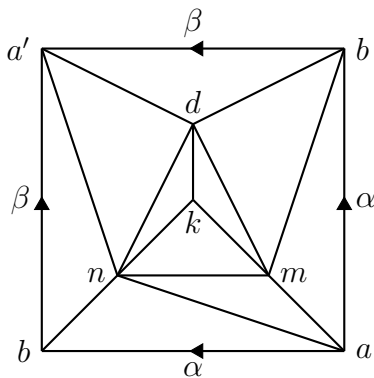
Додатно, приметимо да је

$$\begin{aligned} \text{Lk}(e) &= \{b, c, h, k, bc, bh, ck, hk\}, \\ \text{Lk}(h) &= \{a', b, e, k, d, a'b, a'd, be, ek, dk\}, \\ \text{Lk}(eh) &= \{b, k\}, \\ \text{Lk}(eh) &= \text{Lk}(e) \cap \text{Lk}(h) \end{aligned}$$

тако да и ивицу eh можемо да контракујемо и заменимо теменом l , као и да ивицу gf заменимо теменом m аналогним поступком. Сада наша триангулација изгледа овако



Даље можемо контраковати ивицу cl и заменити је теменом n (слика доле лево) а затим ивицу dk заменити теменом p (слика доле десно). Тиме смо контраковали 5 ивица.



Сада када смо завршили са процесом редукције триангулације можемо приступити одређивању типа површи. Као и раније почињемо са одређивање оријентабилности.

Почнимо са одабиром оријентације било ког троугла. Оријентацију осталих троуглова бирамо на основу оријентације првог троугла: $a'bn, ban, amn, abm, bpn, mpn, ba'p, a'np$. Видимо да су све оријентације усаглашене (тј. у овом процесу једино треба проверити сагласност оријентација троуглова који деле страну која се лепи, у овом случају α и β). То су парови троуглова ban, abm и $a'bn, ba'p$). Дакле, ради се о оријентабилној површи.

Број темена у триангулацији је $t = 6$, број ивица $i = 12$ док је број страна $s = 8$. Ојлерова карактеристика је $\chi = t - i + s = 6 - 12 + 8 = 2 = 2 - 2g$ одакле следи $g = 0$. Дакле ради се о површи M_0 тј. о сфери S^2 . $\square$

4 Хомологија тополошких простора

Хомологија тј. хомолоше групе тополошких простора представљају алгебарску инваријанту простора. На основу њих можемо да вршимо грубу класификацију простора као и да имамо увид о појединим специфичностима простора. Погодна ствар је што је хомологија програмабилна. Постоје алгоритми, а самим тиме и програми који израчунавају хомолошке групе задатог простора. Хомологија има широке примене ван и саме математике. Конкретно, перзистентна хомологија користи се у сфери машинског учења, медицине, биологији и хемији, и упознавање са њом представља крајњи циљ овог курса.

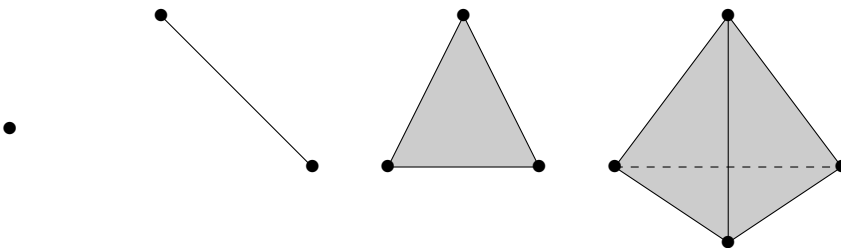
4.1 Симплицијални комплекси

Симплекси:

Дефиниција 4.1. Нека су $u_0, u_1, \dots, u_k \in \mathbb{R}^d$. Тачку $x = \sum_{i=0}^k \lambda_i u_i$ за $\lambda_i \in \mathbb{R}$ називамо *афином комбинацијом* ако $\sum_{i=0}^k \lambda_i = 1$. За тачке $u_0, u_1, \dots, u_k$ кажемо да су афино независне ако су вектори $u_1 - u_0, u_2 - u_0, \dots, u_k - u_0$ линеарно независни. Афино комбинацију зовемо конвексном комбинацијом ако су сви $\lambda_i \geq 0$.

Дефиниција 4.2. k -Симплекс σ јесте конвексни омотач тј. скуп свих конвексних комбинација $k + 1$ афино независних тачака и пишемо $\sigma = \text{conv}\{u_0, u_1, \dots, u_k\}$. Димензија симплекса у том случају је $\dim \sigma = k$.

Пример 4.1. На наредној слици налазе се симплекси димензије 0, 1, 2 и 3 редом.



Дефиниција 4.3. Ако је $\sigma = \text{conv}\{u_0, u_1, \dots, u_k\}$ један симплекс и $\{u_{j_0}, u_{j_1}, \dots, u_{j_l}\} \subseteq \{u_0, u_1, \dots, u_k\}$. Онда је $\tau = \text{conv}\{u_{j_0}, u_{j_1}, \dots, u_{j_l}\}$ страна симплекса σ и пишемо $\tau \leq \sigma$.

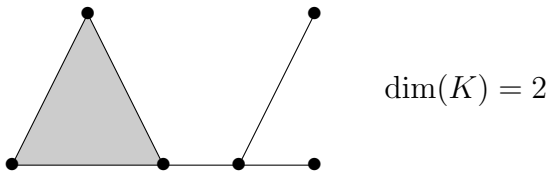
Напомена 4.1. Можемо приметити да је страна симплекса такође један симплекс. Такође, страна симплекса је прилично природан појам. Као што можемо видети у претходном примеру, тетраедар јесте један симплекс, а страна тетраедра је заиста страна симплекса.

Дефиниција 4.4. • Симплицијални комплекс је коначна колекција симплекса K таква да ако је $\sigma \in K$ и $\tau \leq \sigma$ онда и $\tau \in K$. Додатно, ако $\sigma_1, \sigma_2 \in K$ онда је $\sigma_1 \cap \sigma_2$ или празан или је страна оба симплекса.

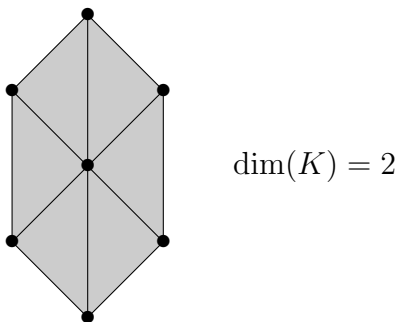
- Поткомплекс L симплицијалног комплекса K , у ознаци $L \leq K$ је подскуп $L \subseteq K$ који је уједно и симплицијални комплекс.
- Димензија симплицијалног комплекса K , у ознаци $\dim(K)$ дефинишемо као максималну вредност димензије његових симплекса.

Пример 4.2. Неки примери симплицијалних комплекса и њихових димензија:

1. K :



2. K :



Напомена 4.2. Као што можемо приметити, са симплицијалним комплексима смо се већ сретали и то онда када смо дефинисали триангулацију неке површи. Наиме, триангулација је ништа друго до симплицијални комплекс.

Апстрактни симплицијални комплекси:

Дефиниција 4.5. Апстрактни симплицијални комплекс јесте коначна колекција скупова A таква да ако $\alpha \in A$ и $\beta \subseteq \alpha$ онда и $\beta \in A$. Димензију апстрактног симплекса тј. скупа $\alpha \in A$ одређујемо као $\dim(\alpha) = \text{card}(\alpha) - 1$.

Геометријска реализација:

Нека је A апстрактни симплицијални комплекс. Онда њему можемо придружити симплицијални комплекс $|A|$ тако што тачкама тј. 0-симплексима представимо апстрактне симплексе димензије 0, затим дужима тј. 1-симплексима спајамо она темена за које постоје 1-апстрактни симплекси тј. 2-члани скупови чији елементи представљају темена која спајамо итд.

Став 4.1. Сваки апстрактни симплицијални комплекс димензије d има геометријску реализацију у $\mathbb{R}^{2d+1}$.

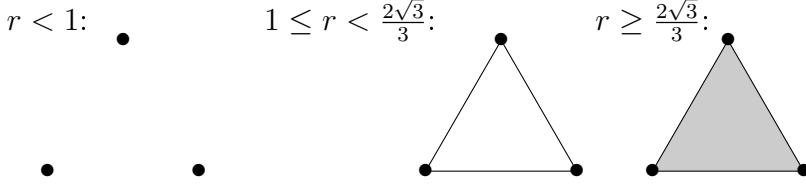
Пример 4.3. Нека је $A = \{\{a, b, c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \}$ један апстрактни симплицијални комплекс. Видимо да је његова геометријска реализација заправо троугао, чија су темена одређена са $\{a\}, \{b\}, \{c\}$.

Нека до краја ове секције S представља неки скуп тачака у простору $\mathbb{R}^d$ и $r \in \mathbb{R}, r > 0$. Можемо дефинисати следеће апстрактне симплицијалне комплексе:

Чехов комплекс:

$$\check{C}ech(r) = \{\sigma \subseteq S \mid \bigcap_{x \in \sigma} B(x, r) \neq \emptyset\}$$

Пример 4.4. Нека је $S = \{(0, 0), (2, 0), (1, \sqrt{3})\}$. Тада је Чехов комплекс у зависности од r :

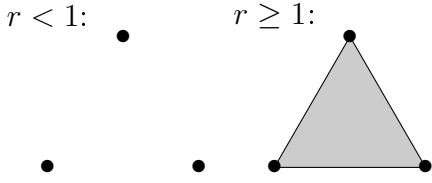


Виеторис-Рипс комплекс:

$$VR(r) = \{\sigma \subseteq S \mid \text{diam}(\sigma) \leq 2r\}$$

Лема 4.1. Важи $VR(r) \leq \check{\text{Cech}}(\sqrt{2}r)$.

Пример 4.5. Нека је S исти скуп тачака као у претходном примеру. Тада је $VR(r)$ у зависности од r :



Филтрација:

Без обзира на то за који смо се тип комплекса одлучили, полазећи од скупа тачака S и повећавајући параметар r од 0 до $+\infty$ добијамо низ комплекса $K_0 \subseteq K_1 \subseteq K_2 \subseteq \dots \subseteq K_m$. Овај низ комплекса зовемо филтрацијом, и она ће увек бити коначна. Битност овакве филтрације комплекса видећемо касније, када будемо изучавали перзистентну хомологију.

4.2 Ланчasti комплекси

Дефиниција 4.6. Ланчasti комплекс $(C_\bullet, d_\bullet)$ је колекција Абелових група $C_\bullet = \{C_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ заједно са фамилијом пресликавања $d_\bullet = \{d_n : C_n \rightarrow C_{n-1}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ тако да је $d_{n-1} \circ d_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. Пресликавања фамилије $d_\bullet$ зовемо диференцијалима.

Пример 4.6. Примери ланчастих комплекса могу бити:

1. $\dots \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \dots;$
2. $\dots \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{2\times} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{2\times} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \dots;$
3. $\dots \xrightarrow{2\times} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{2\times} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{2\times} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{2\times} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{2\times} \dots;$
4. $\dots \xrightarrow{2\times} \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \xrightarrow{3\times} \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \xrightarrow{2\times} \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \xrightarrow{3\times} \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \xrightarrow{2\times} \dots;$

Дефиниција 4.7. Нека је $(C_\bullet, d_\bullet)$ ланчasti комплекс и $p \in \mathbb{Z}$. Дефинишимо групе $Z_p = \text{Ker}(d_p)$ које називамо p -циклозима и $B_p = \text{Im}(d_{p+1})$ као p -границе. Како је $d_p \circ d_{p+1} = 0$ то је $B_p \leq Z_p$.

Последица 4.1. Како је $d_p \circ d_{p+1} = 0$ то је $B_p \leq Z_p \leq C_p$.

Дефиниција 4.8. Хомолошке групе ланчастог комплекса $(C_\bullet, d_\bullet)$ дефинишимо као $H_p(C_\bullet) = Z_p/B_p$;

Задатак 4.1. Одредити хомолошке групе ланчастих комплекса из примера 4.6

Решење. 1. Како је $d_p = 0$, $\forall p \in \mathbb{Z}$, то је $Z_p = \mathbb{Z}$ и $B_p = 0$ па је $H_p = \mathbb{Z}/0 = \mathbb{Z}$;

2. За $d_p = 0$ је $Z_p = \mathbb{Z}$, док је $d_{p+1}(x) = 2x$ те је $B_p = 2\mathbb{Z}$, па је $H_p = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Даље, за $d_p(x) = 2x$ и $d_{p+1} = 0$ је $Z_p = 0$ и $B_p = 0$, па је и $H_p = 0$;

3. $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \cong \{0, 1, 2, 3\}$ као скуп, па је $Z_p = \{0, 2\} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ и $B_p = \{0, 2\} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, па је $H_p = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$;
4. $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \cong \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ као скуп, те је за $d_p(x) = 2x$, $Z_p \cong \{0, 3\}$ и $B_p \cong \{0, 3\}$, па је $H_p = 0$.
Даље, за $d_p(x) = 3x$ је $Z_p \cong \{0, 2, 4\}$ и $B_p \cong \{0, 2, 4\}$, те је поново $H_p = 0$.

□

Напомена 4.3. Довољно је знати шта се дешава са генераторима група да бисмо могли да израчунамо хомолошке групе.

Пример 4.7. Дат је наредни ланчasti комплекс:

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}[\sigma] \xrightarrow{d_2} \mathbb{Z}[\alpha, \beta] \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z}[a] \xrightarrow{d_0} 0$$

где је $d_0(a) = 0$, $d_1(\alpha) = d_1(\beta) = 0$ и $d_2(\sigma) = 2\beta$.

Пресликавања d_0 и d_1 су тривијална јер је слика генератора тривијална те је $Z_0 = \mathbb{Z}[a]$, $B_0 = 0$, одакле је $H_0 = \mathbb{Z}[a]/0 \cong \mathbb{Z}$. Даље, $Z_1 = \mathbb{Z}[\alpha, \beta]$ јер се генератори сликају у нулу.

Додатно, $B_1 = \mathbb{Z}[2\beta]$, па је $H_1 = \mathbb{Z}[\alpha, \beta]/\mathbb{Z}[2\beta] = \mathbb{Z}[\alpha, \beta \mid 2\beta = 0] \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Како је слика генератора σ нетривијална, и како је то и једини генератор за C_2 , то је $Z_2 = 0$, јасно је да је $B_2 = 0$ па је и $H_2 = 0$.

Напомена 4.4. Веровали или не, горњи пример представља хомолошке групе Клајнове боце K .

4.3 Хомологија симплицијалних комплекса

Нека је K симплицијални комплекс, $p \in \mathbb{N}_0$ и G група.

Дефиниција 4.9. p -Ланац c са коефицијентима у G је формална сума p -симплекса. Другим речима, $c = \sum_{i=1}^k a_i \sigma_i$, σ_i је p -симплекс, $a_i \in G$. За два p -ланца $c_1 = \sum_{i=1}^k a_i \sigma_i$ и $c_2 = \sum_{i=1}^k b_i \sigma_i$ дефинишимо $c_1 + c_2 = \sum_{i=1}^k (a_i + b_i) \sigma_i$, као и $0 = \sum_{i=1}^k 0 \sigma_i$. Обележимо са C_p групу p -ланаца дефинисану на овај начин.

Нека су $u_0, u_1, \dots, u_p$ темена (не нужно сва) симплицијалног комплекса K (тј. то су 0-симплекси). Нека је $\sigma = [u_0, u_1, \dots, u_p]$ p -симплекс разапет теменима $u_0, u_1, \dots, u_p$. Дефинишимо пресликавање $d_p : C_p \rightarrow C_{p-1}$ на следећи начин:

$$d_p(\sigma) = \sum_{i=0}^p (-1)^i [u_0, u_1, \dots, \hat{u}_i, \dots, u_p]$$

где под $[u_0, u_1, \dots, \hat{u}_i, \dots, u_p]$ означавамо да избацујемо u_i тј. $[u_0, u_1, \dots, \hat{u}_i, \dots, u_p] = [u_0, u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_p]$.

За $p < 0$ и $p > \dim(K)$ важи да је $C_p = 0$, као и $d_p = 0$.

Лема 4.2. *Фамилија група и пресликавања $(C_\bullet, d_\bullet)$ дефинисаних као горе представљају један ланчasti комплекс.*

Дефиниција 4.10. Хомолошке групе симплицијалног комплекса K дефинишимо као хомолошке групе ланчастог комплекса одређеног са K .

4.4 Рачунање хомологије са коефицијентима $\mathbb{Z}_2$

У овом делу, па и надале обележавамо $\mathbb{Z}_2 := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Када кажемо хомологија са коефицијентима $\mathbb{Z}_2$ или $\mathbb{Z}$ мислимо на случај када за групу G из претходног дела узмемо $G = \mathbb{Z}_2$.

У овом случају, све групе C_p , Z_p и B_p биће уједно и векторски простори. Уведимо ознаке:

$$\begin{aligned} n_p &= \dim(C_p); \\ z_p &= \dim(Z_p) = \dim(\text{Ker}(d_p)); \\ b_p &= \dim(B_p) = \dim(\text{Im}(d_p)); \end{aligned}$$

Другим речима, n_p је број p -симплекса. Такође, мора да важи $n_p = z_p + b_{p-1}$.

Нумерацијом 0-симплекса можемо увести поредак темена, који нам даље даје поредак свих симплекса. Посматрајмо матрицу $D_p = [\delta_{ij}]_{1 \leq i \leq n_{p-1}, 1 \leq j \leq n_p}$, где је $\delta_{ij} = 1$ ако је i -ти $(p-1)$ -симплекс страна j -тог p -симплекса и $\delta_{ij} = 0$ иначе.

Алгоритам редукције:

За рачунање хомологије симплицијалних комплекса користимо модификовану верзију онога што се у литератури зове алгоритам редукције:

Нека је $x = 1$ и нека је $V_p = E_p$ (тј. V_p је јединична матрица димензије n_p) и $S_p = D_p$ за почетак. Кренимо наредним корацима:

1. Нека је $y = \min\{1, 2, \dots, n_p \mid y\text{-колона није маркирана и } \delta_{xy} = 1\}$;
2. Ако је $\delta_{xj} = 0$ за $j = 1, 2, \dots, n_p$ и $j \neq y$ онда додајемо колону y на колону j у матрицама S_p и V_p ;
3. Маркирамо колону y и $x := x + 1$;
4. Ако је $x \leq n_{p-1}$ вратимо се на први корак. У супротном смо завршили.

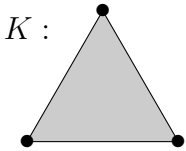
Након овог алгоритма добијамо две матрице: S_p коју смо добили од матрице D_p и матрицу V_p такве да је $D_p = S_p V_p$. Како њих користимо?

- Ненула колоне матрице S_p представљају базу за B_{p-1} ;
- Нула колоне представљају језгро од d_p тј Z_p . Генератори језгра представљају колоне матрице V_p које одговарају нула колонама матрице S_p .

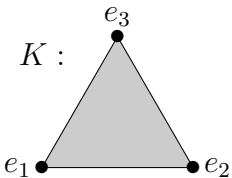
Дефиниција 4.11. Нека је K симплицијални комплекс. Дефинишимо $\beta_p = \text{rank } H_p(K) = z_p - b_p$. Ојлерова карактеристика симплицијалног комплекса K је $\chi(K) = \sum_{p \in \mathbb{N}_0} (-1)^p \beta_p$

Напомена 4.5. Приметимо да је $\chi(K) = \sum_{p \in \mathbb{N}_0} (-1)^p n_p$.

Задатак 4.2. Одредити хомолошке групе симплицијалног комплекса са слике у коефицијентима $\mathbb{Z}_2$.



Решење. За почетак обележимо темена (тј. 0-симплексе) овог комплекса.



Даље можемо обележити $l_1 = [e_1, e_2]$, $l_2 = [e_1, e_3]$, $l_3 = [e_2, e_3]$ и $\sigma = [e_1, e_2, e_3]$. Од свих, само су пресликавања d_1 и d_2 нетривијална и њихове одговарајуће матрице су:

$$D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Код матрице D_2 немамо шта да радимо. Како имамо само једну не нула колону, то је $Z_2 = 0$ и $B_1 = \mathbb{Z}_2[l_1 + l_2 + l_3]$ (јер имамо јединицу на одговарајућем месту за сваки 1-симплекс). Тривијално је $B_2 = 0$, па је и $H_2(K) = 0$.

За матрицу D_2 добијамо $D_2 = S_2 V_2$ где су $S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $V_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Последња колона S_1 је нула па она одговара Z_1 , чије генераторе тражимо у последњој колони V_1 која садржи све јединице, те је $Z_1 = \mathbb{Z}_2[l_1 + l_2 + l_3]$. Сада рачунамо $H_1(K) = Z_1/B_1 = \mathbb{Z}_2[l_1 + l_2 + l_3]/\mathbb{Z}_2[l_1 + l_2 + l_3] = 0$.

Прва и друга колона су ненула колоне и оне одговарају генераторима B_0 тј. $B_0 = \mathbb{Z}_2[e_1, e_1 + e_2]$. Како је $d_0 = 0$ то је $Z_0 = \mathbb{Z}_2[e_1, e_2, e_3]$. Сада је

$$H_0(K) = Z_0/B_0 = \mathbb{Z}_2[e_1, e_2, e_3]/\mathbb{Z}_2[e_1, e_1 + e_2] = \mathbb{Z}_2[e_1, e_2, e_3 \mid e_1 = 0, e_1 + e_2 = 0] = \mathbb{Z}_2[e_3] \cong \mathbb{Z}_2.$$

□

5 Перзистентна хомологија

5.1 Перзистентне класе и дијаграми

Филтрација симплицијалних комплекса:

Дефиниција 5.1. Нека је K симплицијални комплекс. За функцију $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ кажемо а је монотона ако за симплексе $\tau \leq \sigma$ важи $f(\tau) \leq f(\sigma)$.

Оваквом монотоним функцијом можемо конструисати коначну филтрацију симплицијалног комплекса K :

$$\emptyset = K_0 \subseteq K_1 \subseteq K_2 \subseteq \dots \subseteq K_n = K$$

где је $K_i = K(a_i) = f^{-1}(-\infty, a_i]$ за неке вредности $a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n \in \mathbb{R}$.

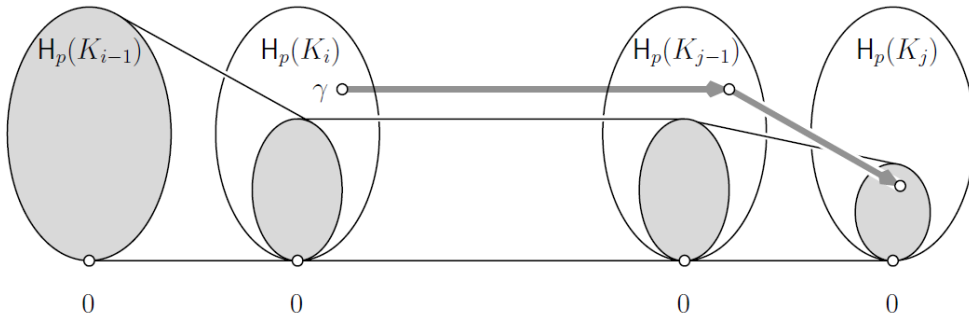
Преласком на хомологију добијамо низ пресликавања

$$0 = H_p(K_0) \rightarrow H_p(K_1) \rightarrow H_p(K_2) \rightarrow \dots \rightarrow H_p(K_n) = H_p(K)$$

и обележавамо $f_p^{i,j} : H_p(K_i) \rightarrow H_p(K_j)$.

Дефиниција 5.2. Дефинишемо k -те перзистентне хомолошке групе као слике хомоморфизама $H_k^{i,j} = \text{Im}(f_k^{i,j})$ за $0 \leq i \leq j \leq n$. k -те перзистентне Бетијеве бројеве дефинишемо као $\beta_k^{i,j} = \text{rank}(H_k^{i,j})$.

- Може се показати да је $H_k^{i,j} = Z_k(K_j)/(B_k(K_j) \cap Z_k(K_i))$.
- Нека је $\gamma \in H_k(K_i)$. Класа γ је рођена у K_i ако $\gamma \notin H_k^{i-1,i}$. Кажемо да γ умире у K_j ако се спаја са старијом класом када прелазимо у $K_{j-1} \hookrightarrow K_j$ (старија класа значи да је рођена у K_l за $l < i$) тј. $f_k^{i,j-1}(\gamma) \notin H_k^{i-1,j-1}$ али $f_k^{i,j}(\gamma) \in H_k^{i-1,j}$ (видети слику)



Перзистенцију класе γ дефинишемо као $\text{pers}(\gamma) = a_j - a_i$.

- Нека је $\mu_k^{i,j}$ број независних k -класа које су рођене у K_i и умиру у K_j . Онда је

$$\mu_k^{i,j} = (\beta_k^{i,j-1} - \beta_k^{i,j}) - (\beta_k^{i-1,j-1} - \beta_k^{i-1,j})$$

Лема 5.1. (Фундаментална лема перзистантне хомологије) За филтрацију симплицијалног комплекса K описану горе важи

$$\beta_p^{k,l} = \sum_{i \leq k} \sum_{j > l} \mu_p^{i,j}$$

Перзистентни дијаграми:

p -ти перзистентни дијаграм дефинишемо као

$$\text{Dgm}_p(f) = \{(a_i, a_j) \text{ са мултиплицитетом } \mu_p^{i,j}\}$$

5.2 Рачунање перзистентних класа mod 2

Под овиме мислим на рачунање перзистентне хомологије у коефицијентима $\mathbb{Z}_2$. Такође, у овој секцији користићемо исте ознаке као из секције о рачунању хомолошких група.

Уредимо симплексе $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_i, \dots$ тако да је за $i < j$, $f(\sigma_i) < f(\sigma_j)$. Ово можемо учинити јер је f монотона. Нека је даље

$$m = \sum_{p \in \mathbb{N}_0} n_p$$

$$D \in M_m(\mathbb{Z}_2)$$

$$D[i, j] = \begin{cases} 1 & , \sigma_i \text{ је страна кодимензије 1 од } \sigma_j \\ 0 & , \text{ иначе} \end{cases}$$

$\text{low}(j)$ – позиција најниже јединице у j -тој колони, $+\infty$ ако је нула колона

Нека је за почетак $S = D$. Уведимо матрицу V која је у почетку једнака јединичној матрици E_m где ћемо пратити све промене матрице S . И нека је за почетак $j = 1$.

Поступамо по следећем алгоритму:

1. Док год постоји $j_0 < j$ тако да је $\text{low}(j) = \text{low}(j_0)$ додајмо колону j_0 на колону j у S и V ;
2. $j = j + 1$.

Након овог алгоритма добијамо матрицу S за коју можемо да закључимо:

1. Ако је колона j нула:
Представља рађање класе додавањем симплекса σ_i који одговара колони j , у тренутку $f(\sigma_i)$. Ова класа представљена је колоном j у матрици V .
2. Колона j није нула:
Представља умирање класе која се родила у моменту $f(\sigma_i)$ где је $i = \text{low}(j)$. Другим речима, класа која је умрла се родила додавањем симплекса σ_i

Задатак 5.1. (Јул 2024) Дат је скуп тачака у равни $T = \{(1, 0), (-1, 0), (0, 2), (0, -2)\}$.

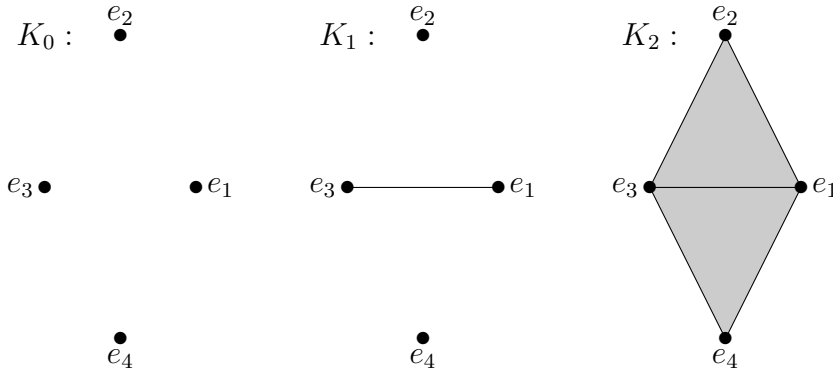
1. Одредити све симплицијалне комплексе у филтрацији која се добија од T конструишући Вијеторис-Рипсове комплексе са параметром r , $0 \leq r \leq \frac{\sqrt{5}}{2}$.
2. Наћи класе перзистенције ове филтрације и нацртати перзистентне дијаграме.

Решење. Нека је $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 2)$, $e_3 = (-1, 0)$ и $e_4 = (0, -2)$. Симплексе ћемо уређивати лексикографски у оквиру једног симплицијалног комплекса филтрације, док ћемо нове надовезивати на то уређење како се буду појављивали у филтрацији. Виеторис-Рипсова филтрација нам даје:

1. $K_0(r = 0) = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$;
2. $K_1(r = 1) = K_0 \cup \{[e_1, e_3]\}$;

$$3. K_2(r = \frac{\sqrt{5}}{2}) = K_1 \cup \{[e_1, e_2], [e_1, e_4], [e_2, e_3], [e_3, e_4], [e_1, e_2, e_3], [e_1, e_3, e_4]\}.$$

Дакле, имамо филтрацију и уређење симплекса: $\sigma_1 = e_1$, $\sigma_2 = e_2$, $\sigma_3 = e_3$, $\sigma_4 = e_4$, $\sigma_5 = [e_1, e_3]$, $\sigma_6 = [e_1, e_2]$, $\sigma_7 = [e_1, e_4]$, $\sigma_8 = [e_2, e_3]$, $\sigma_9 = [e_3, e_4]$, $\sigma_{10} = [e_1, e_2, e_3]$, $\sigma_{11} = [e_1, e_3, e_4]$.



Како 0-симплекси немају правих страна, то ће првих 4 колоне матрице D бити нуле, па их нећемо писати. Такође, симплекси σ_{10} и σ_{11} нису стране нити једног другог симплекса, те ће последње две врсте матрице D увек бити нуле, тако да ни њих нећемо писати. Остатак матрице D изгледа овако:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ & & & & 1 & 1 \\ & & & & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(у празним деловима матрице требало би да пишу нуле, ради прегледности, то овде нисмо радили). Сад је $S = D$, $V = E_{11}$ и $j = 1$. Започињемо алгоритам:

Видимо да се до тренутка $j = 8$ ништа не дешава, а за $j = 8$ имамо колону $S_8^\downarrow = [0, 1, 1, 0, \dots, 0]$ и $\text{low}(8) = 3$, као и $\text{low}(5) = 3$, па додајемо $S_5^\downarrow$ на $S_8^\downarrow$ као и $V_5^\downarrow$ на $V_8^\downarrow$ (не заборавимо да све операције радимо са коефицијентима $\mathbb{Z}_2$, дакле $1 + 1 = 0$)

$$\begin{aligned} S_8^\downarrow &:= [1, 1, 0, 0, \dots, 0] \\ V_8^\downarrow &:= [0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0] \\ \text{low}(8) &= 2 \end{aligned}$$

Како је сада $\text{low}(6) = 2$ то додајемо колону 6 на 8 и у S и у V

$$\begin{aligned} S_8^\downarrow &:= [0, 0, 0, 0, \dots, 0] \\ V_8^\downarrow &:= [0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0] \\ \text{low}(8) &= +\infty \end{aligned}$$

Даље, за $j = 9$ имамо $\text{low}(9) = 4$ и $\text{low}(7) = 4$ па додајемо колоне 7 на колоне 9

$$\begin{aligned} S_9^\downarrow &:= [1, 0, 1, 0, \dots, 0] \\ V_9^\downarrow &:= [0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0] \\ \text{low}(9) &= 3 \end{aligned}$$

Сада је $\text{low}(5) = 3$ па додајемо колоне 5

$$\begin{aligned} S_9^\downarrow &:= [0, 0, 0, 0, \dots, 0] \\ V_9^\downarrow &:= [0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0] \\ \text{low}(9) &= +\infty \end{aligned}$$

Даље се алгоритам извршава без даљих промена.

Сада посматрамо редом колоне матрице S . Као што смо рекли, прве 4 колоне су нула колоне. Оне представљају рађање 0-класе $[\sigma_1]$, $[\sigma_2]$, $[\sigma_3]$ и $[\sigma_4]$ које и представљају прве 4 колоне у V , у тренутку 0 (јер се сви 0-симплекси први пут појављују у K_0 за $r = 0$).

Колона 5 је ненула колона и она представља умирање класе представљене колоном $\text{low}(5) = 3$ у V тј. класе $[\sigma_3]$, у тренутку додавања симплекса σ_5 тј. у тренутку 1. Приметимо да ово јако има смисла, јер у тренутку 1 тј. у K_1 ми повезујемо 0-симплексе e_1 и e_3 чиме спајамо две компоненте повезаности. Међутим, како је $\sigma_1 = e_1$ старија компонента од $\sigma_3 = e_3$ (по уређењу које смо поставили) то σ_3 умире, док σ_1 наставља да живи.

Колона 6 је ненула колона и она представља смрт класе $\text{low}(6) = 2$ у V тј. класе $[\sigma_2]$ у тренутку додавања σ_6 тј. у тренутку $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Колона 7 је ненула колона и она представља смрт класе $\text{low}(7) = 4$ у V тј. класе $[\sigma_4]$ у тренутку додавања σ_7 тј. у тренутку $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Колона 8 је нула колона и она представља рађање 1-класе одређене колоном 8 у V тј. класе $[\sigma_5] + [\sigma_6] + [\sigma_8]$ у тренутку додавања симплекса σ_8 тј. $\frac{\sqrt{5}}{2}$. Приметимо да $[\sigma_5]$, $[\sigma_6]$ и $[\sigma_8]$ чине затворену контуру тј. цикл, самим тиме и један генератор у 1-хомолошкој групи.

Колона 9 је нула колона и она представља рађање 1-класе одређене колоном 9 у V тј. класе $[\sigma_5] + [\sigma_7] + [\sigma_9]$ у тренутку додавања симплекса σ_9 тј. $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Колона 10 је ненула колона и она представља смрт класе $\text{low}(10) = 8$ у V тј. класе $[\sigma_5] + [\sigma_6] + [\sigma_8]$ у тренутку додавања σ_{10} тј. у тренутку $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

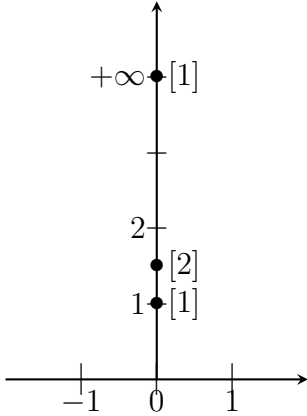
Колона 11 је ненула колона и она представља смрт класе $\text{low}(11) = 9$ у V тј. класе $[\sigma_5] + [\sigma_7] + [\sigma_9]$ у тренутку додавања σ_{11} тј. у тренутку $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Ове резултате можемо приказати таблично

Димензија	Класа	Време рађања	Време умирања
0	$[\sigma_1]$	0	$+\infty$
0	$[\sigma_2]$	0	$\frac{\sqrt{5}}{2}$
0	$[\sigma_3]$	0	1
0	$[\sigma_4]$	0	$\frac{\sqrt{5}}{2}$
1	$[\sigma_5] + [\sigma_6] + [\sigma_8]$	$\frac{\sqrt{5}}{2}$	$\frac{\sqrt{5}}{2}$
1	$[\sigma_5] + [\sigma_7] + [\sigma_9]$	$\frac{\sqrt{5}}{2}$	$\frac{\sqrt{5}}{2}$

Видимо да се 1-перзистантне класе рађају и умиру у истом тренутку. Међутим, у теорији то се не гледа, тј. не рачунамо их уопште, тако да је 1-перзистентни дијаграм празан.

Сто се тиче 0-перзистентног дијаграма, он изгледа овако:



где $[1]$ (или $[2]$) означава мултиплицитет класа. □

Вежба 5.1. Дат је скуп тачака у равни $T = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (-1, 0)\}$.

- Одредити све симплицијалне комплексе у филтрацији која се добија од T конструишући Вијеторис-Рипсове комплексе са параметром r , $0 \leq r \leq \sqrt{2}$.
- Наћи класе перзистенције ове филтрације и нацртати перзистентне дијаграме.

5.3 Растојање перзистентних дијаграма и теорема стабилности

До сада смо перзистентни дијаграм посматрали као коначан скуп тачака изнад главне дијагонале (јер су тачке облика (време рађања, време умирања)). За потребе увођења растојањ тј. метрике међу перзистентним дијаграмима, сваком дијаграму придружујемо бесконачно много тачака са главне дијагонале, од којих свака има бесконачан мултиплицитет.

Дефиниција 5.3. Нека су X и Y два перзистентна дијаграма. Означимо поново са X (тј. Y) унију дијаграма X (тј. Y) са главном дијагоном. Онда дефинишемо:

- Bottleneck* растојање:

$$d_B(X, Y) = \inf_{\gamma} \sup_{x \in X} \|x - \gamma(x)\|_{\infty}$$

- Wasserstein* растојање:

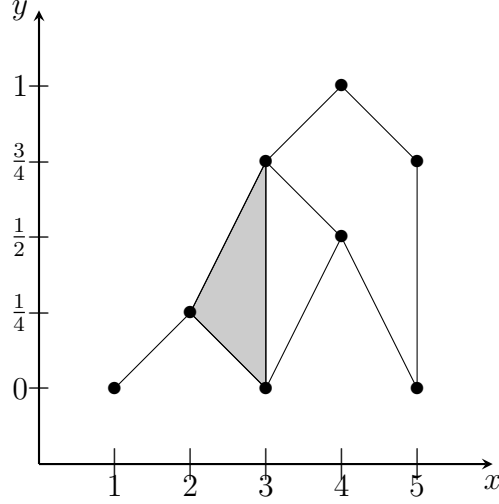
$$d_W^q(X, Y) = [\inf_{\gamma} \sum_{x \in X} \|x - \gamma(x)\|_{\infty}^q]^{\frac{1}{q}}$$

где је $\gamma : X \rightarrow Y$ бијекција.

Теорема 5.1. Нека је K симплицијални комплекс и нека су $f, g : K \rightarrow \mathbb{R}$ монотоне функције. Тада $\forall p \in \mathbb{N}_0$ важи:

$$d_B(\text{Dgm}_p(f), \text{Dgm}_p(g)) \leq \|f - g\|_\infty.$$

Задатак 5.2. Дат је симплицијални комплекс K на слици доле. Нека је $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ функција висине (y -координата на слици) и нека је $g : K \rightarrow \mathbb{R}$ функција задата са $g = f^2$. Одредити перзистентне диаграме под-ниво филтрација функција f и g и одредити d_B -растојања.



Решење. Означимо пре свега 0-симплексе од K :

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0), & e_2 &= (3, 0), & e_3 &= (5, 0), & e_4 &= (2, \frac{1}{4}), \\ e_5 &= (4, \frac{1}{2}), & e_6 &= (3, \frac{3}{4}), & e_7 &= (5, \frac{3}{4}), & e_8 &= (4, 1). \end{aligned}$$

Сада можемо да направимо филтрацију:

$$\begin{aligned} K_1 &= f^{-1}(-\infty, 0] = \{e_1, e_2, e_3\}, \\ K_2 &= f^{-1}(-\infty, \frac{1}{4}] = K_1 \cup \{e_4, e_1e_4, e_2e_4\}, \\ K_3 &= f^{-1}(-\infty, \frac{1}{2}] = K_2 \cup \{e_5, e_2e_5, e_3e_5\}, \\ K_4 &= f^{-1}(-\infty, \frac{3}{4}] = K_3 \cup \{e_6, e_7, e_2e_6, e_3e_7, e_4e_6, e_5e_6, e_2e_4e_6\}, \\ K_5 &= f^{-1}(-\infty, 1] = K_4 \cup \{e_8, e_6e_8, e_7e_8\}. \end{aligned}$$

као и да одредимо одговарајуће класе перзистенције ове филтрације

Класа	Време рођења	Време умирања
e_1	0	$+\infty$
e_2	0	$\frac{1}{4}$
e_3	0	$\frac{1}{2}$
$e_2e_5 + e_2e_6 + e_5e_6$	$\frac{3}{4}$	$+\infty$
$e_3e_5 + e_3e_7 + e_5e_6 + e_6e_8 + e_7e_8$	1	$+\infty$

Што се тиче филтрације индуковане подниво филтрацијама функције g јасно је да ће класе бити исте, само са другачијим временима рађања и умирања (које ће бити квадратне вредности оних добијених за функцију f)

Класа	Време рођења	Време умирања
e_1	0	$+\infty$
e_2	0	$\frac{1}{16}$
e_3	0	$\frac{1}{4}$
$e_2e_5 + e_2e_6 + e_5e_6$	$\frac{9}{16}$	$+\infty$
$e_3e_5 + e_3e_7 + e_5e_6 + e_6e_8 + e_7e_8$	1	$+\infty$

Видимо да постоје само класе диманзија 0 и 1. Сада свакој од ових фамилија класа придружујемо главну дијагоналу. Тако је нпр. $\text{Dgm}_1(f) = \{(\frac{3}{4}, +\infty), (1, +\infty)\} \cup \{(a, a) \mid a \in \mathbb{R}^+\}$.

Такође је јасно (бар интуитивно) да је бијекција коју бирамо из дефиниције *Bottleneck* растојања она која слика одговарајућу класу из дијаграма функције f у њој одговарајућу класу функције g . Тако имамо

$$d_B(\text{Dgm}_0(f), \text{Dgm}_0(g)) = \max\{|\frac{1}{4} - \frac{1}{16}|, |\frac{1}{2} - \frac{1}{4}|\} = \frac{1}{4}$$

$$d_B(\text{Dgm}_1(f), \text{Dgm}_1(g)) = |\frac{3}{4} - \frac{9}{16}| = \frac{3}{16}.$$

□

Напомена 5.1. Можемо приметити да је $\|f - g\|_\infty = |\frac{1}{2} - \frac{1}{4}| = \frac{1}{4}$ (максимум разлике се постиже за $\frac{1}{2}$). Даље можемо закључити да је

$$d_B(\text{Dgm}_p(f), \text{Dgm}_p(g)) \leq \|f - g\|_\infty$$

за $p \in \{0, 1\}$, што је управо резултат који нам даје теорема о стабилности.

Вежба 5.2. (За храбре и стрпљиве) Коришћењем алгоритма одредити све перзистентне класе из претходног задатка.